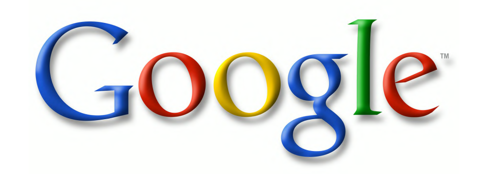





ET
VE RI
TAS
CHRISTO
ECCLESIAE
SIGILLVM

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

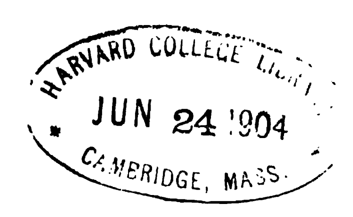
zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXIII
Jahrgang 1903.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 3. Januar 1903. Seite

Sitzung vom 7. Februar 1903.

Sitzung vom 7. März 1903.

Sitzung vom 2. Mai 1903.

Seite

Sitzung vom 13. Juni 1903.

Sitzung vom 4. Juli 1903.

Seite

Oeffentliche Sitzung zur Feier des 144. Stiftungstages am 11. März 1903.

Sitzung vom 7. November 1903.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 25. November 1903.

Sitzung vom 5. Dezember 1903.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1903. Heft I.

München.
Verlag der K. Akademie.
1903.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 3. Januar 1903.

1. Herr Sebastian Finsterwalder berichtet über eine Arbeit: „Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen". Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

2. Herr Ferdinand Lindemann hält einen Vortrag: „Zur Theorie der Spektrallinien, II. Mitteilung". Die Abhandlung wird im Anschluss an die Sitzung vom 7. Februar, in welcher eine Fortsetzung derselben vorgelegt wird, veröffentlicht werden.

Sitzung vom 7. Februar 1903.

1. Herr Hugo v. Seeliger überreicht eine Abhandlung des Privatdozenten an der hiesigen Universität, Herrn Dr. Arthur Korn: „Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen".

2. Herr Ferdinand Lindemann macht als Fortsetzung seiner in der Sitzung vom 3. Januar vorgetragenen Arbeit weitere Mitteilungen: „Zur Theorie der Spektrallinien II".

3. Herr Sebastian Finsterwalder spricht im Anschluss an seine in der Sitzung vom 3. Januar d. Js. vorgelegte und für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: „Über die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung und Massstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen".

4. Herr Alfred Pringsheim legt eine Abhandlung: „Zur Theorie der ganzen Funktionen von endlichem Range" vor.

Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen.

Von **Arthur Korn.**

(Eingelaufen 7. Februar.)

Vor einiger Zeit habe ich die folgenden Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen aufgestellt:

I. Die Werte des über ein stetig gekrümmtes Flächenstück ω zu erstreckenden Integrales:

1) $$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

in dem $\varkappa$ eine abteilungsweise stetige Funktion der Stelle $(\xi\,\eta\,\zeta)$ auf ω, r die Entfernung und Richtung von $d\omega\,(\xi\,\eta\,\zeta)$ nach einem variabeln Punkte $(x\,y\,z)$, ν die positive[1]) Normale von $d\omega$ vorstellt, auf der Fläche selbst:

2) $$W_\omega = \tfrac{1}{2}(W_+ + W_-)$$

haben die Eigenschaft, dass für zwei Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}

3) $$\text{abs.}\,[W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)] \overline{\overline{<}}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo a eine endliche Konstante vorstellt und abs. Max. $(\varkappa)$ den absolut grössten Wert, den $\varkappa$ auf ω annimmt.

---

[1]) Nach willkürlicher, aber ein für allemal bestimmter Festsetzung der positiven Seite von ω.

II. Die Werte des Flächenintegrales

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

auf der Fläche selbst:

$$W_\omega \equiv \tfrac{1}{2}(W_+ + W_-)$$

haben eindeutige und stetige, erste tangentiale Ableitungen, falls $\varkappa$ die Eigenschaft hat, dass für zwei Punkte $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ und $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ der Fläche ω in genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$4)\qquad \text{abs.}\, \{\varkappa(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2) - \varkappa(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)\} \overline{<} a \cdot r_{12}^{1-\lambda},$$

wo a eine endliche Konstante, λ einen echten Bruch vorstellt.

III. Die Werte des Flächenintegrales:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

auf der Fläche selbst:

$$W_\omega \equiv \tfrac{1}{2}(W_a + W_i)$$

haben, falls die ersten Abteilungen von $\varkappa$ auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig sind, erste tangentiale Ableitungen, denen die folgende Eigenschaft zukommt:

Es ist für zwei Punkte $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ und $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}, wenn h eine in $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ oder $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ tangentiale Richtung vorstellt und die Fläche ω geschlossen ist:

$$5)\qquad \text{abs.} \left\{ \left| \frac{\partial W_\omega}{\partial h} \right|_{(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)} - \left| \frac{\partial W_\omega}{\partial h} \right|_{(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)} \right\} \overline{<} b \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo b eine endliche Konstante bedeutet.

Mit Hilfe dieser 3 Sätze[1]) und des aus einem bekannten Theoreme folgenden Resultates, dass die Ungleichungen 5) die Stetigkeit der ersten Abteilungen des Integrales

---

[1]) In der obigen Form habe ich die Sätze in meinen „Abhandlungen zur Potentialtheorie, Nr. 1 (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901) ausgesprochen; der wesentliche Inhalt findet sich auch bereits in einer Note in den Comptes rendus, 130, p. 1238, 1900.

$$\int_\omega W_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

in ganzer Erstreckung des Aussen- (Innen-)raumes von ω zur Folge haben,[1]) gelang es, die auf der Methode des arithmetischen Mittels beruhenden Existenzbeweise auf den allgemeinen Fall auszudehnen, dass die gegebenen Randwerte f in dem Dirichlet'schen Probleme lediglich als (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle an der Fläche ω vorausgesetzt werden.

Es folgt nemlich successive, wenn man auf die Integrale:

$$\mathfrak{W}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_\omega f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

$$\mathfrak{W}_j = +\frac{1}{4\pi}\int_\omega (\mathfrak{W}_{j-1,a} + \mathfrak{W}_{j-1,i}) \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \quad (j = 2, 3 ..)$$

die Sätze I—III anwendet, dass

$$\mathfrak{W}_{1\omega} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1,a} + \mathfrak{W}_{1,i})$$

bei lediglich (abteilungsweise) eindeutig und stetig vorausgesetztem f bereits die Eigenschaft 3) besitzt, d. h. dass für 2 Punkte $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ und $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\,[\mathfrak{W}_{1\omega}(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2) - \mathfrak{W}_{1\omega}(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)] \overline{\overline{<}}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(f) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

hierauf, dass

$$\mathfrak{W}_{2\omega} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{W}_{2,a} + \mathfrak{W}_{2,i})$$

bereits eindeutige und stetige erste Abteilungen besitzt, hierauf, dass:

$$\mathfrak{W}_{3\omega} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{W}_{3,a} + \mathfrak{W}_{3,i})$$

bereits die Eigenschaft 5) haben wird, d. h. dass für 2 Punkte $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ und $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}, wenn h eine in $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ oder $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ tangentiale Richtung vorstellt:

$$\text{abs.}\left[\frac{\partial\, \mathfrak{W}_{3\omega}}{\partial h}(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2) - \frac{\partial\, \mathfrak{W}_{3\omega}}{\partial h}(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)\right] \overline{\overline{<}}\, b \cdot \sqrt{r_{12}}.$$

[1]) z. B. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie I, p. 394.

Infolge hiervon hat

$$\mathfrak{W}_4 = \frac{1}{2\pi}\int_\omega \mathfrak{W}_{3\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

in ganzer Erstreckung des Aussen- (Innen-)raumes eindeutige und stetige erste Abteilungen; dasselbe gilt dann natürlich auch für $\mathfrak{W}_5\,\mathfrak{W}_6 \ldots.$

Da es nun durch die Ausgestaltung von Methoden, deren Grundgedanken sich in zwei Abhandlungen Poincaré's[1]) finden, möglich geworden ist, das Dirichlet'sche Problem im Raume für geschlossene, stetig gekrümmte Flächen ω zu lösen,[2]) wenn die Randwerte f nur die Bedingung erfüllen, dass

$$\int_\omega f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

mit seinen ersten Ableitungen in ganzer Erstreckung des Innen- (Aussen-)raumes eindeutig und stetig ist, so war nach dem Obigen jedenfalls die Lösung des Problemes bei den Randwerten:

$$-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{W}_{3\omega} = f - \mathfrak{W}_{1a} - \mathfrak{W}_{2a} - \mathfrak{W}_{3a}$$

resp.

$$+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{W}_{3\omega} = f + \mathfrak{W}_{1i} - \mathfrak{W}_{2i} + \mathfrak{W}_{i3}$$

und somit auch bei den Randwerten f selbst gegeben, wenn man über f auch blos voraussetzt, dass es eine (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktion der Stelle von ω ist.

Durch die an die Spitze gestellten drei Sätze ist es überhaupt zum ersten Male möglich gewesen, den Existenzbeweis

---

[1]) H. Poincaré, la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, Acta mathematica 1895 und Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 1894.

[2]) In zweierlei Weise: 1) durch Lösung des Problemes für Flächen, die in bezug auf einen inneren Punkt konvex sind, und Hinzunahme der Schwarz'schen Methode des alternierenden Verfahrens (A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie I, p. 248 ff., Math. Ann. 1900, Abh. zur Potentialtheorie 1, und 2) durch einen direkten, allgemeinen Beweis der Neumannschen Methode (Abh. zur Potentialtheorie 5, man vgl. auch W. Stekloff, Ann. de l'Ec. Norm. 1902), der sich auf einen Satz von Zaremba gründet. (S. Zaremba, Krak. Anz. 1901.)

für die Lösungen des Dirichlet'schen Problemes in dieser allgemeinen Form einwandsfrei zu geben.

In allerneuester Zeit hat nun Liapounoff in den Communications de la Société Mathématique de Kharkow (1902) eine Arbeit: Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet veröffentlicht, in der er zeigt, dass man die Formel 3) des Satzes I durch die folgende ersetzen kann:

$$\text{abs.}\left[W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\right] \overline{\overline{<}}\; a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot r_{12}^{a},$$

wo man für a irgend einen echten Bruch wählen kann, und dass bereits die Funktion:

$$\mathfrak{W}_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{W}_{2\omega}\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\,\omega$$

die (von mir erst für $\mathfrak{W}_4$ bewiesene) Eigenschaft hat, im Innen-(Aussen-)raum mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig zu sein, wenn f an ω lediglich (abteilungsweise) eindeutig und stetig ist.

Eine dieser Untersuchung hinzugefügte kritische Bemerkung über die von mir gegebenen Sätze I—III veranlasst mich, noch einmal auf die Beweise dieser Sätze einzugehen. Da dieselben eine grosse Analogie zu einer Anzahl ähnlicher Untersuchungen (in meinem Lehrbuch der Potentialtheorie) zeigen, hatte ich in diesen Beweisen (Abhandl. zur Potentialtheorie, 1, p. 5—8) eingehend nur die wirklich wesentlichen, neuen Schlussfolgerungen hervorgehoben, und es ist mir bisher kein Bedenken gegen die Strenge derselben bekannt geworden. Irgend welche Zweifel über den Sinn, in dem die Begriffe:

$$W_\omega, \quad W_+, \quad W_-,$$

die tangentialen Ableitungen von W_ω, W_+, W_- gebraucht werden, möchte ich durch die folgenden, etwas ausführlicheren Untersuchungen zerstreuen; diese Zweifel sind dadurch vielleicht möglich, dass diese Begriffe nicht von allen Autoren von vornherein in derselben Weise eingeführt werden, wenn sie in den Anwendungen schliesslich auch in demselben Sinne gebraucht werden.

Ich lege auf die Sätze I—III deshalb einen besonderen Wert, weil ihre Ableitung ziemlich elementar ist, während die Liapounoffschen Untersuchungen ausser den Anfangsgründen der Potentialtheorie noch manche Vorstudien voraussetzen, und für die Erreichung des Endzweckes ist es ziemlich gleichgültig, ob $\mathfrak{W}_3$ oder erst $\mathfrak{W}_4$ die erste Potentialfunktion[1]) der Neumannschen Reihe ist.

§ 1.

Beweis des Satzes I.

Bevor ich zu dem Beweise übergehe, will ich einige Festsetzungen über den Sinn, in welchem ich die in dem Satze vorkommenden Begriffe gebrauche, vorausschicken.

Was zunächst den Begriff des „stetig gekrümmten Flächenstückes" anlangt, so weicht die von mir stets zugrunde gelegte Definition von der anderer Autoren nur in dem einen Punkte ab, dass ich von den Richtungskosinussen der Normalen ν

$$\cos(\nu x),\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

neben der Eindeutigkeit und Stetigkeit verlange, dass ihre ersten Ableitungen im allgemeinen eindeutig und stetig (also endlich und integrabel) sein sollen.[2])

Eine zweite Bemerkung ist über den Gebrauch des Begriffes: „Werte des Integrales

$$\int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

auf der Fläche" zu machen. Die Werte der Integrale von der Form:

$$I = \int_\omega \frac{f\{\cos(rx),\ \cos(ry),\ \cos(rz)\}}{r^j}\, d\omega$$

---

[1]) d. h. die erste Funktion, die mit ihren ersten Abteilungen in ganzer Erstreckung des Innen- (Aussen-)raumes eindeutig und stetig ist.

[2]) Man könnte die Definition für die Sätze I—III zwar noch etwas weiter fassen, doch ist die obige Definition für die ganze Potentialtheorie so bequem, dass ich auch hier nicht von ihr abgehen möchte.

haben für $j > 0$ auf der Fläche ohne eine besondere Festsetzung ebensowenig einen Sinn, wie das bestimmte Integral:

$$J = \int_{-a^2}^{+a^2} \frac{dx}{x^j}, \quad (j > 0).$$

Durch besondere Festsetzungen erhalten sie erst den gewöhnlich mit ihnen verbundenen Sinn. Durch die fundamentale Festsetzung:

6) $$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{dx}{x^j} = 0, \quad (j < 1),$$

durch welche das Integral J für $j < 1$ den bestimmten Sinn eines „uneigentlichen Integrales“:

$$J = \lim_{\varepsilon = 0} \left[\int_{-a^2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^j} + \int_{+\varepsilon}^{+a^2} \frac{dx}{x^j} \right]$$

erhält, wird auch den Flächenintegralen:

$$\int_{\omega} \frac{d\omega}{r^j}$$

für $j < 2$ der bestimmte Sinn von uneigentlichen Integralen:

$$\lim_{R = 0} \int_{\omega - \omega_0} \frac{d\omega}{r^j}$$

zuerteilt, wo ω_0 ein Flächenstück vorstellt, dessen Punkte von dem zu betrachtenden Punkte der Fläche Abstände $< R$ besitzen.

Die Formel:

7) $$\lim_{R = 0} \int_{\omega_0} \frac{d\omega}{r^j} = 0, \quad (j < 2)$$

lässt sich ja in der Tat — worauf wir hier wohl nicht mehr besonders einzugehen brauchen — als eine Folgerung der Festsetzung 6) beweisen.

Wir werden nun ganz allgemein den Wert jedes Integrales I auf der Fläche durch die Formel:

8) $$I = \lim_{R=0} \int_{\omega-\omega_0} \frac{f\{\cos(r\,x),\ \cos(r\,y),\ \cos(r\,z)\}}{r^j}\, d\,\omega$$

definieren können, sobald uns der Beweis der Formel:

9) $$\lim_{R=0} \int_{\omega_0} \frac{f\{\cos(r\,x),\ \cos(r\,y),\ \cos(r\,z)\}}{r^j}\, d\,\omega = 0$$

infolge von 7) möglich ist. Wir werden dann sagen, wir können das Integral I auf der Fläche als ein uneigentliches Integral betrachten.

Für das Integral:

$$W_\omega = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

ergibt sich diese Möglichkeit leicht, weil wir in dem Gebiete ω_1 bei genügend kleinem R auf der Fläche:

10) $$\cos(r\,\nu) = r \cdot F$$

setzen können, wo F eine im allgemeinen eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf ω_0 vorstellt.

Die Formel 2) dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen, und es möge nun der Beweis des Satzes I folgen:

Es seien ($\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$) und ($\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$) zwei Punkte der Fläche und man schlage um den Mittelpunkt 0 der diese Punkte verbindenden Graden eine Kugel von dem Radius:

$$P = \sqrt{r_{12}},$$

(r_{12} die Entfernung der beiden gewählten Punkte). Bei genügend kleinem r_{12} zerlegt die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche mit ω dieses Flächenstück in einen Teil ω_1, der ($\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$) und ($\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$) enthält, und einen Teil $\omega - \omega_1$, und man kann sowohl für ($\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$) als auch für ($\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$)

$$\int_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega = \int_{\omega_1} \varkappa \cdot F \cdot \frac{d\,\omega}{r}$$

setzen, wo F endlich und integrabel ist; dieses Flächenpotential ist für jeden Punkt des Raumes

$$\overline{\overline{<}}\ \text{endl. Konst. abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \varrho,$$

wenn ϱ die grösste mögliche Entfernung zwischen zwei Punkten von ω_1 ist, also

$$\overline{\overline{<}}\ \tfrac{1}{2}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot P^{1)},$$
$$\overline{\overline{<}}\ \tfrac{1}{2}\, a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wenn wir unter a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante verstehen. Daraus folgt zunächst:

Der von ω_1 zu der Differenz:

$$|\, W_\omega(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2) - W_\omega(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)\,|$$

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$a \cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa) \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante ist.

Wir schlagen jetzt um 0 eine zweite Kugel mit dem Radius β; wir können denselben so wählen, dass derselbe grösser ist als eine bestimmte, endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Länge, aber dennoch genügend klein so, dass die Schnittkurve σ dieser Kugel mit ω das Flächenstück $\omega - \omega_1$ in zwei Teile ω_2 und $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt und dass für je zwei Punkte $(\xi\, \eta\, \zeta)$ und $(x\, y\, z)$ der Fläche $\omega_1 + \omega_2$:

11)
$$\begin{cases} \cos(\nu\, h) = r \cdot f, \\ \cos(r\, \nu) = r \cdot F \end{cases}$$

ist, wenn

r die Entfernung $(\xi\, \eta\, \zeta) - (x\, y\, z)$,
ν die positive Normale in $(\xi\, \eta\, \zeta)$,
h eine tangentiale Richtung in $(x\, y\, z)$

ist und f, F endliche und integrable Funktionen von $(\xi\, \eta\, \zeta)$ vorstellen.

---

1) Durch genügende Verkleinerung von r_{12} können wir stets z. B.:

$$\varrho\ \overline{\overline{<}}\ 3\, P$$

machen.

Es ist nun der Beitrag, welchen ω_2 zu der Differenz

$$W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

liefert

$$= \int_h \frac{\partial W_2}{\partial h}\, d\, h,$$

wenn wir:

$$W_2 = \int_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

setzen und die Integration $\int_h$ über ein Kurvenstück h erstrecken, welches in ω_1 zwischen $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ beliebig verläuft. Dieser Beitrag ist somit:

$$= \int_h \int_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(\nu\,h) - 3\cos(r\,h)\cos(r\,\nu)}{r^3}\, d\,\omega\; d\,h$$

und nach 11):

$$= \int_h \int_{\omega_2} \varkappa \frac{\Psi}{r^2}\, d\,\omega\; d\,h,$$

wo Ψ auf ω_2 endlich und integrabel ist, somit

$$\overline{\overline{<}} \int_h \frac{\text{endl. Konst. abs. Max. } (\varkappa)^{1)}}{\varrho}\, d\,h,$$

wenn ϱ die kleinste Entfernung der Kurve h von einem Punkte des Flächenstückes ω_2 vorstellt.

Wir können nun[2]) die Kurve h so wählen, dass jedenfalls

$$\varrho > \frac{P}{2}$$

$$\int_h d\,h < 2\,r_{12}$$

wird, indem wir z. B. die Schnittkurve der durch die Grade $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) - (\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ und die Normale in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ gelegten Ebene mit ω_1 zur Kurve h nehmen, dann ist:

---

[1]) Denn es ist:

$$\int_{\omega_2} \varkappa \frac{\Psi}{r^2}\, d\,\omega \overline{\overline{<}} \frac{1}{\varrho} \int_{\omega_2} \frac{\varkappa\,\Psi}{r}\, d\,\omega.$$

[2]) Bei genügend kleinem r_{12}.

$$\frac{1}{\varrho}\int_h d\,h < 4\,\frac{r_{12}}{P}\;(= 4\sqrt{r_{12}}),$$

und es folgt:

Der von ω_2 zu der Differenz:

$$|\,W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,|$$

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$A\cdot \text{abs. Max.}\,(\varkappa)\cdot\sqrt{r_{12}},$$

wo A eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante vorstellt.

Bedenkt man schliesslich, dass der von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ gelieferte Beitrag kleiner als

$$\text{endl. Konst. abs. Max.}\,(\varkappa)\cdot r_{12}$$

ist, so sieht man, dass der Satz I nunmehr vollständig bewiesen ist.

§ 2.

Beweis des Satzes II.

Dem Beweise des Satzes II schicken wir die genaue Begriffsbestimmung für die tangentialen Ableitungen der Funktion W_ω voraus.

Es seien $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ zwei Punkte der Fläche; nähern wir den Punkt $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ dem Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ unendlich, wobei die Quotienten

$$\frac{\xi_2-\xi_1}{r_{12}},\quad \frac{\eta_2-\eta_1}{r_{12}},\quad \frac{\zeta_2-\zeta_1}{r_{12}}$$

die Richtungskosinusse:

$$\cos(h\,x),\quad \cos(h\,y),\quad \cos(h\,z)$$

zu Grenzwerten haben mögen; konvergiert bei dieser Annäherung der Quotient:

$$\frac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}}$$

gegen einen bestimmten Grenzwert, so wollen wir denselben als die Ableitung von W_ω in der tangentialen Richtung h und als den Wert von

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial h}$$

im Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ bezeichnen.

Für den Beweis des Satzes II ist zunächst wichtig, zu zeigen, dass das Integral

$$\int_\omega (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h) - 3 \cos(r h) \cos(r \nu)}{r^3} d\omega,$$

in dem $\varkappa_1$ den Wert von $\varkappa$ in $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ vorstellt, auf der Fläche als „uneigentliches Integral" betrachtet werden kann und in $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ den Wert von $\frac{\partial W_\omega}{\partial h}$ repräsentiert, falls dieses uneigentliche Integral einen bestimmten endlichen Wert hat.

Setzen wir:

$$11) \qquad \overline{W}_\omega = \int_\omega (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(r \nu)}{r^2} d\omega = W_\omega - 2\pi \varkappa_1,$$

nehmen r_{12} vorläufig noch endlich an und schlagen um $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ eine Kugel mit dem Radius:

$$12) \qquad P = r_{12}^\mu, \quad (0 < \mu < 1),$$

[wobei es zweckmässig sein wird:

$$13) \qquad \mu = \frac{1+\nu}{2-\lambda}, \quad (0 < \nu < 1 - \lambda)$$

zu setzen], deren Schnittkurve ς das Flächenstück ω in einen Teil ω_1 und einen Teil $\omega - \omega_1$ zerlegen möge, so ist der von dem $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ enthaltenden Flächenstücke ω_1 herrührende Beitrag zu dem Integrale $\overline{W}_\omega$

$$< \text{endl. Konst. } P^{1-\lambda} \cdot P,$$

da nach der Voraussetzung 4) S. 4 der absolut grösste Wert von $\varkappa - \varkappa_1$ auf ω_1 jedenfalls kleiner als $a\,(2\,P)^{1-\lambda}$ sein wird, wenn man r_{12} genügend klein annimmt. Dieser Beitrag ist somit nach 12) und 13)

$$\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_{12}^{1+\nu};$$

der Beitrag, welchen die Fläche ω_1 zu dem Ausdruck

$$\frac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}} = \frac{\overline{W}_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \overline{\overline{W}}_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}}$$

liefert, ist demgemäss:

$$\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } r_1^{\nu}, \quad (0 < \nu < 1 - \lambda).$$

Wir schlagen jetzt um $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ eine zweite Kugel mit dem Radius R, von dem wir nur voraussetzen wollen, dass er $> P$ und genügend klein ist so, dass die Schnittkurve σ dieser Kugel mit ω das Flächenstück $\omega - \omega_1$ in zwei Teile ω_2 und $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt und dass für je zwei Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(x\,y\,z)$ der Fläche $\omega_1 + \omega_2$:

14) $$\begin{cases} \cos(\nu s) = r \cdot f, \\ \cos(r \nu) = r \cdot F, \end{cases} \Big| \; \varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(x\,y\,z) \overline{\gtrless} a\, r^{1-\lambda}$$

ist, wenn

r die Entfernung $(\xi\,\eta\,\zeta) - (x\,y\,z)$,
ν die positive Normale in $(\xi\,\eta\,\zeta)$,
s eine tangentiale Richtung in $(x\,y\,z)$

ist und f, F endliche und integrable Funktionen von $(\xi\,\eta\,\zeta)$ vorstellen.

Es ist nun der Beitrag, welchen ω_2 zu der Differenz

$$W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

liefert

$$= \int_s \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial s}\, d\, s,$$

wenn wir:

$$\overline{W}_2 = \int_{\omega_2} \{\varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\} \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega,$$

$$= \int_{\omega_2} \{\varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(x\,y\,z)\} \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

$$+ \int_{\omega_2} \{\varkappa(x\,y\,z) - \varkappa(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\} \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\, d\,\omega$$

setzen und die Integration $\int\limits_s$ über ein Kurvenstück s erstrecken, welches in ω_1 zwischen $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ beliebig verläuft.

Dieser Beitrag ist somit

$$= \int\limits_s \int\limits_{\omega_2} \{\varkappa(\xi\,\eta\,\zeta) - \varkappa(x\,y\,z)\} \frac{\cos(\nu s) - 3\cos(r s)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega\, ds$$

$$+ \int\limits_s \int\limits_{\omega_2} \{\varkappa(x\,y\,z) - \varkappa(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\} \frac{\cos(\nu s) - 3\cos(r s)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega\, ds$$

und nach 14)

$$< \int\limits_s \int\limits_{\omega_2} \frac{\text{endl. Konst.}}{r^{1+\lambda}}\, d\omega\, ds$$

$$+ \text{endl. Konst.}\, r_{12}^{1-\lambda} \int\limits_s \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^2}\, ds,$$

$$\overline{\overline{<}}\; a \cdot r_{12} \cdot \text{Max.} \left[\int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}\right]^{1)},$$

wo a eine endliche Konstante, Max. [—] den grössten Wert darstellt, den dieses Integral überhaupt im Raume annehmen kann. Es folgt so:

Der Beitrag, welchen die Fläche ω_2 zu dem Ausdruck

$$\frac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}}$$

liefert, ist

$$< \text{endl. Konst. Max.} \left[\int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}\right].$$

Setzen wir jetzt:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2,$$

so folgt:

---

[1]) Da

$$r_{12}^{1-\lambda} \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^2} < \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}},$$

$$\int\limits_s ds < 2\, r_{12}$$

bei geeigneter Wahl der Kurve s (vgl. S. 12).

$$15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{W_\omega(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - W_\omega(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)}{r_{12}} \\ &= \left| \int\limits_{\omega-\omega_0} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h) - 3\cos(r\nu)\cos(rh)}{r^3}\, d\omega \right|_P \\ &+ \varepsilon \end{aligned} \right.$$

wenn P einen Punkt auf der Graden $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) - (\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ vorstellt[1]) und

$$16)\quad |\varepsilon| \overline{<} \text{endl. Konst. } r_{12}^{\nu} + \text{endl. Konst. Max.} \left[\int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}} \right].$$

Durch den Uebergang zur Grenze $r_{12} = 0$ folgt in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$:

$$17)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W_\omega}{\partial h} &= \int\limits_{\omega-\omega_0} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h) - 3\cos(r\nu)\cos(rh)}{r^3}\, d\omega \\ &+ E, \end{aligned} \right.$$

wo E kleiner ist als

$$\text{endl. Konst. Max.} \left[\int\limits_{\omega_0} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}} \right].$$

Da nun:

$$\lim_{R=0} \int\limits_{\omega_0} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}} = 0, \quad \text{(vgl. 7), S. 9)}$$

und infolge:

$$\begin{aligned} &|\varkappa - \varkappa_1| \overline{\overline{<}} a\, r^{1-\lambda}, \\ &\left.\begin{aligned} \cos(\nu h) &= r \cdot f, \\ \cos(r\nu) &= r \cdot F, \end{aligned}\right\} \; f, F \text{ endlich auf } \omega_0, \end{aligned}$$

auch:

$$\lim_{R=0} \int\limits_{\omega_0} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h) - 3\cos(r\nu)\cos(rh)}{r^3}\, d\omega = 0$$

---

[1]) Unter Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf die Differenz der Werte von

$$\int\limits_{\omega-\omega_0} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$.

ist, so beweist die Formel 17) in der Tat unsere erste Behauptung, dass das Integral:

$$\int_\omega (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h) - 3\cos(r\nu)\cos(rh)}{r^3}\, d\omega,$$

in dem $\varkappa_1$ den Wert von $\varkappa$ in $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ vorstellt, auf der Fläche als „uneigentliches Integral“ betrachtet werden kann und in $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ den Wert von $\frac{\partial W_\omega}{\partial h}$ repräsentiert, falls dieses uneigentliche Integral einen bestimmten endlichen Wert besitzt.

Hierauf beweisen wir erst die eigentliche Behauptung, dass dieses uneigentliche Integral eine stetige Funktion der Stelle auf ω bei unserer Voraussetzung 4) darstellt.[1] Wir teilen durch eine geschlossene Kurve Σ die Fläche ω in einen Teil Ω_1, der $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ enthält, und auf dem

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} &|\varkappa - \varkappa_1| \overline{\overline{<}}\, a \cdot r^{1-\lambda}, \\ &\cos(\nu h) = r \cdot f, \\ &\cos(r\nu) = r \cdot F, \end{aligned}\right.\quad \left.\vphantom{\begin{aligned}a\\b\end{aligned}}\right\}\ f, F \text{ endlich auf } \Omega_1,$$

und einen Teil $\omega - \Omega_1$, dessen Punkte von $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ Entfernungen $> \varrho$ haben, wo ϱ eine beliebig gewählte Länge vorstellt, die nur kleiner ist als eine bestimmte endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Länge. Es folgt dann die Formel:

$$19)\quad \begin{aligned} \frac{\partial W_\omega}{\partial h} &= \int_{\Omega_1} a\,\{f - 3F\cos(rh)\}\,\frac{d\omega}{r^{1+\lambda}} \\ &+ \int_{\omega-\Omega_1} (\varkappa - \varkappa_1)\frac{\cos(\nu h) - 3\cos(r\nu)\cos(rh)}{r^3}\, d\omega, \end{aligned}$$

aus der zunächst die Endlichkeit des $\frac{\partial W_\omega}{\partial h}$ vorstellenden uneigentlichen Integrales hervorgeht, da

$$\int_{\Omega_1} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}$$

---

[1]) Wenn wir natürlich unter $\cos(hx)$, $\cos(hy)$, $\cos(hz)$ stetige Funktionen der Stelle auf ω verstehen.

endlich ist, und ebenso das zweite Integral rechts in 19), wenn nur $\frac{1}{\varrho}$ endlich ist. Sind schliesslich $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$, $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ zwei Punkte der Fläche, h_1 eine tangentiale Richtung in $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$, h_2 eine tangentiale Richtung in $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$, ε eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse, so können wir Ω_1 so wählen, dass das erste Integral rechts in 19) sowohl in $(\xi_1 \eta_1, \zeta_1)$, als auch in $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist und dass die Punkte von $\omega - \Omega_1$ von $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ Abstände $> \varrho$ haben, wo ϱ eine von null verschiedene, genügend kleine (von ε abhängende) Länge vorstellt, wenn wir nur den Abstand von $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ genügend klein annehmen. Nach nunmehriger Festlegung von Ω_1 können wir die Differenz der Werte des Integrales

$$\int_{\omega-\Omega_1} (\varkappa - \varkappa_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r\nu)\cos(r h_1)}{r^3} d\omega \text{ in } (\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$$

und des Integrales

$$\int_{\omega-\Omega_1} (\varkappa - \varkappa_2) \frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r\nu)\cos(r h_2)}{r^3} d\omega \text{ in } (\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$$

kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ machen, indem wir $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ genügend nahe an $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ heranrücken und

$$\cos(h_1 x), \quad \cos(h_1 y), \quad \cos(h_1 z);$$
$$\cos(h_2 x), \quad \cos(\varkappa_2 y), \quad \cos(h_2 z)$$

als die Werte von stetigen Funktionen

$$\cos(h x), \quad \cos(h y), \quad \cos(h z)$$

in $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ resp. $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ voraussetzen. Dann folgt:

20) $$\frac{\partial W_\omega}{\partial h_2}(\xi_2 \eta_2 \zeta_2) - \frac{\partial W_\omega}{\partial h_1}(\xi_1 \eta_1 \zeta_1) < \varepsilon,$$

der Beweis des Satzes II. ist erledigt.

§ 3.

Beweis des Satzes III.

Dem Beweise des Satzes III. schicke ich wieder zunächst einige Festsetzungen voraus.

Es sei $\varkappa$ eine mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion der Stelle $(\xi\,\eta\,\zeta)$ der Fläche ω, wir verstehen unter der Ableitung $\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}$ in $(\xi\,\eta\,\zeta)$ die Ableitung von $\varkappa$ nach der tangentialen Richtung, welche durch die Schnittgrade der Tangentialebene mit der die Normale und die Parallele der x Axe in $(\xi\,\eta\,\zeta)$ enthaltenden Ebene eindeutig festgelegt ist, wenn wir noch bestimmen, dass wir die Richtung der Schnittgeraden wählen, die mit der x Axe einen Winkel $< \frac{\pi}{2}$ bildet, und in dem unbestimmten Falle, in dem die Normale der x Axe parallel ist, $\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} = 0$ gesetzt werden soll. Die analogen Definitionen mögen für $\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}$ gelten; ist dann h irgend eine tangentiale Richtung in $(\xi\,\eta\,\zeta)$, so ist:

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial h} = \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(h\,x) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(h\,y) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(h\,z).$$

Nach diesen Festsetzungen kann man in bekannter Weise für die ersten Ableitungen des Integrales

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\omega$$

an irgend einer von ω getrennten Stelle $(x\,y\,z)$ des Raumes die Formel:

$$21)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s} = & \int_\omega \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(s x) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(s y) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(s z) \right\} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \\ & - \int_\omega \cos(\nu s) \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\frac{\cos(r x)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\frac{\cos(r y)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\frac{\cos(r z)}{r^2} \right\} d\omega \end{aligned} \right.$$

beweisen,[1]) in der s irgend eine Richtung vorstellt, bei der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Fläche ω geschlossen ist.

Ist s einer in $(\xi\,\eta\,\zeta)$ tangentialen Richtung h parallel, so bleibt die Formel auch giltig, wenn man den variabeln Punkt $(x\,y\,z)$ auf der inneren (äusseren) Normalen dem Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ unendlich nähert, und sie zeigt, dass die Randwerte von W an ω bestimmte endliche erste tangentiale Ableitungen haben.[2]) Dasselbe gilt somit auch für

$$W_\omega = \tfrac{1}{2}(W_a + W_i),$$

und es ergiebt sich nach 21):

$$22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_\omega}{\partial h} = \displaystyle\int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial h} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ \qquad - \displaystyle\int_\omega \cos(\nu h) \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega, \end{cases}$$

wobei wir die Werte der Integrale rechts auf der Fläche zu wählen haben; denn diese Werte auf der Fläche sind dem arithmetischen Mittel der beiden Randwerte gleich, weil in einem endlichen Gebiete ω_1 um $(\xi\,\eta\,\zeta)$

$$23)\qquad \cos(\nu h) = r \cdot f, \quad (f \text{ endlich auf } \omega_1)$$

gesetzt werden kann.

Auf diese Formel 22) gründet sich nun der Beweis des Satzes III., dass bei Voraussetzung stetiger erster Ableitungen von $\varkappa$ für zwei Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ der Fläche in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$24)\qquad \left| \frac{\partial W_\omega}{\partial h}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - \frac{\partial W_\omega}{\partial h}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) \right| \overline{\overline{<}}\, b \cdot \sqrt{r_{12}},$$

wo b eine endliche Konstante vorstellt, h eine in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ oder $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ tangentiale Richtung; der einzige Zweifel, der bei dieser Ausdrucksweise noch bleiben könnte, ist der: Wenn

---

[1]) Man vgl. z. B. mein Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 46.

[2]) Man vgl. z. B. mein Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 197, Hilfssatz.

eine bestimmte Richtung h z. B. in $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ tangential ist, so wird h im allgemeinen nicht in $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ tangential sein und umgekehrt, und es könnte dieser Zweifel nicht entstehen, wenn wir die Behauptung 24) in der Form schrieben:

$$24^a)\qquad \left|\frac{\partial W_\omega}{\partial h_2}(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)-\frac{\partial W_\omega}{\partial h_1}(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\right| \overline{\gtrless} b\sqrt{r_{12}}$$

und unter

$$\cos(h_1\,x),\quad \cos(h_1\,y),\quad \cos(h_1\,z);$$
$$\cos(h_2\,x),\quad \cos(h_2\,y),\quad \cos(h_2\,z)$$

die Werte der drei mit stetigen ersten Ableitungen begabten Funktionen:

$$\cos(h\,x),\quad \cos(h\,y),\quad \cos(h\,z)$$

verstehen.

Das ist nun in der Tat der Sinn, in dem die Formel 24) verstanden werden soll, deren Beweis aus 22) nun ganz analog dem Beweise des Satzes I folgt:

Zunächst ist nach Satz I der Beitrag, den

$$\int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial h}\frac{\cos(r\,\nu)}{r^2}\,d\,\omega$$

zu der linken Seite von 24) liefert

$$\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \sqrt{r_{12}},$$

wir haben also nur noch den analogen Beweis für das Integral:

$$25)\qquad I=\int_\omega \cos(\nu h)\left\{\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\frac{\cos(r x)}{r^2}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}\frac{\cos(r y)}{r^2}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\frac{\cos(r z)}{r^2}\right\}d\,\omega$$

zu liefern, dass:

$$26)\qquad |\,I(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)-I(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,| \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \sqrt{r_{12}}$$

bei genügend kleinem r_{12}.

Wir schlagen um den Mittelpunkt 0 der diese beiden Punkte $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ verbindenden Graden eine Kugel von dem Radius

$$P=\sqrt{r_{12}};$$

bei genügend kleinem r_{12} zerlegt die Schnittkurve ς dieser Kugelfläche mit ω diese Fläche ω in einen Teil ω_1, der $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$

und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ enthält und einen Teil $\omega - \omega_1$, und man kann sowohl für $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$, als auch für $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$

$$\int_{\omega_1} \cos(\nu h)\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\} d\omega = \int_{\omega_1} \varphi \frac{d\omega}{r}$$

setzen, wo φ endlich ist, dieses Integral ist für jeden Punkt des Raumes

$$\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \varrho,$$

wenn ϱ die grösste mögliche Entfernung zwischen zwei Punkten von ω_1 ist, also

$$\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst.}^{1)}\, P,$$

$$\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \sqrt{r_{12}}.$$

Der von ω_1 zu der Differenz:

$$|\,I(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - I(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,|$$

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$\text{endl. Konst. } \sqrt{r_{12}}.$$

Wir schlagen jetzt um 0 eine zweite Kugel mit dem Radius β; wir können denselben so wählen, dass derselbe grösser ist, als eine bestimmte, endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Länge, aber dennoch genügend klein so, dass die Schnittkurve σ dieser Kugel mit ω die Fläche $\omega - \omega_1$ in zwei Teile ω_2 und $\omega - \omega_1 - \omega_2$ zerlegt, und dass für je zwei Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(x\,y\,z)$ der Fläche $\omega_1 + \omega_2$:

27) $$\cos(\nu h) = r \cdot f,$$

wenn

r die Entfernung $(\xi\,\eta\,\zeta) - (x\,y\,z)$,

ν die innere Normale in $(\xi\,\eta\,\zeta)$,

h eine tangentiale Richtung in $(x\,y\,z)$

---

[1]) Die hier benützten endlichen Konstanten sind nicht stets dieselben; es kommt uns hier nicht auf ihre Werte, sondern nur auf ihre Eigenschaft der Endlichkeit an.

ist und f eine endliche und integrable Funktion von $(\xi\,\eta\,\zeta)$ vorstellt.

Es ist nun der Beitrag, welchen ω_2 zu der Differenz

$$I(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - I(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

liefert,

$$= \int\limits_s \frac{\partial I_2}{\partial s}\, d\,s,$$

wenn wir:

$$I_2 = \int\limits_{\omega_2} \cos(\nu\,h) \left\{ \frac{\partial\,\varkappa}{\partial\,\xi} \frac{\cos(r\,x)}{r^2} + \frac{\partial\,\varkappa}{\partial\,\eta} \frac{\cos(r\,y)}{r^2} + \frac{\partial\,\varkappa}{\partial\,\zeta} \frac{\cos(r\,z)}{r^2} \right\} d\,\omega$$

setzen und die Integration $\int\limits_s$ über ein Kurvenstück s erstrecken, welches in ω_1 zwischen $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und $(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)$ beliebig verläuft. Dieser Beitrag ist somit mit Rücksicht auf 27)

$$= \int\limits_s \int\limits_{\omega_2} \frac{\Psi}{r^2}\, d\,\omega\, d\,s,$$

wo Ψ auf ω_2 endlich und integrabel ist, somit

$$\overline{\overline{<}} \int\limits_s \frac{\text{endl. Konst.}^{1)}}{\varrho}\, d\,s,$$

wenn ϱ die kleinste Entfernung der Kurve s von einem Punkte des Flächenstückes ω_2 vorstellt. Wir können wieder die Kurve s so wählen,[2] dass jedenfalls:

$$\varrho > \frac{P}{2},$$

$$\int\limits_s d\,s < 2\,r_{12}$$

wird, dann folgt:

Der von ω_2 zu der Differenz:

$$|\,I(\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2) - I(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,|$$

---

[1]) Man vgl. Anm. 1, S. 12.

[2]) Bei genügend kleinem r_{12}.

gelieferte Beitrag ist kleiner als

$$\text{endl. Konst.} \sqrt{r_{12}}.$$

Bedenkt man schliesslich, dass der von $\omega - \omega_1 - \omega_2$ gelieferte Beitrag

$$\overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } r_{12}$$

ist, so sieht man, dass der Satz III nunmehr vollständig bewiesen ist. —

Im besonderen werden bei den Voraussetzungen des Satzes III die Ableitungen:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta},$$

die Ungleichungen 5) erfüllen.

Setzen wir:

28) $$w = \int_\omega W_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

so werden die Ableitungen von w an irgend einer Stelle $(x\,y\,z)$ des Innen- (Aussen-)raumes (vgl. Formel 21) durch die Gleichung:

29) $$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial s} = \displaystyle\int_\omega \left\{ \frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \cos(sx) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \cos(sy) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \cos(sz) \right\} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \\ \qquad - \displaystyle\int_\omega \cos(s\nu) \left\{ \frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega \end{cases}$$

gegeben sein; bei den soeben bewiesenen Eigenschaften von

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta}$$

sind diese Werte $\frac{\partial w}{\partial s}$ im ganzen Innen- (Aussen-)raume eindeutig und stetig, auch wenn man den variabeln Punkt $(x\,y\,z)$ unendlich nahe von innen (aussen) an die Fläche ω heranrücken lässt; für den ersten Ausdruck rechts als Potential einer Doppelbelegung von der Dichte:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \xi} \cos(s\,x) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \eta} \cos(s\,y) + \frac{\partial W_\omega}{\partial \zeta} \cos(s\,z)$$

ist dies bekannt, für den zweiten Ausdruck rechts folgt dasselbe nach einem bekannten Satze von Hölder.[1])

---

[1]) Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie. (Inaug.-Diss. Stuttgart 1882), man vgl. mein Lehrbuch der Potentialtheorie I, S. 392, 394.

Zur Theorie der Spektrallinien II.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 7. Februar.*)

In meiner früheren Arbeit[1]) wurde die vereinfachende Voraussetzung gemacht, dass der schwingende, Licht aussendende Körper (das Atom) eine kugelförmige Gestalt habe. Es war dies notwendig, um einen allgemeinen Überblick über die zu erwartenden Vorgänge zu gewinnen, besonders aber, weil nur bei der Kugel die vollständige mathematische Durchführung möglich schien; überdies lag die Vorstellung nahe, dass alle Atome wie Kugeln behandelt werden könnten. Nachdem aber die bei der Kugel sich für die Wellenlängen der Spektrallinien ergebenden Resultate in mancher Beziehung mit der Erfahrung nahezu in Uebereinstimmung sind, wie sich besonders beim Vergleichen der Spektren verschiedener Elemente ergab, bleibt die Frage zu untersuchen, ob nicht durch eine andere Annahme über die Gestalt der Atome die Übereinstimmung verbessert werden kann.

Im Folgenden wird der im Lichtäther gemäss den Gesetzen der Elastizitätstheorie schwingende Körper als dreiaxiges Ellipsoid vorausgesetzt. Es zeigt sich, dass sich auch für ein solches die mathematische Theorie durchführen lässt (was bisher nicht gelungen war), und dass sich daraus für die Beurteilung der in den Spektren der Elemente auftretenden Serien und vielleicht auch des sogenannten Zehmann-Effektes neue Gesichtspunkte gewinnen lassen.

---

[1]) Sitzungsberichte, Bd. XXXI, Heft 4, 1901, p. 441 ff.

Eingehender sind dann noch die Rotationsellipsoide behandelt; es ergibt sich, dass bei ihnen das Spektrum in eine Haupt-Serie und unendlich viele Neben-Serien zerfällt, die Haupt-Serie aber bei den Sphäroiden nur aus einer Linie oder aus sehr wenigen Linien besteht. Diesen Charakter zeigen nun gerade die Spektren der Elemente aus den beiden ersten Mendelejeffschen Gruppen nach den Untersuchungen von Rydberg, Kayser und Runge. So war es möglich, auf die Spektren der einzelnen Elemente die mathematische Theorie anzuwenden und umgekehrt die Gestalt der Atome dieser Elemente näherungsweise zu bestimmen.

Schliesslich ist noch als Grenzfall ein Sphäroid mit unendlich grosser Abplattung betrachtet; dasselbe führt auf die Balmersche Formel für die Spektrallinien des Wasserstoffs.

Manche der nachfolgenden Entwicklungen haben zunächst noch heuristischen Charakter; aber mehr war bei der Kompliziertheit des Gegenstandes wohl kaum zu erreichen.

§ 16. Einführung der elliptischen Koordinaten.

Die Schwingungen zerlegen wir mit Clebsch in longitudinale und transversale (vgl. § 1); erstere hängen von der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta^2 P = b^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

ab, letztere von der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \varphi. \tag{2}$$

Die Dilatationen im Punkte x, y, z sind dann

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial P}{\partial x} + \quad * \quad + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z} + \quad * \quad + \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} + \quad * \quad , \end{aligned} \tag{3}$$

wenn $\varphi = U$, $\varphi = V$, $\varphi = W$ drei Lösungen der Gleichung (2) bezeichnen. Man setzt dann für periodische Schwingungen

$$P = \sum_n (\Pi_n \operatorname{cosin} n b t + \Pi_n' \sin n b t), \tag{4}$$

$$U = \sum_n (\Omega_n \operatorname{cosin} n a t + \Omega_n' \sin n a t), \tag{5}$$

und analog für V und W, wo nun Π_n und Π_n' der Gleichung

$$\Delta^2 \Pi_n + n^2 \Pi_n = 0 \tag{6}$$

genügen müssen, und ebenso Ω_n, Ω_n' der Gleichung

$$\Delta^2 \Omega_n + n^2 \Omega_n = 0. \tag{7}$$

Sollen die Schwingungen innerhalb und ausserhalb eines durch ein Ellipsoid begrenzten Körpers untersucht werden, so wird man elliptische Koordinaten einführen. Wir setzen also, indem wir uns in der Bezeichnungsweise an Heine[1]) anschliessen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varrho \mu r}{b c}, \\ y &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\ z &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei

$$\infty > \varrho > c > \mu > b > \nu > 0$$

sein soll, so dass die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} - 1 = 0, \tag{9}$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} - 1 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} - 1 = 0 \tag{11}$$

---

[1]) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. 1, p. 352 ff.

bezw. ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid darstellen.

Die Differentialgleichung (7) geht dann bekanntlich über in

$$(12)\quad (\nu^2-\varrho^2)\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \xi^2}-(\varrho^2-\mu^2)\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \eta^2}-(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial \zeta^2} + n^2(\nu^2-\varrho^2)(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)\,\Omega_n=0,$$

wenn noch

$$(13)\quad i\,\xi=\int_b^\mu\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}},\quad \eta=\int_0^\nu\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}},\quad \zeta=\int_c^\varrho\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}}$$

gesetzt wird. Bezeichnet man ferner mit Ξ, H, Z Funktionen, die bezw. nur von ξ, η, ζ abhängen, so wird $\Omega_n=\Xi_n H_n Z_n$ eine partikuläre Lösung der partiellen Gleichung (12), wenn Ξ, H, Z den folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen:[1])

$$(14)\quad \begin{aligned}\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}-\Xi\,(n^2\mu^4+A\mu^2+B)&=0,\\ \frac{d^2 H}{d\eta^2}+H\,(n^2\nu^4+A\nu^2+B)&=0,\\ \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}+Z\,(n^2\varrho^4+A\varrho^2+B)&=0,\end{aligned}$$

wo A und B willkürliche Konstante bezeichnen. Führt man die ursprünglichen elliptischen Koordinaten ein, so werden diese Gleichungen von der Form

$$(15)\quad (\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}+\lambda\,[2\lambda^2-b^2-c^2]\frac{d\Lambda}{d\lambda} + [n^2\lambda^4+A\lambda^2+B]\,\Lambda=0;$$

---

[1]) Vgl. die entsprechenden Rechnungen bei Heine a. a. O., Bd. 2, p. 164 ff. sowie Klein und Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u+k^2u=0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891, p. 133 ff.

und Ξ, H, Z sind Integrale dieser einen Gleichung, in der λ durch μ, ν oder ϱ zu ersetzen ist. Der Übergang zu den Variabeln ξ, η, ζ geschieht durch die Formeln

$$(16)\quad \begin{aligned} \mu &= c \cdot \Delta \operatorname{am}(K - c\,\xi; \varkappa), \quad \nu = b \cdot \sin \operatorname{am}(c\,\eta; \varkappa'), \\ \varrho &= c \cdot \Delta \operatorname{am}(i\,c\,\zeta; \varkappa), \end{aligned}$$

wo $\varkappa^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2}$, $\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2$ den Modul und den komplementären Modul bezeichnen.

§ 17. Die eindeutigen Lösungen der aufgestellten Differentialgleichung.

Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob die in der Differentialgleichung (15) auftretenden Konstanten A und B sich so bestimmen lassen, dass wenigstens eine Lösung der Gleichung eine überall eindeutige Funktion von λ wird. Es ist das dieselbe Aufgabe, welche bei den Funktionen des elliptischen Zylinder auftritt, wo es darauf ankommt, die Konstante $\mathfrak{B}$ in der Gleichung

$$(17)\quad \frac{d^2\,\mathfrak{E}(\varphi)}{d\,\varphi^2} + (\lambda^2 \operatorname{cosin}^2 \varphi - \mathfrak{B})\,\mathfrak{E}(\varphi) = 0$$

so zu wählen, dass eines der beiden partikulären Integrale eine eindeutige periodische Funktion von φ wird. Diese Aufgabe hat bekanntlich Heine gelöst, indem er diejenige transscendente Gleichung aufstellte und untersuchte, welche zwischen den Konstanten λ und $\mathfrak{B}$ bestehen muss, damit eine solche überall eindeutige Lösung möglich ist.

Indem ich (dem Vorgange Hermite's bei der Laméschen Gleichung folgend) von der Gleichung dritter Ordnung ausging, die durch das Produkt der beiden partikulären Integrale von (17) befriedigt wird, habe ich gezeigt,[1]) wie man

[1]) Math. Annalen Bd. 22, 1883. — Die Heineschen Funktionen finden besonders bei dem Probleme der Schwingungen elliptischer Membranen ihre Anwendung, worauf Heine schon kurz hinwies (a. a. O., Bd. II, p. 209). Eingehender ist dasselbe auf meine Veranlassung von

die Heinesche eindeutige Lösung als Grenzfall aus der allgemeinen Lösung, die für beliebige Werte von $\mathfrak{B}$ und λ gültig bleibt, herleiten kann, und zwar durch Anwendung funktionentheoretischer Schlüsse, nicht (wie es bei Heine geschieht) durch rechnerisches Verfahren. Eine analoge Schlussweise lässt sich nun auch auf unsere obige Gleichung (15) anwenden, wodurch dann wenigstens im Prinzipe die Frage nach dem Auftreten eindeutiger Lösungen beantwortet ist; wenn auch die nähere Untersuchung der betreffenden transscendenten Gleichungen noch aussteht.

Durch die Substitution

$$\lambda^2 = b^2 \cdot t \tag{18}$$

geht die Gleichung (15) über in

$$\begin{aligned} t(t-1)(t-\varkappa^2)\frac{d^2 y}{d t^2} + \tfrac{1}{2}[3t^2 - 2(\varkappa^2+1)t + \varkappa^2]\frac{dy}{dt} \\ + [n'^2 t^2 + A' t + B']\, y = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

wo

$$n'^2 = \tfrac{1}{4} n^2 b^2, \quad A' = \tfrac{1}{4} A, \quad B' = \frac{B}{4 b^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{c^2}{b^2}.$$

An der Stelle $t = \infty$ hat das Integral y der Differentialgleichung (19) einen wesentlich singulären Punkt, wenn n^2 von Null verschieden ist; ausserdem treten nur die Punkte $t = 0$, $t = 1$ und $t = \varkappa^2$ als singuläre Punkte auf.

An der Stelle $t = 0$ lautet die Fuchssche determinierende Fundamentalgleichung

$$s(s-1) + \tfrac{1}{2} s = 0.$$

Folglich sind zwei von einander unabhängige partikuläre Integrale durch die Ausdrücke

---

Joh. Schubert in seiner Inaugural-Dissertation (Über die Integration der Differentialgleichung .... für Flächenstücke, die von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden, Königsberg i. P. 1886) behandelt worden. Dies sei als Ergänzung zu den bei Pockels (a. a. O., p. 117, 1891) gemachten Literaturangaben erwähnt, wo überdies gezeigt wird, dass gewisse von Schubert (und bei Parabeln von Weber) gemachte Beschränkungen nicht nötig sind.

$$(20)\qquad \begin{aligned} y_{00} &= a_{00} + a_{01}\, t + a_{02}\, t^2 + \cdots\cdot \\ y_{01} &= \sqrt{t}\,(b_{00} + b_{01}\, t + b_{02}\, t^2 + \cdots) \end{aligned}$$

gegeben; die Reihen konvergieren in dem Kreise, welcher um den Punkt $t = 0$ mit dem Radius Eins geschlagen werden kann.

Für den Punkt $t = 1$ ergibt sich dieselbe determinierende Fundamentalgleichung. Für das Innere eines Kreises mit dem Radius Eins und dem Mittelpunkte $t = 1$ gelten also Entwicklungen der Form

$$(21)\qquad \begin{aligned} y_{10} &= a_{10} + a_{11}(1-t) + a_{12}(1-t)^2 + \cdots \\ y_{11} &= \sqrt{1-t}\,[b_{10} + b_{11}(1-t) + b_{12}(1-t)^2 + \cdots]. \end{aligned}$$

In dem gemeinsamen Gebiete beider Kreise bestehen zwischen den Integralen (20) und (21) Gleichungen der Form

$$(22)\qquad \begin{aligned} y_{10} &= \alpha_0\, y_{00} + \beta_0\, y_{01}, \\ y_{11} &= \gamma_0\, y_{00} + \delta_0\, y_{01}, \end{aligned}$$

wodurch die analytische Fortsetzung der Integrale über das ursprüngliche Konvergenzgebiet hinaus vermittelt wird.

In dem Punkt $t = \varkappa^2$ endlich ergibt sich wieder dieselbe Fundamentalgleichung, so dass auch hier zwei partikuläre Integrale in der Form

$$(23)\qquad \begin{aligned} y_{20} &= a_{20} + a_{21}(\varkappa^2 - t) + a_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots \\ y_{21} &= \sqrt{\varkappa^2 - t}\,[b_{20} + b_{21}(\varkappa^2 - t) + b_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots] \end{aligned}$$

aufgestellt werden können. Die Reihen konvergieren in einem Kreise mit dem Radius $\varkappa^2 - 1$ (es ist ja $\varkappa^2 > 1$) und dem Mittelpunkte $t = \varkappa^2$; dieser Kreis hat mit dem Konvergenzkreise der Reihen (21) ein Gebiet gemein, in dem Gleichungen der Form

$$(24)\qquad \begin{aligned} y_{20} &= \alpha_1\, y_{10} + \beta_1\, y_{11}, \\ y_{21} &= \gamma_1\, y_{10} + \delta_1\, y_{11} \end{aligned}$$

bestehen und die Fortsetzung der einzelnen Reihen vermitteln.

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$(25)\qquad \eta = a\, y_{20}^2 + b\, y_{21}^2,$$

wo a und b Konstante seien; dieselbe bleibt nach (23) unverändert bei einem Umgange um den Punkt $\varkappa^2$. Lassen wir die Variable t einen Umgang um $t = 1$ beschreiben und bezeichnen mit η^* den Wert, den η dabei annimmt, so ist nach (21) und (24)

$$\eta^* = a(\alpha_1 y_{10} - \beta_1 y_{11})^2 + b(\gamma_1 y_{10} - \delta_1 y_{11})^2.$$
$$= a(\alpha_1 y_{10} + \beta_1 y_{11})^2 + b(\gamma_1 y_{10} + \delta_1 y_{11})^2$$
$$- 4(a\alpha_1 \beta_1 + b\gamma_1 \delta_1) y_{10} y_{11}.$$
$$= a y_{20}^2 + b y_{21}^2 - 4(a\alpha_1 \beta_1 + b\gamma_1 \delta_1) y_{10} y_{11}.$$
$$= \eta - 4(a\alpha_1 \beta_1 + b\gamma_1 \delta_1) y_{10} y_{11}.$$

Werden nun die Konstanten a, b so bestimmt, dass sie der Bedingung

$$a\alpha_1 \beta_1 + b\gamma_1 \delta_1 = 0 \tag{26}$$

genügen, so wird $\eta^* = \eta$, d. h. die Funktion η lässt sich so nach Potenzen von $(\varkappa^2 - t)$ entwickeln, dass die Entwicklung in dem ganzen Kreise konvergiert, welcher in $t = \varkappa^2$ seinen Mittelpunkt hat und durch den Punkt $t = 0$ hindurchgeht (also den Punkt $t = 1$ einschliesst).

Insbesondere kann η gleich dem Quadrate eines Integrals y werden; dann muss entweder $a = 0$ oder $b = 0$ sein. Ist $a = 0$, so folgt

$$\gamma_1 = 0 \text{ oder } \delta_1 = 0,$$

ist $b = 0$, so folgt

$$\alpha_1 = 0 \text{ oder } \beta_1 = 0.$$

Im Falle $\gamma_1 = 0$ setzt sich nach (24) die Funktion y_{21} (bis auf einen Faktor) direkt in y_{11} fort, so dass

$$y_{21} = \delta_1 y_{11} = \sqrt{(1-t)(\varkappa^2 - t)}\,[c_{20} + c_{21}(\varkappa^2 - t) + c_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots]. \tag{27}$$

Im Falle $\delta_1 = 0$ setzt sich y_{21} in y_{10} fort, und es wird

$$y_{21} = \gamma_1 y_{10} = \sqrt{\varkappa^2 - t}\,[b_{20} + b_{21}(\varkappa^2 - t) + b_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots]. \tag{28}$$

Im Falle $\alpha_1 = 0$ ergibt sich

(29) $y_{20} = \beta_1 y_{11} = \sqrt{1-t}\,[c'_{20} + c'_{21}(\varkappa^2 - t) + c'_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots]$

und im Falle $\beta_1 = 0$:

(30) $y_{20} = \alpha_1 y_{10} = a_{20} + a_{21}(\varkappa^2 - t) + a_{22}(\varkappa^2 - t)^2 + \cdots.$

Diese Reihen (27), (28), (29) und (30) konvergieren sämtlich in dem Kreise mit dem Radius $\varkappa^2$ und dem Mittelpunkte $t = \varkappa^2$.

In gleicher Weise kann man eine Funktion

(31) $$\eta_1 = a_1 y_{10}^2 + b_1 y_{11}^2$$

bilden, die beim Umgange um $t = 0$ ungeändert bleibt; zu dem Zwecke müssen a_1 und b_1 der Bedingung

(32) $$a_1 \alpha_0 \beta_0 + b_1 \gamma_0 \delta_0 = 0$$

genügen; und diese Funktion (31) wird ein vollständiges Quadrat, wenn a_1 oder b_1 verschwindet, was wieder zu vier Möglichkeiten führt, nämlich:

Wenn $\gamma_0 = 0$ ist, so wird

(33) $y_{11} = \delta_0 y_{01} = \sqrt{t(1-t)}\,[c_{10} + c_{11} t + c_{12} t^2 + \cdots];$

im Falle $\delta_0 = 0$ haben wir

(34) $y_{11} = \gamma_0 y_{00} = \sqrt{1-t}\,[b_{10} + b_{11} t + b_{12} t^2 + \cdots];$

im Falle $\alpha_0 = 0$:

(35) $y_{10} = \beta_0 y_{01} = \sqrt{t}\,[c_{00} + c_{01} t + c_{02} t^2 + \cdots];$

endlich im Falle $\beta_0 = 0$:

(36) $$\begin{aligned} y_{10} = \alpha_0 y_{00} &= a_{10} + a_{11}(1-t) + a_{12}(1-t)^2 + \cdots \\ &= \alpha_0 [a_{00} + a_{01} t + a_{02} t^2 + \cdots]. \end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklungen (33), (34), (35), (36) gelten in einem Kreise mit dem Mittelpunkte $t = 0$ und dem Radius $\varkappa^2$.

Jede der Gleichungen

(37) $$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \delta_0 = 0,$$

(38) $$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \delta_1 = 0$$

gibt eine transscendente Beziehung zwischen den Konstanten A und B, deren Bestehen es ermöglicht, für eines der partikulären Integrale den Konvergenzbereich über die ursprüngliche Grenze hinaus zu erweitern. Insbesondere aber kann es vorkommen, dass eine der Gleichungen (37) mit einer der Gleichungen (38) gleichzeitig erfüllt ist; dann dehnt sich der Konvergenzbereich über die ganze Ebene aus, und das Integral y wird gleich einer ganzen transscendenten Funktion von t oder gleich dem Produkte einer solchen Funktion in einen oder mehrere der Faktoren

$$\sqrt{t}, \quad \sqrt{1-t}, \quad \sqrt{\varkappa^2 - t}.$$

Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 = 0$; die Gleichungen (29) und (35) geben zwei von einander verschiedene partikuläre Integrale;

2) $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; die Gleichungen (30) und (35) gelten gleichzeitig; es wird also

$$(39) \qquad \alpha_1 y_{10} = \alpha_1 \beta_0 y_{01} = y_{20} = \sqrt{t} \cdot g_1(t),$$

wenn $g_1(t)$ eine ganze transscendente Funktion bezeichnet;

3) $\alpha_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; man findet aus (27) und (35) zwei verschiedene partikuläre Integrale;

4) $\alpha_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; es wird nach (28) und (35):

$$(40) \qquad \gamma_1 y_{10} = \gamma_1 \beta_0 y_{01} = y_{21} = \sqrt{t(\varkappa^2 - t)} \cdot g_{13}(t),$$

wenn $g_{13}(t)$ eine ganze transscendente Funktion bedeutet;

5) $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$; (36) und (29) geben zwei verschiedene partikuläre Integrale;

6) $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; aus (36) und (30):

$$(41) \qquad \alpha_1 y_{10} = \alpha_1 \alpha_0 y_{00} = y_{20} = g_0(t);$$

7) $\beta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; zwei verschiedene partikuläre Integrale, dargestellt durch (27) und (36);

8) $\beta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; aus (28) und (36):

(42) $$\gamma_1 y_{10} = \gamma_1 a_0 y_{00} = y_{20} = \sqrt{x^2 - t} \cdot g_3(t);$$

9) $\gamma_0 = 0$, $a_1 = 0$; aus (29) und (33):

(43) $$\beta_1 y_{11} = \beta_1 \delta_0 y_{01} = y_{20} = \sqrt{t(1-t)} \cdot g_{12}(t);$$

10) $\gamma_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; (30) und (33) geben zwei verschiedene partikuläre Integrale;

11) $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; aus (27) und (33):

(44) $$\delta_1 y_{11} = \delta_0 \delta_1 y_{01} = y_{31} = \sqrt{t(1-t)(x^2-t)} \cdot g_{123}(t);$$

12) $\gamma_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; (28) und (33) geben zwei verschiedene partikuläre Integrale;

13) $\delta_0 = 0$, $a_1 = 0$; aus (34) und (29):

(45) $$\beta_1 y_{11} = \beta_1 \gamma_0 y_{00} = y_{20} = \sqrt{1-t} \cdot g_2(t);$$

14) $\delta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$; aus (30) und (34) erhält man zwei verschiedene partikuläre Integrale;

15) $\delta_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$; aus (27) und (34):

(46) $$\delta_1 y_{11} = \gamma_0 \delta_1 y_{00} = y_{21} = \sqrt{(1-t)(x^2-t)} \cdot g_{23}(t);$$

16) $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$; zwei verschiedene partikuläre Integrale aus den Gleichungen (28) und (34).

Es gibt somit acht Möglichkeiten, dargestellt durch die Gleichungen (39) bis (46), in denen sich ein partikuläres Integral der Gleichung (19) durch eine in der ganzen Ebene gültige Formel derart darstellen lässt, dass dies Integral gleich einem der folgenden Ausdrücke wird:

(47) $$g_0(t),\ \sqrt{t}\, g_1(t),\ \sqrt{1-t}\, g_2(t),\ \sqrt{x^2-t}\, g_3(t),$$
$$\sqrt{(1-t)(x^2-t)}\, g_{23}(t),\ \sqrt{x^2-t}\, g_{13}(t),\ \sqrt{t(1-t)}\, g_{12}(t),$$
$$\sqrt{t(1-t)(x^2-t)}\, g_{123}(t),$$

wenn mit g gewisse ganze transscendente Funktionen bezeichnet werden. Jeder dieser acht Fälle ist dadurch charakterisiert, dass zwei von den Gleichungen (37) und (38)

gleichzeitig erfüllt sind, d. h. je zwei transscendente Gleichungen zwischen den gegebenen Konstanten n^2, A und B. Eine weitere Diskussion[1]) dieser Gleichungen in Bezug auf Existenz und Eigenschaften der Wurzeln lassen wir vorläufig beiseite.

§ 18. Entwicklungen nach Produkten $\mathfrak{G}_i(\mu)\,\mathfrak{G}_i(\nu)$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots. 8$ der Reihe nach die (47) aufgeführten acht Funktionen; die Indices n, s beziehen sich auf die verschiedenen Werte von n und A_s und B_s, durch welche sich die Funktionen unterscheiden. Wir lassen der Kürze halber die Indices fort und nennen die eine Funktion $\mathfrak{G}$, die andere $\mathfrak{G}_1$; der Indix i soll beiden gemeinsam sein. Es genüge $\mathfrak{G}$ der ersten Differentialgleichung (13):

$$\text{(48)} \qquad \frac{d^2\,\mathfrak{G}}{d\,\xi^2} = \mathfrak{G}\,(n^2\,\mu^4 + A\,\mu^2 + B).$$

Wir wenden hier das in solchen Fällen übliche Verfahren an, multiplizieren diese Gleichung mit $\mathfrak{G}_1(\mu)$ und integrieren nach ξ zwischen 1 und K', d. h. nach μ zwischen b und c, dann wird

$$\text{(49)} \int_1^{K'} \mathfrak{G}_1(\mu)\,\frac{d^2\,\mathfrak{G}(\mu)}{d\,\xi^2}\,d\,\xi = \int_1^{K'} (n^2\mu^4 + A\mu^2 + B)\,\mathfrak{G}(\mu)\cdot\mathfrak{G}_1(\mu)\,d\xi$$

und nach zweimaliger Anwendung der partiellen Integration auf die linke Seite

$$= \int_1^{K'} \mathfrak{G}(\mu)\,\frac{d^2\,\mathfrak{G}_1(\mu)}{d\,\xi^2}\,d\,\xi + \left[\mathfrak{G}_1(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}(\mu)}{d\,\xi} - \mathfrak{G}(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}_1(\mu)}{d\,\xi}\right]_b^c.$$

Die rechts auftretende eckige Klammer ist

$$\left[\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}\left(\mathfrak{G}_1(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}(\mu)}{d\,\mu} - \mathfrak{G}(\mu)\,\frac{d\,\mathfrak{G}_1(\mu)}{d\,\mu}\right)\right]_b^c,$$

---

[1]) Eine solche wird man mit analogen Methoden durchführen können, wie sie Poincaré für gewisse Fälle angewandt hat: American journal of mathematics, vol. XII, und Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. VIII, 1894.

also gleich Null. Die linke Seite von (49) bleibt somit ungeändert, wenn man $\mathfrak{S}(\mu)$ mit $\mathfrak{S}_1(\mu)$ vertauscht; folglich wird

$$(50)\quad \begin{aligned}(n^2 - n_1^2)\int_K^{K'} \mu^4 \mathfrak{S}(\mu)\mathfrak{S}_1(\mu)\,d\xi + (A - A_1)\int_K^{K'} \mu^2 \mathfrak{S}(\mu)\mathfrak{S}(\mu)\,d\xi \\ + (B - B_1)\int_K^{K'} \mathfrak{S}(\mu)\,\mathfrak{S}_1(\mu)\,d\xi = 0.\end{aligned}$$

Ebenso finden wir aus der zweiten Gleichung (14)

$$(51)\quad \begin{aligned}(n^2 - n_1^2)\int_0^{K'} \nu^4 \mathfrak{S}(\nu)\,\mathfrak{S}_1(\nu)\,d\eta + (A - A_1)\int_0^{K'} \nu^2 \mathfrak{S}(\nu)\,\mathfrak{S}_1(\nu)\,d\eta \\ + (B - B_1)\int_0^{K'} \mathfrak{S}(\nu)\,\mathfrak{S}_1(\nu)\,d\eta = 0.\end{aligned}$$

Ist insbesondere $n = n_1$, so folgt aus (50) und (51)

$$\int_0^{K'} \nu^2\,\mathfrak{S}(\nu)\,\mathfrak{S}_1(\nu)\,d\eta \int_K^{K'} \mathfrak{S}(\mu)\,\mathfrak{S}_1(\mu)\,d\xi$$

$$= \int_0^{K'} \mathfrak{S}(\nu)\,\mathfrak{S}_1(\nu)\,d\eta \int_K^{K'} \mu^2\,\mathfrak{S}(\mu)\,\mathfrak{S}_1(\mu)\,d\xi$$

oder

$$(52)\quad \int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\,\mathfrak{S}(\mu)\,\mathfrak{S}_1(\mu)\,\mathfrak{S}(\nu)\,\mathfrak{S}_1(\nu)\,d\xi = 0,$$

wo nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ sich auf dieselbe Zahl n, aber auf verschiedene Werte von A und B beziehen; die Gleichung gilt nicht mehr für $A = A_1$ und $B = B_1$, denn dann enthält die linke Seite neben dem Faktor $\mu^2 - \nu^2$, der stets positiv ist, das vollständige Quadrat $[\mathfrak{S}(\mu) \cdot \mathfrak{S}(\nu)]^2$, welches auch positiv ist, es sei denn, dass A und B komplexe Werte haben. In letzterem Falle aber könnte man $\mathfrak{S}_1(\mu)$ gleich der zu $\mathfrak{S}(\mu)$ konjugiert imaginären Funktion setzen, und es würde sich aus (52) eine Gleichung der Form

$$\int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)(p^2 + q^2)\,d\xi\,d\eta = 0$$

ergeben; und eine solche kann nicht bestehen, da bei der

Integration stets $\mu^2 > \nu^2$ ist. So ergibt sich beiläufig, dass nur *reelle* Werte von A und B den im vorigen Paragraphen erwähnten transscendenten Gleichungen genügen können, wenn n^2 reell ist.

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$T_2 = \int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, \mathfrak{S}(\mu)\, \mathfrak{S}(\nu)\, \mathfrak{S}_1(\mu)\, \mathfrak{S}_1(\nu)\, d\xi,$$

$$T_4 = \int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^4 - \nu^4)\, \mathfrak{S}(\mu)\, \mathfrak{S}(\nu)\, \mathfrak{S}_1(\mu)\, \mathfrak{S}_1(\nu)\, d\xi,$$

$$T_6 = \int_0^{K'} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, \mu^2 \nu^2\, \mathfrak{S}(\mu)\, \mathfrak{S}(\nu)\, \mathfrak{S}_1(\mu)\, \mathfrak{S}_1(\nu)\, d\xi,$$

so leitet man aus (50) und (51) leicht die drei Gleichungen ab

$$(53) \qquad \begin{aligned} (n^2 - n_1^2)\, T_4 + (A - A_1)\, T_2 &= 0, \\ (n^2 - n_1^2)\, T_6 - (B - B_1)\, T_2 &= 0, \\ (A - A_1)\, T_6 + (B - B_1)\, T_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die aufgestellten Relationen wird man benutzen, um gegebene Funktionen von μ und ν nach Produkten $\mathfrak{S}(\mu)\, \mathfrak{S}(\nu)$ zu entwickeln; insbesondere ist für den Fall $n = n_1$ die Relation (52) wichtig. Sei in diesem Falle

$$(54) \qquad f(\mu, \nu) = \sum_s \Gamma_{is}^{(n)}\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu),$$

wo also alle rechts vorkommenden Funktionen $\mathfrak{S}$ sich auf dieselbe Zahl n beziehen; und je nach Wahl des Index i bestehen acht solche Gleichungen. Wir multiplizieren beiderseits mit $\mathfrak{S}_{it}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{it}^{(n)}(\nu)\, (\mu^2 - \nu^2)$ und integrieren nach ξ und η, so ergibt sich aus (52):

$$(55) \qquad \begin{aligned} &\Gamma_{it}^{(n)} \cdot \int_0^{K} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2) \left[\mathfrak{S}_{it}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{it}^{(n)}(\nu)\right]^2 d\xi \\ &= \int_0^{K} d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, f(\mu, \nu)\, \mathfrak{S}_{it}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{it}^{(n)}(\nu)\, d\xi. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man eine Konstante, z. B. die Einheit nach der Formel (54) entwickeln; dann wird

$$1 = \sum_s \gamma_{is}^{(n)}\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu), \tag{56}$$

wenn γ_{is} durch die Bedingung

$$\begin{aligned} \gamma_{is}^{(n)} \cdot \int_0^K d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, [\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)]^2\, d\xi \\ = \int_0^K d\eta \int_K^{K'} (\mu^2 - \nu^2)\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)\, d\xi \end{aligned} \tag{57}$$

bestimmt wird; es bestehen wieder acht verschiedene Gleichungen von der Form (56).

Für das Folgende ist noch die Aufgabe wichtig, die Reihen

$$\Sigma A_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{S}_{is}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}(\nu) \quad \text{und} \quad \Sigma B_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{S}_{is}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}(\nu) \tag{58}$$

durch diejenige Funktion $f(\mu, \nu)$ zu bestimmen, welche durch die Relation (54) dargestellt ist.

Wie man mittelst der ersten beiden Gleichungen (14) leicht bestätigt, genügt jedes Produkt

$$Z = \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)$$

den drei partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\nu^4 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \mu^4 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - Z[A_{is}\mu^2\nu^2(\nu^2 - \mu^2) + B_{is}(\nu^4 - \mu^4)] = 0, \\ &\nu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - Z[n^2\mu^2\nu^2(\mu^2 - \nu^2) + B_{is}(\nu^2 - \mu^2)] = 0, \\ &\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - Z[n^2(\mu^4 - \nu^4) + A_{is}(\mu^2 - \nu^2)] = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Multiplizieren wir die zweite und dritte Gleichung mit Γ_{is} und summieren nach s, so folgt mit Rüchsicht auf (54):

$$\begin{aligned} \nu^2 \frac{\partial^2 f(\mu, \nu)}{\partial \xi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 f(\mu, \nu)}{\partial \eta^2} = n^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \nu^2) \cdot f(\mu, \nu) \\ - (\mu^2 - \nu^2) \sum_s B_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{S}_{is}(\mu)\, \mathfrak{S}_{is}(\nu) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \eta^2} = n^2 (\mu^4 - \nu^4) f(\mu,\nu)$$
$$+ (\mu^2 - \nu^2) \sum_s A_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu),$$

womit die gestellte Aufgabe erledigt ist, die Werte der Reihen (58) zu bestimmen. Zwischen den beiden Reihen besteht die aus (59) folgende Relation:

$$\nu^4 \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \xi^2} + \mu^4 \frac{\partial^2 f(\mu,\nu)}{\partial \eta^2} = \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - \mu^2) \Sigma A_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu)$$
$$+ (\nu^4 - \mu^4) \Sigma B_{is} \Gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu).$$

Ist insbesondere $f(\mu,\nu) = 1$, also $\Gamma_{is} = \gamma_{is}$, so gehen die aufgestellten Relationen in die folgenden über

$$(60) \qquad \begin{aligned} \sum_s B_{is} \gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu) &= n^2 \cdot \mu^2 \nu^2, \\ \sum_s A_{is} \gamma_{is} \mathfrak{G}_{is}(\mu) \mathfrak{G}_{is}(\nu) &= - n^2 (\mu^2 + \nu^2), \end{aligned}$$

wobei alle links stehenden Ausdrücke sich auf denselben Index n beziehen, und die Koëffizienten $\gamma_{is}^{(n)}$ durch (57) definiert sind. Für $i = 1, 2, 3, \ldots 8$ erhält man acht Paare solcher Gleichungen.

§ 19. Elastische Schwingungen eines im Lichtäther ruhenden Ellipsoids.

Um die Elongationen elastischer transversaler Schwingungen analytisch darzustellen, bedienen wir uns der Formeln (3); es genügt für uns, eine der drei Funktionen U, V, W zu betrachten, welche durch (5) und (7) definiert sind; wir erhalten

$$(61) \qquad U = \sum_n \sum_s \sum_{i=1}^{8}$$
$$(A_{i,n,s} \operatorname{cosin} n_i a t + B_{i,n,s} \sin n_i a t) \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu) \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu) \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho).$$

Hier bedeutet a die Elastizitäts-Konstante für das Innere des Ellipsoids; mit $A_{i,n,s}$ und $B_{i,n,s}$ sind konstante Koëffizienten bezeichnet; die Zahl n_i bestimmt die Schwingungsdauer des

einzelnen Gliedes und ist durch weitere Grenzbedingungen noch festzulegen. Mit

$$\mathfrak{G}_1(\lambda), \quad \mathfrak{G}_2(\lambda), \ \ldots \ldots \ \mathfrak{G}_8(\lambda)$$

sind, wie oben, der Reihe nach die in (47) angegebenen Funktionen bezeichnet, welche im Innern des Ellipsoids eindeutig und endlich bleiben. Jede dieser Funktionen hängt noch von der Zahl n ab und ausserdem von zwei Konstanten A, B, die als zusammengehörige Wurzeln zweier transscendenter Gleichungen nach § 17 bestimmt werden; zu jedem Index $i (= 1,2,3, \ldots 8)$ gehören also bei gegebenem n noch unendlich viele Funktionen $\mathfrak{G}_i$, die in (61) durch den Index s von einander unterschieden sind, während der obere Index n sich auf die Zahl n bezieht, von der Schwingungsdauer und Wellenlänge abhängen und welche selbst noch wieder vom Index i abhängt, wie die späteren Grenzbedingungen verlangen werden; es ist also nach (19)

$$(62) \qquad \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\lambda) = F_i\left(\frac{\lambda^2}{b^2}; \frac{c^2}{b^2}, n^2 b^4, A_s b^2, B_s\right),$$

wobei der Index i angibt, welche von den acht Funktionen (47) gewählt ist.

Sollen sich nun diese elastischen Schwingungen ausserhalb des Ellipsoids in den Lichtäther fortsetzen, so gilt für das Äussere eine ganz analoge Formel. Es werde durch die Gleichung

$$(63) \qquad \varrho = \varrho_0$$

die Oberfläche des betrachteten Ellipsoids, entsprechend Gleichung (9), dargestellt. Ausserhalb desselben ist dann immer $\varrho > \varrho_0$; hier kommen also die kritischen Werte b und c für ϱ nicht in Betracht; es braucht daher hier die zu benutzende Lösung der Differentialgleichung (15) nicht für alle Werte von ϱ eindeutig zu sein; wohl aber muss letztere Bedingung auch jetzt für die Variabeln μ und ν, d. h. für die Funktionen $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)$ und $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu)$ erfüllt sein. Die Konstanten A_s und B_s sind daher an dieselben Gleichungen gebunden, wie früher;

nur ist zu beachten, dass jetzt der Elastizitäts-Konstante a^2 ein anderer Wert a_1^2 zukommt. Neben der Funktion $\mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho)$ kann aber im Äussern auch das zweite Integral $\mathfrak{H}_{i,s}^{(n)}(\varrho)$ auftreten, das in bekannter Weise aus $\mathfrak{G}$ gewonnen wird nach der Formel:

$$(64)\qquad \mathfrak{H}_{i,s}^{(n)}(\varrho) = C \cdot \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho) \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\lambda}{[\mathfrak{G}(\varrho)]^2 \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}},$$

wo C eine zunächst unbestimmte Konstante bedeutet.

Ausserhalb des Ellipsoids $\varrho = \varrho_0$ ist demnach die Funktion U zu ersetzen durch die Funktion

$$(65)\qquad \begin{aligned} U_1 = \sum_n \sum_s \sum_{i=1}^{8} & (A'_{i,n,s} \cdot \cos n_{1i} a_1 t + B'_{i,n,s} \sin n_{1i} a_1 t)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\varrho) \\ + \sum_n \sum_s \sum_{i=1}^{8} & (C_{i,n,s} \cos n_{1i} a_1 t + D_{i,n,s} \sin n_{1i} a_1 t)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\mu)\, \mathfrak{G}_{i,s}^{(n)}(\nu)\, \mathfrak{H}_{i,s}^{(n)}(\varrho). \end{aligned}$$

Die hier vorkommenden Funktionen $\mathfrak{G}(\mu)$, $\mathfrak{G}(\nu)$, $\mathfrak{G}(\varrho)$, $\mathfrak{H}(\varrho)$ wären eigentlich zur Unterscheidung von den früheren mit einem Index 1 zu versehen, da die Konstante a jetzt durch a_1 ersetzt ist; im Folgenden sollen diese Funktionen mit $\mathfrak{G}_{1is}$ bezw. $\mathfrak{H}_{1is}$ bezeichnet werden, wo eine genauere Unterscheidung nötig wird.

§ 20. Einführung der Grenzbedingungen.

Soll an der Oberfläche des Ellipsoids weder für die Dilatationen noch für die Druckkraft eine Unstetigkeit eintreten, so müssen Dilatationen und Kräfte an der inneren und der äusseren Seite der Oberfläche des Ellipsoids übereinstimmen.

Beschränken wir uns auf die Funktion U, so sind die Dilatationen nach (3)

$$(66)\qquad u = 0, \quad v = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y};$$

es müssen also die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U_1}{\partial z} \tag{67}$$

für jeden Punkt der Oberfläche $\varrho = \varrho_0$ erfüllt sein.

In Folge der Schwingungen im Innern des Ellipsoids wirken auf jedes Oberflächenelement Druckkräfte, die in drei Komponenten N_ϱ, N_μ, N_ν zerlegt werden sollen, welche in Richtung der Kurven gemessen werden mögen, in denen sich die durch den betreffenden Punkt gehenden confocalen Flächen schneiden. Es wirkt also N_ϱ senkrecht zur Oberfläche des Ellipsoids, N_μ und N_ν in Richtung der durch den Punkt gehenden Krümmungslinien. Diese Komponenten sind durch folgende Formeln gegeben[1]):

$$\begin{aligned} N_\varrho &= 2a^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\nu}\cos(\mu,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\mu}\cos(\nu,x)\right], \\ N_\mu &= a^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\nu}\operatorname{cosin}(\varrho,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial\mu\,\partial\nu}\operatorname{cosin}(\mu,x)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\mu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\varrho^2}\right)\operatorname{cosin}(\nu,x)\right], \\ N_\nu &= a^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho\,\partial\mu}\operatorname{cosin}(\varrho,x) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\nu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\varrho^2}\right)\operatorname{cosin}(\mu,x)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial^2 U}{\partial\mu\,\partial\nu}\operatorname{cosin}(\nu,x)\right]. \end{aligned} \tag{68}$$

Entsprechende Ausdrücke hat man für die Funktion U_1 und die Konstante a_1 aufzustellen; nennen wir sie N'_ϱ, N'_μ, N'_ν, so müssen die Gleichungen

$$N_\varrho = N'_\varrho, \quad N_\mu = N'_\mu, \quad N_\nu = N'_\nu \tag{69}$$

an der Fläche $\varrho = \varrho_0$ bestehen.

Den fünf Bedingungen (67) und (69) kann man auf folgende Weise genügen. Man setze

---

[1]) Vergl. Henneberg: Annali di matematica Serie II, t. 9.

$$U = \sum_n \sum_i (\mathfrak{B}_{ni} \operatorname{cosin} n_i a t + \mathfrak{W}_{ni} \sin n_i a t),$$
(70)
$$U_1 = \sum_{n_1} \sum_i (\mathfrak{B}'_{ni} \operatorname{cosin} n_{1i} a_1 t + \mathfrak{W}'_{ni} \sin n_{1i} a_1 t).$$

In erster Linie muss natürlich

(71) $$n_i a = n_{1i} a_1$$

sein. Ferner sei für $\varrho = \varrho_0$:

(72) $$\mathfrak{B}_{ni} = C_{ni}, \quad \mathfrak{W}_{ni} = D_{ni}, \quad \mathfrak{B}'_{ni} = C'_{ni}, \quad \mathfrak{W}'_{ni} = D'_{ni},$$

wo C_{ni}, D_{ni}, C'_{ni}, D'_{ni} Konstante bezeichnen. Dann ist für $\varrho = \varrho_0$:

(73)
$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \nu} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \nu} = 0,$$

wodurch die Gleichungen (67) sich auf die Bedingungen

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho} \quad \text{für } \varrho = \varrho_0$$

reduzieren, die wir durch die Forderung

(74) $$\frac{\partial \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho} = 0 \text{ für } \varrho = \varrho_0$$

befriedigen. In den Komponenten (68) sind dann auch die Glieder

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \, \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \, \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}$$

einzeln gleich Null an der Oberfläche; es ist also $N_\varrho = 0$ und $N'_\varrho = 0$ für $\varrho = \varrho_0$, und die Gleichungen (69) reduzieren sich auf

(75)
$$a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \varrho^2},$$
$$a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho^2},$$

welche für $\varrho = \varrho_0$ bestehen müssen. Die Gleichungen (73) und (74) sagen aus, dass jeder Punkt der Oberfläche unseres Ellipsoids bei den betrachteten Schwingungen in Ruhe bleibt und dass die senkrecht zur Oberfläche wirkenden Druckkomponenten gleich Null sind (wegen $N_\varrho = 0$, $N'_\varrho = 0$).

Um die Gleichungen (72) zu befriedigen, hat man die in (61) aufgestellte Entwicklung anzuwenden; man findet dann

$$(76) \qquad \frac{\mathfrak{V}_{ni}}{C_{ni}} = \frac{\mathfrak{W}_{ni}}{D_{ni}} = \sum_s c_{is}^{(n)}\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu) \cdot \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu) \cdot \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho),$$

wo der Koëffizient c_{is} durch die Gleichung

$$(77) \qquad c_{is}^{(n)}\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho_0) = \gamma_{is}^{(n)}$$

bestimmt wird, wenn $\gamma_{is}^{(n)}$ durch (57) definiert wird.

Die ersten beiden Gleichungen (74) werden durch die Bedingung

$$(78) \qquad \left(\frac{d\, \mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho)}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} = 0$$

befriedigt, welche die bisher noch fehlende Bestimmung der Zahlen n gibt, über die in (61) und (70) summiert wurde. Diese transscendente Gleichung zwischen den Grössen n, A_s und B_s definiert diese Konstanten zusammen mit den in § 17 besprochenen beiden transscendenten Gleichungen vollständig. Nach (71) ist dann auch n_1 bestimmt.

Für die nach (65) in U_1 auftretenden Konstanten A', B', C, D sollen die Gleichungen

$$(79) \qquad \begin{aligned} A'_{ins} \frac{d\, \mathfrak{S}_{1is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} + C_{ins} \frac{d\, \mathfrak{H}_{1is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} &= 0 \\ B'_{ins} \frac{d\, \mathfrak{S}_{1is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} + D_{ins} \frac{d\, \mathfrak{H}_{1is}^{(n)}(\varrho_0)}{d\varrho_0} &= 0 \end{aligned}$$

gültig sein; infolge derselben können wir setzen:

$$(80)\quad \begin{aligned} A'_{ins} &= \frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,a_{ins}, & C_{ins} &= -\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,a_{ins}, \\ B'_{ins} &= \frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,b_{ins}, & D_{ins} &= -\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\,b_{ins}. \end{aligned}$$

Es werden dann in (70) für $\mathfrak{V}'_{ni}$ und $\mathfrak{W}'_{ni}$ folgende Ausdrücke einzuführen sein:

$$(81)\quad \begin{aligned} \mathfrak{V}'_{in} &= \sum_s \left[\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0} - \mathfrak{H}^{(n)}_{is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\right] a_{ins}\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\mu)\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\nu), \\ \mathfrak{W}'_{in} &= \sum_s \left[\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0} - \mathfrak{H}^{(n)}_{is}(\varrho)\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\,\varrho_0}\right] b_{ins}\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\mu)\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\nu). \end{aligned}$$

Hiermit sind auch die dritte und vierte Gleichung des Systems (74) erfüllt.

Um auch die zweite Hälfte der Gleichungen (73) zu befriedigen, richten wir es so ein, dass $\mathfrak{V}'_{in}$ und $\mathfrak{W}'_{in}$ für $\varrho = \varrho_0$ gleich Konstanten C'_{in} bezw. D'_{in} werden. Zu dem Zwecke setzen wir

$$(82)\quad \begin{aligned} \mathfrak{K}^{(n)}_{is}(\varrho_0)\,a_{isn} &= C'_{in}\cdot\gamma^{(n)}_{1is}, \\ \mathfrak{K}^{(n)}_{is}(\varrho_0)\,b_{isn} &= D'_{in}\cdot\gamma^{(n)}_{1is}, \end{aligned}$$

wenn $\gamma^{(n)}_{1is}$ eine zu den Funktionen $\mathfrak{G}_{1is}$ in derselben Weise zugehörige Konstante bezeichnet, wie $\gamma^{(n)}_{is}$ zu $\mathfrak{G}_{is}$ gehört, so dass also nach (56):

$$(82^a)\quad 1 = \sum_s \gamma^{(n)}_{1is}\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\mu)\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\nu),$$

und wo $\mathfrak{K}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{K}^{(n)}_{is}(\varrho) = \mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)\left(\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho)}{d\,\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} - \mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho)\left(\frac{d\,\mathfrak{G}^{(n)}_{1is}(\varrho)}{d\,\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0}$$

definiert wird.

Um endlich auch den Bedingungen (75) zu genügen, bedienen wir uns der Differentialgleichung (15), welcher die Funktionen $\mathfrak{G}$ genügen. Es wird nämlich:

$$(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho^2}$$
$$= - C_{ni}\,\varrho\,(2\varrho^2-b^2-c^2)\sum_s c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)\,\frac{d\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho)}{d\varrho}$$
$$- C_{ni}\,n^2\varrho^4\sum_s c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho)$$
$$- C_{ni}\,\varrho^2\sum_s A_{is}^{(n)}c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho)$$
$$- C_{ni}\sum_s B_{is}^{(n)}c_{is}^{(n)}\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\mu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\nu)\,\mathfrak{S}_{is}^{(n)}(\varrho),$$

also für $\varrho=\varrho_0$ unter Benutzung von (76), (77), (78) und (60)

$$(\varrho_0^2-b^2)(\varrho_0^2-c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - C_{ni}\,n_i^2(\varrho_0^2-\mu^2)(\varrho_0^2-\nu^2).$$

Ebenso findet man

$$(\varrho_0^2-b^2)(\varrho_0^2-c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - D_{ni}\,n_i^2(\varrho_0^2-\mu^2)(\varrho_0^2-\nu^2),$$

ferner, wenn alle Funktionen mit dem Index 1 versehen und die Gleichungen (80), (81), (82), (82[a]) angewandt werden:

$$(\varrho_0^2-b^2)(\varrho_0^2-c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}'_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - C'_{ni}\,n_{1i}^2(\varrho_0^2-\mu^2)(\varrho_0^2-\nu^2),$$

$$(\varrho_0^2-b^2)(\varrho_0^2-c^2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}'_{ni}}{\partial \varrho^2}\right)_{\varrho=\varrho_0} = - D'_{ni}\,n_{1i}^2(\varrho_0^2-\mu^2)(\varrho_0^2-\nu^2).$$

Da $a^2 n_i^2$ nach (71) gleich $a_1^2 n_{1i}^2$ ist, so sind die Gleichungen (75) erfüllt, sobald nur die Bedingungen

(83) $$C_{ni}=C'_{ni},\quad D_{ni}=D'_{ni}$$

bestehen.

Um alle Grenzbedingungen zu befriedigen, hat man schliesslich in folgender Weise zu verfahren:

Zuerst kombiniere man die transscendente Gleichung (78) mit einem der acht Paare von Gleichungen, welche nach § 17 die eindeutigen Lösungen der Differentialgleichungen (14)

definieren; man bestimmt dadurch zusammengehörige Werte der Zahlen-Tripel

$$n_i, \quad A_{is}, \quad B_{is}.$$

Solche Wurzeln n_i können in endlicher oder unendlicher Zahl vorhanden sein; das bedarf noch näherer Untersuchung, die wir unten in § 24 wenigstens an besonderen Fällen anstellen werden. Zu jedem Werte von n_i gehören Paare von Werten A_{is} und B_{is}; wir haben vorausgesetzt, dass solche Paare (analog wie in dem entsprechenden Probleme bei den Funktionen des elliptischen Zylinders) für jedes n_i in unendlicher Anzahl existieren, denn andernfalls wären die am Schlusse von § 18 aufgestellten Reihenentwicklungen nicht möglich. Die wirkliche Durchführung dieser Entwicklungen bedarf übrigens, wie bei den meisten derartigen Problemen der mathematischen Physik, einer genaueren Diskussion. Aus den Zahlen n_i bestimmen sich nach (71) die Zahlen n_{1i}, dann nach § 17 die Zahlen A_{1is}, B_{1is}; die Koëffizienten der auftretenden Reihen sind durch (77) und (80) gegeben, und endlich die noch unbestimmt gebliebenen Faktoren C und D durch (83). Schliesslich bleibt für jede Zahl n_i, d. h. für jede auftretende Schwingungsdauer nur die eine Konstante C_{ni}, bezw. D_{ni} noch willkürlich, d. i. die Intensität der betreffenden Schwingungen. Um auch diese festzulegen müsste man bestimmte Voraussetzungen über den Zustand im Innern des Ellipsoids zur Zeit $t = 0$ machen.

Es scheint als ob den Grenzbedingungen (67) und (69) nur durch die hier angegebenen Schwingungs-Zustände genügt werden könnte; zum genaueren Beweise der Eindeutigkeit wird man das bekannte Verfahren anwenden können.

§ 21. Unterscheidung des vom Ellipsoide ausgesandten und des absorbierten Lichtes.

Bei Behandlung der Wirkungen einer elastischen Schwingung einer Kugel auf den Lichtäther (§ 4 meiner früheren Arbeit) habe ich angenommen, dass die in der Kugel (etwa

durch Stösse gegen andere Kugeln) entstandenen Schwingungen sich auf den Lichtäther gemäss den Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie übertragen, und sich nach allen Richtungen hin nach aussen radial fortpflanzen. Dem entsprechend verlangten wir, dass in die mathematische Darstellung die Zeit t nur in der Form $r - a_1 t$, nicht in der Form $r + a_1 t$ eingehe. Diesem Verlangen konnten wir nachkommen, da unsere Funktion U_1 sich damals in der Form

$$(84)\quad \begin{aligned} U_1 &= \sum_n [E_n \cos n_1 a_1 t + F_n \sin n_1 a_1 t] \frac{\sin n_1 r}{r} \\ &+ \sum_n [E'_n \cos n_1 a_1 t + F'_n \sin n_1 a_1 t] \frac{\cos n_1 r}{r} \end{aligned}$$

darstellte, wo mit r die Entfernung vom Anfangspunkte, mit E_n, F_n, E'_n, F'_n Konstante bezeichnet sind; wir brauchten daher nur

$$E'_n = F_n, \quad F'_n = -E_n$$

anzunehmen.

Beim Ellipsoide tritt die elliptische Koordinate ϱ an Stelle der Entfernung r; die Funktionen $\mathfrak{S}(\varrho)$ lassen sich nicht in gleich einfacher Weise mit $\cos n_1 a_1 t$ und $\sin n_1 a_1 t$ vereinigen; deshalb ist ein analoges Verfahren nicht angezeigt. Es genügt aber auch, dass für unendlich grosse Werte von ϱ, wo dann ϱ mit r wesentlich identisch ist, eine entsprechende Darstellung zu ermöglichen, und das ist durchführbar, wenn man zuvor die asymptotischen Werte der Funktionen $\mathfrak{S}(\varrho)$ berechnet.

Zu dem Zwecke transformieren wir die Differentialgleichung (19) mittelst der Substitution

$$t = \tau^{-1},$$

und erhalten:

$$\tau(1-\tau)(1-\varkappa^2\tau)\frac{d^2y}{d\tau^2} + \tfrac{1}{2}[1 - 2\tau(1+\varkappa^2) + 3\varkappa^2\tau^2]\frac{dy}{d\tau} + \left[\frac{n'^2}{\tau^2} + \frac{A'}{\tau} + B'\right] y = 0.$$

Für kleine Werte von τ dürfen wir statt dessen die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{1}{2\tau}\frac{dy}{d\tau} + \frac{n'^2}{\tau^3} y = 0$$

benutzen, aus welcher wir durch die Substitution

$$\tau = u^{-2} = t^{-1}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{2}{u}\frac{dy}{du} + 4 n'^2 y = 0$$

finden. Die partikulären Fundamentalintegrale der letztern sind bekanntlich durch die Ausdrücke

$$\frac{\sin(2 n' u)}{u} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{cosin}(2 n' u)}{u}$$

gegeben. Für unendlich grosse Werte des Arguments verhalten sich daher die Integrale der Differentialgleichung (19) bezw. (15) wie die Funktionen

$$\frac{\sin(2 n' \sqrt{t})}{\sqrt{t}} = b\,\frac{\sin(n\lambda)}{\lambda}$$

und

$$\frac{\operatorname{cosin}(2 n' \sqrt{t})}{\sqrt{t}} = b\,\frac{\operatorname{cosin}(n\lambda)}{\lambda}.$$

Für hinreichend grosse Werte von ϱ verhalten sich somit die Glieder der in (65) auftretenden Funktion U_1 wie die Glieder der entsprechenden Funktion U_1 in (84), welche bei der Kugel auftrat. Sollen für unendlich grosse Werte von ϱ nur Funktionen von $\varrho - a_1 t$ auftreten, müssen wir demnach in (79)

$$C_{ins} = B'_{ins}, \quad D_{ins} = - A'_{ins}$$

wählen. Dann aber bleiben die Gleichungen (80) nur mit einander verträglich, wenn die Bedingung

$$(85) \qquad \left(\frac{d\,\mathfrak{S}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\varrho_0}\right)^2 + \left(\frac{d\,\mathfrak{H}^{(n)}_{1is}(\varrho_0)}{d\varrho_0}\right)^2 = 0$$

erfüllt ist. Dies wäre eine vierte Bedingung für die Konstanten n_{1i}, A_{1is}, B_{1is}, welcher man nur bei ganz besonderen Werten der übrigen Konstanten nämlich

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2, \quad \left(\frac{\varrho_0}{b}\right)^2, \quad \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

wird genügen können. Damit also elastische Schwingungen der hier betrachteten Art möglich werden, müsste eine besondere Relation zwischen dem Verhältnisse der beiden Elastizitätskonstanten (des Ellipsoids und des Lichtäthers) und den Verhältnissen der Hauptaxen des Ellipsoids erfüllt seien. Die Wurzeln der Gleichung (85) sind dann natürlich komplexe Zahlen.

Bei dem in § 20 betrachteten Schwingungs-Zustande des Ellipsoids und des umgebenden Lichtäthers treten aber gleichzeitig Funktionen von $r - a_1 t$ und Funktionen von $r + a_1 t$ auf. Das Ellipsoid sendet also nach allen Richtungen Strahlen bestimmter Wellenlänge aus, und empfängt solche gleicher Wellenlänge zugleich aus allen Richtungen. Ein solches Verhalten des Ellipsoids ist immer notwendig, wenn es in der Tat keine andere als die in § 20 aufgestellte Möglichkeit gibt, den Grenzbedingungen zu genügen.

Als Ergänzung zum § 4 sei hier erwähnt, dass sich die damals aufgestellte transscendente Gleichung nicht ändert, wenn man $r + a_1 t$ an Stelle von $r - a_1 t$ setzt. Die bei allseitiger Symmetrie von einer leuchtenden materiellen Kugel ausgesandten Lichtstrahlen haben also dieselben Wellenlängen, wie die unter gleicher Bedingung von der Kugel empfangenen (und absorbierten) Strahlen.

§ 22. Das verlängerte Rotationsellipsoid.

An Stelle der elliptischen Koordinaten treten beim Rotationsellipsoide Koordinaten r, ψ, ϑ, welche durch die Gleichungen

$$(86)\quad \begin{aligned} x &= h\,r\cos\vartheta, & 0<\vartheta<\pi,\\ y &= h\sqrt{r^2-1}\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\psi, & 0<\psi<2\pi,\\ z &= h\sqrt{r^2-1}\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\psi, & r>1, \end{aligned}$$

eingeführt werden; hierbei fällt die X-Axe mit der Rotations-Axe zusammen; h bedeutet die geometrische Exzentrizität der Meridianellipse; und die Gleichung des Ellipsoids ist

$$(87)\quad \frac{x^2}{h^2 r^2}+\frac{y^2+z^2}{h^2(r^2-1)}=1.$$

An Stelle der partiellen Differentialgleichung (12) erhalten wir hier[1]):

$$(88)\quad \begin{aligned} &(r^2-\cos^2\vartheta)\frac{n^2}{h^2}\Omega_n+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Omega_n}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Omega_n}{\partial\psi^2}\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial r}\left[(r^2-1)\frac{\partial\Omega_n}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2-1}\frac{\partial^2\Omega_n}{\partial\psi^2}=0. \end{aligned}$$

Setzen wir wieder

$$(89)\quad \Omega_n = R\cdot\Theta\cdot\Psi,$$

wo R nur von r, Θ nur von ϑ, Ψ nur von ψ abhängen soll, so ergibt sich

$$(90)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left[(r^2-1)\frac{\partial R}{\partial r}\right]+\frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right)\\ &\quad+\frac{1}{\Psi}\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}+\frac{1}{r^2-1}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\psi^2}+\frac{n^2}{h^2}(r^2-\cos^2\vartheta)=0. \end{aligned}$$

Da nun Ω eine periodische Funktion von ψ sein muss, so können wir

$$\Psi = \text{cosin}\, m\psi \quad\text{oder}\quad \Psi=\sin m\psi$$

setzen, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet; es wird dann

$$(91)\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial\psi^2}=-m^2\Psi,$$

und unsere partielle Differentialgleichung zerlegt sich in die beiden:

---

[1]) Vergl. z. B. Heine a. a. O., Bd. II, p. 106 und 328.

$$(92)\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left[(r^2-1)\frac{dR}{dr}\right]+\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-\frac{m^2}{r^2-1}+\mathfrak{A}\right]R=0,\\ &\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+\left[\frac{n^2}{h^2}\sin^2\vartheta-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\mathfrak{A}\right]\Theta=0,\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}$ eine noch willkürliche Konstante bedeutet. Es kommt wieder darauf an, eindeutige Lösungen dieser Gleichungen zu finden und $\mathfrak{A}$ dem entsprechend zu bestimmen.

Die zweite Gleichung geht aus der ersten durch die Substitution $r = \text{cosin}\,\vartheta$ hervor; wir haben also nur die eine Gleichung

$$(93)\quad (r^2-1)\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-\frac{m^2}{r^2-1}+\mathfrak{A}\right]R=0$$

zu untersuchen. Die Fuchssche determinierende Fundamentalgleichung wird

$$s(s-1)\cdot 2+2s-\frac{m^2}{2}=0,\quad \text{also } s=\pm\frac{m}{2};$$

d. h. die beiden unabhängigen partikulären Integrale werden durch Reihen von der Form

$$r^{\frac{m}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}c_i r^i,\qquad r^{-\frac{m}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}c_i' r^i$$

dargestellt; da aber die Differenz der beiden Werte für s hier die ganze Zahl m ist, so bleibt zu untersuchen, ob in das zweite partikuläre Integral nicht auch Glieder mit $\log r$ eingehen. Jedenfalls kann eine in Bezug auf r und $\sqrt{r^2-1}$ eindeutige Lösung nur vorkommen, wenn m eine ganze Zahl ist. Die Differentialgleichung (93) ist dieselbe, auf welche Heine (a. a. O.) beim Probleme der Wärmeleitung im Innern eines Ellipsoids geführt wurde; er reduziert sie durch die Substitutionen

$$(94)\qquad R=\mathfrak{R}\cdot(r^2-1)^{\frac{m}{2}},\quad \varrho=r^2-1,$$

auf die einfachere Form

$$(95)\qquad \begin{aligned} 4\varrho(\varrho+1)\frac{d^2\mathfrak{R}}{d\varrho^2} + 2\,[\varrho + (2m+2)(\varrho+1)]\frac{d\mathfrak{R}}{d\varrho} \\ + \left[\frac{n^2}{h^2}\varrho + m(m+1) + \mathfrak{A}\right]\mathfrak{R} = 0. \end{aligned}$$

Bei der weiteren Diskussion ist zu unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist.

1) Es sei m eine gerade Zahl. Dann ist in jedem der beiden singulären Punkte $r = 1$ und $r = -1$ eines der beiden partikulären Integrale eine holomorphe Funktion von r und also nach Potenzen von $(r-1)$ bezw. von $(r+1)$ im Innern eines Kreises entwickelbar, dessen Zentrum in dem einen dieser Punkte liegt und der durch den andern hindurchgeht. Bei besonderen Werten von $\mathfrak{A}$ kann sich die eine Reihe stetig in die andere fortsetzen. Das zweite Integral in jedem der beiden Punkte wird dort unendlich; das erste darf sich also niemals in das zweite fortsetzen. Es ergibt sich also hier **eine** Klasse von überall eindeutigen Integralen, die durch eine transscendente Gleichung in $\mathfrak{A}$ bestimmt wird. Diese Betrachtung gilt auch für den Fall $m = 0$, in dem jeweils das zweite Fundamentalintegral an den singulären Stellen sicher logarithmisch unendlich wird.

2) Es sei m eine ungerade Zahl. Jetzt gehören zu den beiden singulären Punkten bezw. erste partikuläre Integrale der Form

$$\sqrt{r-1}\,(r-1)^{\mu}\sum c_i(r-1)^i \quad\text{und}\quad \sqrt{r+1}\,(r+1)^{\mu}\sum c_i'(r+1)^i,$$

wobei $m = 2\mu + 1$ genommen ist; die andern Integrale werden an diesen Stellen unendlich gross; auch hier dürfen (für besondere Werte von $\mathfrak{A}$) sich nur diese beiden Reihen in einander analytisch fortsetzen, so dass es auch hier nur eine Möglichkeit gibt, eindeutige Funktionen von r und $\sqrt{r^2-1}$ durch eine transscendente Gleichung für $\mathfrak{A}$ als Integrale der Gleichung (93) zu bestimmen.

Dasselbe Resultat würde man durch Betrachtung der Gleichung (95) ableiten; da es sich hier um Entwicklungen nach

Potenzen von $\varrho = r^2 - 1$ handelt, die in der ganzen Ebene konvergieren sollen, so lässt sich das entsprechende Integral (94), abgesehen von dem Faktor $(r^2 - 1)^{\frac{1}{2}m}$, nach Potenzen von r^2 entwickeln. Gehen wir also durch die Substitution $r = \cos\vartheta$ zu der zweiten Differentialgleichung (92) über, so werden die eindeutigen Lösungen sich in folgender Form darstellen:

$$\Theta_{ms}^{(n)} = (\sin\vartheta)^m \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (\text{cosin}\,\vartheta)^{2i} \tag{96}$$

und entsprechend setzen wir

$$R_{ms}^{(n)} = (r^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \sum \gamma_i r^{2i}. \tag{97}$$

Hier bezieht sich der obere Index n auf die in Gleichung (93) vorkommende, noch nicht näher bestimmte Zahl n, der Index m auf die in (93) auftretende ganze Zahl m und der Index s auf die verschiedenen Werte, welche die Konstante $\mathfrak{A}$ gemäss den aufgestellten Bedingungen annehmen kann, wenn die Funktionen (96) und (97) eindeutig sein sollen.

Sind R und R_1 zwei verschiedene Funktionen, die sich auf denselben oberen Index n und auf dieselbe ganze Zahl m, aber auf verschiedene Konstante $\mathfrak{A}_s$ und $\mathfrak{A}_t$ beziehen, so leitet man aus der Differentialgleichung (93) die Relation ab:

$$\int \left[(r^2-1)^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r(r^2-1)\frac{dR}{dr}\right] R_1\, dr$$

$$= \int \frac{d}{dr}\left((r^2-1)\frac{dR}{dr}\right) \cdot R_1 (r^2-1)\, dr$$

$$= - \int \left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1) - m^2 + \mathfrak{A}_s (r^2-1)\right] R R_1\, dr,$$

und durch Anwendung der partiellen Integration:

$$= (r^2-1)^2 \frac{dR}{dr} R_1 - (r^2-1)^2 R \frac{dR_1}{dr} + \int R \cdot \frac{d}{dr}\left((r^2-1)\frac{dR_1}{dr^2}\right) \cdot (r^2-1)\, dr.$$

Nach (97) verschwinden die ersten beiden Glieder der rechten Seite, wenn man $r = 1$ oder $r = -1$ setzt; es wird also:

$$\int_{-1}^{+1}(r^2-1)R_1\frac{d}{dr}(R(r^2-1))dr=\int_{-1}^{+1}(r^2-1)R\frac{d}{dr}(R_1(r^2-1)^2)dr$$

$$=-\int_{-1}^{+1}\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-m^2+\mathfrak{A}_s(r^2-1)\right]R\,R_1\,dr$$

$$=-\int_{-1}^{+1}\left[\frac{n^2}{h^2}(r^2-1)-m^2+\mathfrak{A}_t(r^2-1)\right]R\,R_1\,dr,$$

folglich, wenn $\mathfrak{A}_s$ von $\mathfrak{A}_t$ verschieden ist:

$$\int_{-1}^{+1}(r^2-1)\,R\cdot R_1\,dr=0$$

und wenn man $r=\text{cosin}\,\vartheta$ setzt:

$$\int_0^\pi \sin^3\vartheta\cdot\Theta_{ms}^{(n)}\cdot\Theta_{mt}^{(n)}\,d\vartheta=0, \tag{98}$$

wenn $\mathfrak{A}_s$ von $\mathfrak{A}_t$ verschieden ist; für $\mathfrak{A}_s=\mathfrak{A}_t$ ist dagegen das Integral von Null verschieden.

Die Relation (98) kann man in bekannter Weise benutzen, um eine Funktion von ϑ nach Funktionen Θ zu entwickeln. Man findet

$$f(\vartheta)=\sum_s \Gamma_s\,\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta),$$

wenn Γ_s durch die Bedingung

$$\Gamma_s\cdot\int_0^\pi\sin^3\vartheta\cdot[\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)]^2\,d\vartheta=\int_0^\pi f(\vartheta)\cdot\sin^3\vartheta\cdot\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)\,d\vartheta$$

bestimmt wird. Insbesondere gilt die Gleichung

$$1=\sum_s \delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta), \tag{99}$$

wenn:

$$\delta_{ms}^{(n)}\cdot\int_0^\pi\sin^3\vartheta\,[\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)]^2\,d\vartheta=\int_0^\pi\sin^3\vartheta\cdot\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{100}$$

§ 23. Die Grenzbedingungen beim verlängerten Rotationsellipsoide.

Das weitere Verfahren ist ganz analog demjenigen, welches wir beim dreiaxigen Ellipsoide einschlugen. Wir beschränken uns wieder auf die durch die Funktion U dargestellten Schwingungen.

Ein Unterschied macht sich aber durch folgenden Umstand bemerkbar. Im allgemeinen Falle hatten wir es mit drei Grössen

$$n, \quad A, \quad B$$

zu tun, die durch drei transscendente Gleichungen in gegenseitige Abhängigkeit gebracht wurden. Wir konnten also uns zuerst die Reihe der Zahlen n aus den drei Gleichungen berechnet denken und nach ihnen zuerst ordnen. Jetzt sind diese Grössen bezw. durch

$$n, \quad \mathfrak{A}, \quad m^2$$

ersetzt; die Grösse B also ist von vornherein als Quadrat einer beliebigen ganzen Zahl bekannt; $\mathfrak{A}$ und n erscheinen demnach als Funktionen von m. Wir müssen deshalb die für U aufzustellenden Reihen in erster Linie nach den Zahlen m ordnen. Demnach setzen wir für das Innere des Ellipsoids

$$U = \sum_m (\mathfrak{B}_m \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{W}_m \sin m\psi) \tag{101}$$

und ebenso für das Äussere des Ellipsoids

$$U_1 = \sum_m (\mathfrak{B}'_m \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{W}'_m \sin m\psi); \tag{102}$$

und hierin sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m &= \sum_s \sum_n (A^{(n)}_{ms} \operatorname{cosin} nat + B^{(n)}_{ms} \sin nat)\, \Theta^{(n)}_{ms} R^{(n)}_{ms} \\ \mathfrak{W}_m &= \sum_s \sum_n (C^{(n)}_{ms} \operatorname{cosin} nat + D^{(n)}_{ms} \sin nat)\, \Theta^{(n)}_{ms} R^{(n)}_{ms}. \end{aligned} \tag{103}$$

Für das Äussere des Ellipsoids benötigen wir noch das zweite Integral S der Differentialgleichung (93), welches für $r^2 = 1$ unendlich wird, und das in bekannter Weise aus dem ersten Integrale gefunden wird; dann sei

$$\mathfrak{B}'_m = \sum_s \sum_n (A^{(n)}_{1ms} \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + B^{(n)}_{1ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms} R^{(n)}_{1ms}$$

$$+ \sum_s \sum_n (A^{(n)}_{2ms} \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + B^{(n)}_{2ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms} S^{(n)}_{1ms},$$

$$\mathfrak{W}'_m = \sum_s \sum_n (C^{(n)}_{1ms} \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + D^{(n)}_{1ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms} R^{(n)}_{1ms}$$

$$+ \sum_s \sum_n (C^{(n)}_{2ms} \operatorname{cosin} n_1 a_1 t + D^{(n)}_{2ms} \sin n_1 a_1 t)\, \Theta^{(n)}_{1ms} S^{(n)}_{1ms}.$$

Zunächst muss wieder die Bedingung

(104) $$n\, a = n_1\, a_1$$

erfüllt sein. Für die Oberfläche

(105) $$r = r_0$$

des Ellipsoids haben wir die Bedingungen

(106) $$\frac{\partial \mathfrak{B}_m}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_m}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}'_m}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_m}{\partial \vartheta} = 0$$

und ausserdem für $r = r_0$:

(107) $$\frac{\partial \mathfrak{B}_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}'_m}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}'_m}{\partial r} = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen dieses letzten Systems befriedigen wir dadurch, dass wir die zu (81) analoge Gleichung

(108) $$\left(\frac{d\, R^{(n)}_{ms}(r)}{d\, r}\right)_{r = r_0} = 0$$

zur Bestimmung der Zahlen n dienen lassen; sie muss zu dem Zwecke mit der zwischen $\mathfrak{A}_s$ und n nach § 22 bestehenden transscendenten Gleichung verbunden werden. Für jede ganze Zahl m ergeben sich hieraus im Allgemeinen unendlich viele Zahlen n als Lösungen, d. h. unendlich viele mögliche Werte für die Schwingungsdauern. Sämtliche Schwingungsdauern ordnen sich also nach den Zahlen m in Gruppen, jede Gruppe wieder nach den zugehörigen Werten von n in Untergruppen (oder „Serien“).

Die ersten beiden Gleichungen (106) befriedigen wir durch die Forderungen:

$$A_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = a_{mn}\, \delta_{ms}^{(n)},$$
$$B_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = b_{mn}\, \delta_{ms}^{(n)},$$
$$C_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = c_{mn}\, \delta_{ms}^{(n)},$$
$$D_{ms}^{(n)} R_{ms}^{(n)}(r_0) = d_{mn}\, \delta_{ms}^{(n)},$$

wo $\delta_{ms}^{(n)}$ durch die obige Gleichung (100) definiert sein soll und mit a, b, c, d neue von $\mathfrak{A}_s$ unabhängige Konstante bezeichnet sind. Dann wird infolge von (99)

$$(109)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{V}_m)_{r=r_0} &= \sum_n (a_{mn} \operatorname{cosin} n a t + b_{mn} \sin n a t), \\ (\mathfrak{W}_m)_{r=r_0} &= \sum_n (c_{mn} \operatorname{cosin} n a t + d_{mn} \sin n a t), \end{aligned}$$

also in der Tat unabhängig von ϑ.

Für die Funktion U_1 kommen die zu (79) analogen Gleichungen

$$A_{1ms}^{(n)} R'(r_0) + A_{2ms}^{(n)} S'(r_0) = 0,$$
$$B_{1ms}^{(n)} R'(r_0) + B_{2ms}^{(n)} S'(r_0) = 0,$$
$$C_{1ms}^{(n)} R'(r_0) + C_{2ms}^{(n)} S'(r_0) = 0,$$
$$D_{1ms}^{(n)} R'(r_0) + D_{2ms}^{(n)} S'(r_0) = 0$$

in Betracht, wenn zur Abkürzung

$$R'(r_0) = \left(\frac{d R_{1ms}^{(n)}}{d r}\right)_{r=r_0}, \quad S'(r_0) = \left(\frac{d S_{1ms}^{(n)}}{d r}\right)_{r=r_0}$$

gesetzt wird. Durch diese Gleichungen sind die dritte und vierte Gleichung des Systems (107) befriedigt. Infolge derselben machen wir

$$A_{1ms}^{(n)} = a_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad A_{2ms}^{(n)} = -\, a_{ms}^{(n)} R'(r_0),$$
$$B_{1ms}^{(n)} = b_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad B_{2ms}^{(n)} = -\, b_{ms}^{(n)} R'(r_0),$$
$$C_{1ms}^{(n)} = c_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad C_{2ms}^{(n)} = -\, c_{ms}^{(n)} R'(r_0),$$
$$D_{1ms}^{(n)} = d_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0), \quad D_{2ms}^{(n)} = -\, d_{ms}^{(n)} R'(r_0).$$

Wird also eine Funktion $\mathfrak{T}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{T}_{ms}^{(n)} = R_{ms}^{(n)} \cdot S'(r_0) - S_{ms}^{(n)} R'(r_0) \tag{110}$$

definiert, so erhalten wir in Rücksicht auf (104):

$$\mathfrak{V}_m' = \sum_n \sum_s \Theta_{1\,ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}^{(n)}(r) \cdot (a_{ms}^{(n)} \operatorname{cosin} n\,a\,t + b_{ms}^{(n)} \sin n\,a\,t),$$

$$\mathfrak{W}_m' = \sum_n \sum_s \Theta_{1\,ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}^{(n)}(r) \cdot (c_{ms}^{(n)} \operatorname{cosin} n\,a\,t + d_{ms}^{(n)} \sin n\,a\,t).$$

Die noch verfügbaren Konstanten a_{ms} und b_{ms} bestimmen wir so, dass $\mathfrak{V}_m'$ und $\mathfrak{W}_m'$ für $r = r_0$ von ϑ unabhängig werden; es sei demnach

$$a_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \alpha_{mn},$$
$$b_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \beta_{mn},$$
$$c_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \gamma_{mn},$$
$$d_{ms}^{(n)} \mathfrak{T}_{ms}(r_0) = \delta_{1\,ms}^{(n)} \cdot \delta_{mn},$$

wenn $\delta_{1\,ms}^{(n)}$ für die mit dem Index 1 versehenen Funktionen dieselbe Bedeutung hat, wie $\delta_{ms}^{(n)}$ nach (100) für die Funktionen ohne Index. Dann wird in der Tat

$$\begin{aligned} (\mathfrak{V}_m')_{r=r_0} &= \sum_n (\alpha_{mn} \operatorname{cosin} n\,a\,t + \beta_{mn} \sin n\,a\,t), \\ (\mathfrak{W}_m')_{r=r_0} &= \sum_n (\gamma_{mn} \cdot \operatorname{cosin} n\,a\,t + \delta_{mn} \sin n\,a\,t), \end{aligned} \tag{111}$$

und dadurch ist auch der dritten und vierten Gleichung (106) genügt.

Jetzt können wir auch die Bedingung erfüllen, welche zu (106) in unserem Falle noch ergänzend hinzutritt, nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \text{ für } r = r_0. \tag{112}$$

Ihr wird einfach durch die folgenden Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= a_{mn}, \quad \beta_{mn} = b_{mn}, \\ \gamma_{mn} &= c_{mn}, \quad \delta_{mn} = d_{mn}. \end{aligned} \tag{113}$$

Was endlich die Druckkräfte an der Oberfläche betrifft, so bestehen nach (106), (107), (108), (109) bereits die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi \, \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \, \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r \, \partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \, \partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial r \, \partial \psi} = 0$$

$$\text{für } r = r_0 .$$

Nach (68) kommt es noch auf die Druckkräfte N_μ und N_ν an, wenn der Index μ sich auf die Richtung ϑ, der Index ν auf die Richtung ψ, der Index ϱ auf die Richtung r bezieht. Es ist nach obigem

$$N_\varrho = 0, \quad N_\varrho' = 0, \quad N_\mu = 0, \quad N_\mu' = 0;$$

und es bleibt nur noch die Bedingung

$$(114) \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} \right) = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial \nu^2} \right) \text{ für } r = r_0$$

zu erfüllen; hierbei bezeichnete $d\varrho$ das Linienelement in Richtung der Flächen-Normale, also

$$d\varrho = h \sqrt{\frac{r_0^2 - \cos^2 \vartheta}{r_0^2 - 1}} \cdot dr,$$

ebenso $d\nu$ das Linienelement in Richtung eines Parallelkreises:

$$d\nu = h \sqrt{r_0^2 - 1} \cdot \sin \vartheta \cdot d\psi .$$

Die Gleichung (114) wird daher

$$(115) \quad \begin{aligned} & a^2 \left[\frac{1}{r_0^2 - \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{(r_0^2 - 1) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right] \\ & = a_1^2 \left[\frac{1}{r_0^2 - \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} - \frac{1}{(r_0^2 - 1) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} \right] \text{für } r = r_0 . \end{aligned}$$

Infolge der bisher aufgestellten Gleichungen erhalten wir aus der Differentialgleichung (93) (der auch die Funktion $\mathfrak{T}$ genügt, wenn n und $\mathfrak{A}$ den Index 1 erhalten):

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$= -\sum_n \left[\mathfrak{M}_{mn}\left(\frac{n_m^2}{h^2}(r_0^2-1)-\frac{m^2}{r_0^2-1}+\sum_s \mathfrak{A}_{ms}^{(n)}\,\delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}\right)\right],$$

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$= -\sum_n \left[\mathfrak{N}_{mn}\left(\frac{n_m^2}{h^2}(r_0^2-1)-\frac{m^2}{r_0^2-1}+\sum_s \mathfrak{A}_{ms}^{(n)}\,\delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}\right)\right],$$

wobei zur Abkürzung:

$$\mathfrak{M}_{mn} = a_{mn} \operatorname{cosin} n\,a\,t + b_{mn} \sin n\,a\,t$$

$$\mathfrak{N}_{mn} = c_{mn} \operatorname{cosin} n\,a\,t + d_{mn} \sin n\,a\,t;$$

dem Buchstaben n ist der Index m beigelegt, um seine Abhängigkeit von m hervorzuheben. Die hier rechts auftretenden, auf den Index s bezüglichen Summen können wir durch das folgende Verfahren näher bestimmen. Stellt man eine Funktion $f(\vartheta)$ von ϑ nach den am Schlusse von § 22 aufgestellten Formeln durch die Funktionen Θ dar, so ist infolge der für letztere geltenden Differentialgleichung (92):

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d f(\vartheta)}{d\vartheta}\right)=f(\vartheta)\left[\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\frac{n^2}{h^2}\sin^2\vartheta\right]+\sum_s \Gamma_s\,\mathfrak{A}_{ns}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)};$$

nimmt man also $f(\vartheta)=1$ und folglich $\Gamma_s=\delta_s$, so ergibt sich

$$\sum_s \mathfrak{A}_{ms}^{(n)}\,\delta_{ms}^{(n)}\,\Theta_{ms}^{(n)}(\vartheta)=\frac{n^2}{h^2}\sin^2\vartheta-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta},$$

und die obigen Formeln werden:

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$= -\sum_n \mathfrak{M}_{mn}\left[\frac{n^2}{h^2}(r_0^2-\cos^2\vartheta)-m^2\left(\frac{1}{r_0^2-1}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\right],$$

$$(r_0^2-1)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_m}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$= -\sum_n \mathfrak{N}_{mn}\left[\frac{n^2}{h^2}(r_0^2-\cos^2\vartheta)-m^2\left(\frac{1}{r_0^2-1}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\right],$$

und hieraus nach (101)

$$(r_0^2 - 1)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_{r=r_0} = -\sum_m \sum_n (\mathfrak{M}_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}_{mn} \sin m\psi)$$

$$+\left(\frac{n^2}{h^2} - \frac{m^2}{(r_0^2 - 1)\sin^2 \vartheta}\right)(r_0^2 - \cos^2 \vartheta),$$

andererseits ist nach (101) und (109):

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi}\right)_{r=r_0} = -m^2 \sum_m \sum_n (\mathfrak{M}_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}_{mn} \sin m\psi),$$

also wird die linke Seite von (114) oder (115) gleich

$$a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{h^2(r_0^2 - 1)} \sum_m \sum_n n^2 (\mathfrak{M}_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}_{mn} \sin m\psi),$$

ebenso findet man

$$a_1^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial \nu^2}\right)$$

$$= -\frac{a_1^2}{h^2(r_0^2 - 1)} \sum_m \sum_n n_1^2 (\mathfrak{M}'_{mn} \operatorname{cosin} m\psi + \mathfrak{N}'_{mn} \sin m\psi),$$

wenn in analoger Weise:

$$\mathfrak{M}'_{mn} = \alpha_{mn} \operatorname{cosin} n a t + \beta_{mn} \sin n a t,$$

$$\mathfrak{N}'_{mn} = \gamma_{mn} \operatorname{cosin} n a t + \delta_{mn} \sin n a t.$$

Nun ist nach (104) $n a = n_1 a_1$, und so ergibt sich, dass die letzte noch zu befriedigende Gleichung (114) bezw. (115) durch die Gleichung (112) bezw. die Gleichungen (113) schon von selbst mit erfüllt ist.

Auch beim Rotations-Ellipsoide ist daher ein System von Schwingungen gefunden, das im Innern desselben und im umgebenden Lichtäther gleichzeitig besteht, und für welches die Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie genau erfüllt sind. Die entsprechenden Schwingungsdauern werden durch die Gleichung (108) definiert.

Besonders ausgezeichnet ist der Fall $m = 0$; denn dann ist die Funktion U vom Winkel ψ unabhängig; d. h. es herrscht völlige Symmetrie in Bezug auf die Rotations-Axe. Ist $m > 0$, so besteht keine derartige Symmetrie.

Die symmetrischen Schwingungen, welche zur Funktion U gehören, werden in einer Pendelung eines jeden Ellipsoidpunktes um die X-Axe bestehen, die durch die Gleichungen (66) dargestellt wird. Dabei können verschiedene Schichten des Ellipsoids (ebenso des umgebenden Lichtäthers) zu gleicher Zeit in entgegengesetztem Sinne schwingen; und diese Schichten werden durch konfokale Ellipsoide begrenzt, die als Knotenflächen auftreten; die Parameter r der letzteren berechnen sich für das Innere des Ellipsoids aus der Gleichung

$$\frac{d R_{ms}^{(n)}(r)}{d r} = 0,$$

in welcher nun m, n_s, $\mathfrak{A}_s$ als gegeben zu betrachten sind. Für den Lichtäther findet man diese Knotenflächen aus der Gleichung

$$\frac{d \mathfrak{T}_{ms}^{(n)}(r)}{d r} = 0,$$

wo $\mathfrak{T}$ durch (110) definiert ist. Beiden Gleichungen ist die Lösung $r = r_0$ gemeinsam.

Berücksichtigt man auch die Funktionen V und W, so bewegen sich bei den entsprechenden, durch die Gleichungen (3) dargestellten, Schwingungen die einzelnen Punkte für $m = 0$ (d. h. bei Symmetrie gegen die X-Axe) auf Meridianen oder auf einer Art loxodromischer Kurven, für $m > 0$ in unregelmässigerer Weise. Die Schwingungsdauern für diese Funktionen bestimmen sich aber aus derselben Gleichung (108), die für U aufgestellt wurde.

Die völlig symmetrischen Schwingungen ($m = 0$) werden am häufigsten und leichtesten auftreten, ihre Intensitäten am stärksten sein; wir bezeichnen sie als die Haupt-Serie, welcher wir eine Reihe von Neben-Serien ($m > 0$) gegenüberstellen.

§ 24. Vergleich mit dem abgeplatteten Rotations-Ellipsoide.

Die Parameterdarstellung für ein Sphäroid[1]) wird durch die Gleichungen

$$
(116)\qquad
\begin{aligned}
x &= \mathfrak{h}\cdot \mathfrak{r}\cdot \operatorname{cosin}\vartheta, & 0<\vartheta<\pi,\\
y &= \mathfrak{h}\cdot \sqrt{\mathfrak{r}^2+1}\cdot \sin\vartheta\cos\psi, & 0<\psi<2\pi,\\
z &= \mathfrak{h}\cdot \sqrt{\mathfrak{r}^2+1}\cdot \sin\vartheta\sin\psi, & \mathfrak{r}>0
\end{aligned}
$$

vermittelt, welche aus den Gleichungen (86) hervorgehen, wenn man die Grössen

$$h \text{ durch } -i\mathfrak{h} \quad\text{und}\quad r \text{ durch } i\mathfrak{r}$$

ersetzt. Die Gleichung des Ellipsoids ist

$$
(117)\qquad \frac{x^2}{\mathfrak{r}^2\mathfrak{h}^2}+\frac{y^2+z^2}{(\mathfrak{r}^2+1)\mathfrak{h}^2}=1.
$$

Es ist also $\mathfrak{r}\,\mathfrak{h}$ die kleine Halbaxe und $\mathfrak{h}\sqrt{\mathfrak{r}^2+1}$ die grosse Halbaxe desselben und $\mathfrak{h}$ die geometrische Exzentrizität.

Es wären jetzt ganz dieselben Rechnungen wie in § 22 zu wiederholen, wobei nur immer die angegebenen Substitutionen zu machen sind. Die Gleichungen (92) würden also z. B. durch die folgenden zu ersetzen sein:

$$
(118)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\mathfrak{r}}\left((\mathfrak{r}^2+1)\frac{dR}{d\mathfrak{r}}\right)+\left[\frac{n^2}{\mathfrak{h}^2}(\mathfrak{r}^2+1)+\frac{m^2}{\mathfrak{r}^2+1}+\mathfrak{A}\right]R=0,\\
&\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)-\left[\frac{n^2}{\mathfrak{h}^2}\sin^2\vartheta+\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}+\mathfrak{A}\right]\Theta=0,
\end{aligned}
$$

und es wird

[1]) Mit dem elastischen Probleme für das abgeplattete Rotationsellipsoid hat sich auch Mathieu beschäftigt und zwar versucht er, zu der für die Kugel bekannten Lösung ergänzende Glieder hinzuzufügen; vgl. den Bericht darüber bei Pockels a. a. O., p. 135. Übrigens hat auch Abraham die elastischen Schwingungen eines verlängerten Rotationsellipsoids behandelt (Math. Annalen Bd. 52); seine Ansätze, bei denen unsere Konstante $\mathfrak{A}$ gleich Null gewählt wird, sind für das uns beschäftigende Problem im allgemeinen nicht zu verwerten.

$$R = (\mathfrak{r}^2 + 1)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R}^{\cdot}, \quad \varrho = \mathfrak{r}^2 + 1 \tag{119}$$

zu setzen sein, wenn $\mathfrak{R}$ als Funktion von ϱ der aus (95) hervorgehenden Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 4\varrho(\varrho - 1)\frac{d^2\mathfrak{R}^{\cdot}}{d\varrho^2} + 2[\varrho + (2m+2)(\varrho - 1)]\frac{d\mathfrak{R}^{\cdot}}{d\varrho} \\ + \left[m(m+1) + \frac{n^2}{\mathfrak{h}^2}\varrho + \mathfrak{A}\right]\mathfrak{R}^{\cdot} = 0 \end{aligned} \tag{120}$$

genügt. Auch in den Formeln von § 23 hat man überall dieselbe Substitution anzuwenden; es ist daher nicht nötig auf die Einzelheiten nochmals einzugehen. Auch beim abgeplatteten Rotationsellipsoide sind demnach zwei Fälle zu unterscheiden; der Fall voller Symmetrie gegen die Axe ($m = 0$) und der Fall gestörter Symmetrie ($m > 0$).

Der Charakter der aufgestellten transscendenten Gleichungen, von denen die Schwingungsdauern der möglichen elastischen Schwingungen abhängen, wird jedoch ein ganz anderer sein, als beim verlängerten Rotationsellipsoide. Eine allgemeine Erledigung der sich hier bietenden Frage scheint ausserordentlich schwierig und umständlich zu sein. Man kann sich aber hinreichend über die einschlägigen Verhältnisse für den besonderen Fall Rechenschaft geben, wo die Exzentrizität h bezw. $\mathfrak{h}$ der Rotationsellipsoide eine sehr kleine Grösse ist. Dann ist die in unseren Gleichungen vorkommende Konstante

$$\mu = \frac{n}{h} \tag{121}$$

eine sehr grosse Zahl; und da h auch nur in dieser Kombination vorkommt, so wird es sich darum handeln, für sehr grosse Werte von μ einen asymptotischen Wert der Funktion R zu ermitteln.

Zu dem Zwecke gehen wir von der Gleichung (95) aus und setzen darin

$$\mu\varrho = t, \tag{122}$$

wodurch sie in die Form

$$4t(t+\mu)\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2}+2[t+(2m+2)(t+\mu)]\frac{d\mathfrak{R}}{dt}$$
$$+[\mu t+m(m+1)+\mathfrak{A}]\mathfrak{R}=0$$

übergeht. Für sehr grosse Werte von μ muss also die Bedingung

(123) $$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2}+\frac{m+1}{t}\frac{d\mathfrak{R}}{dt}+\tfrac{1}{4}\mathfrak{R}=0$$

erfüllt sein, wenn m und $\mathfrak{A}$ endlich bleiben. Diese Gleichung lässt sich durch Besselsche Funktionen integrieren; das für $t=0$ endlich bleibende Integral derselben ist

$$\mathfrak{R}=j_m(\sqrt{t})=(-1)^m\frac{\Pi(2m)}{\Pi(m)}\frac{d^m J(\sqrt{t})}{dt^m},$$

wobei wir Heines Bezeichnungsweise anwenden:[1])

$$J(\sqrt{t})=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\cos\varphi\cdot\sqrt{t}}\,d\varphi.$$

Nach (94) wird daher für unendlich grosse Werte von μ:

(124) $$R=(r^2-1)^{\frac{m}{2}}j_m(\sqrt{\mu(r^2-1)})\cdot C \qquad \text{für } \mu=\infty,$$

wo μ durch (121) definiert ist und C eine Konstante bedeutet. Da das Argument dieser Funktion selbst unendlich gross wird für $\mu=\infty$, können wir uns ferner des asymptotischen Wertes für j_m bedienen; setzt man

(125) $$J_m(\sqrt{t})=\frac{t^{\frac{m}{2}}j_m(\sqrt{t})}{1\cdot 3\ldots\ldots(2m-1)}=(-2\sqrt{t})^m\frac{d^m J(\sqrt{t})}{dt^m},$$

so ist bekanntlich für unendlich grosse Werte von t:

$$J_m(\sqrt{t})=\frac{\cos\sqrt{t}+\sin\sqrt{t}}{i^m\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \qquad \text{für gerades } m,$$

$$J_m(\sqrt{t})=\frac{\cos\sqrt{t}-\sin\sqrt{t}}{i^{m+1}\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \qquad \text{„ ungerades } m.$$

---

[1]) Vgl. Heine a. a. O., Bd. 1, p. 233 ff.

Folglich erhalten wir aus (124), wenn C' eine neue Konstante bezeichnet

$$(126)\ R = \frac{\cos\sqrt{\mu(r^2-1)} \pm \sin\sqrt{\mu(r^2-1)}}{\sqrt[4]{r^2-1}} \cdot C' \text{ für } \mu = \infty,$$

wo das obere Zeichen für gerade Zahlen m, das untere für ungerade Zahlen m gilt.

Zur Bestimmung der Zahlen n (und damit der Schwingungsdauern) diente die Gleichung (108); diese wird unter Benutzung des asymptotischen Wertes (126)

$$(127)\quad \operatorname{tang}\xi = \frac{\pm 2\xi - 1}{2\xi \pm 1}, \quad \text{wo } \xi = \sqrt{\frac{n}{h}(r_0^2-1)},$$

sie ist also von m und $\mathfrak{A}$ unabhängig. Näherungswerte von $\mathfrak{A}$ findet man dann für jedes m und n_s mittels der ursprünglichen Gleichung (92):

$$\mathfrak{A}_{ms}^{(n)} = -\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left((r^2-1)\frac{dR}{dr}\right) + \frac{n_s^2}{h^2}(r^2-1) - \frac{m^2}{r^2-1}\right]_{r=r_0}$$

F ü r e i n v e r l ä n g e r t e s R o t a t i o n s e l l i p s o i d m i t s e h r k l e i n e r E x z e n t r i z i t ä t h i s t a l s o d i e B e s t i m m u n g d e r Z a h l e n n a u f d i e G l e i c h u n g (127) z u r ü c k g e f ü h r t, w e l c h e b e k a n n t l i c h u n e n d l i c h v i e l e r e e l l e W u r z e l n b e s i t z t.

Kehren wir nun zum abgeplatteten Rotationsellipsoide zurück, so haben wir die entsprechenden Ueberlegungen an die Gleichung (120) anzuknüpfen. Wir setzen

$$\frac{n}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \varrho \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{t}$$

und erhalten

$$\frac{d^2\mathfrak{R}^*}{d\mathfrak{t}^2} + \frac{m+1}{\mathfrak{t}}\frac{d\mathfrak{R}^*}{d\mathfrak{t}} - \tfrac{1}{4}\mathfrak{R}^* = 0.$$

An Stelle von (124) tritt daher die Gleichung[1])

[1]) Das zweite partikuläre Integral der letzten Differentialgleichung wird für $\mathfrak{t} = 0$ (also im Innern des gegebenen Ellipsoids) unendlich gross und ist deshalb nicht brauchbar.

$$R = (\mathfrak{r}^2 + 1)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R}^* = (\mathfrak{r}^2 + 1)^{\frac{m}{2}} j_m (i \sqrt{\mathfrak{m} (\mathfrak{r}^2 + 1)}) \quad \text{für } \mathfrak{m} = \infty,$$

und wir haben weiter die asymptotischen Werte der Funktion $\mathfrak{J}_m$ mit rein imaginärem Argumente zu benutzen:

$$(128) \qquad J_m (i \sqrt{\mathfrak{t}}) = \frac{i^m \cdot e^{\sqrt{\mathfrak{t}}}}{\sqrt{2 \pi \sqrt{\mathfrak{t}}}},$$

wobei J_m wieder in der obigen Weise mit j_m zusammenhängt, so dass

$$j_m (i \sqrt{\mathfrak{t}}) = C \cdot \mathfrak{t}^{-\frac{m}{2} - \frac{1}{4}} \cdot e^{\sqrt{\mathfrak{t}}}$$

$$R = C' \cdot (\mathfrak{r}^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} e^{\sqrt{\mathfrak{m} (\mathfrak{r}^2 + 1)}} \quad \text{für } \mathfrak{m} = \infty.$$

Die Gleichung (108) liefert hier das Resultat

$$(129) \qquad \left[\left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\mathfrak{m}} \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1}\right) \cdot \mathfrak{r} \cdot e^{\sqrt{\mathfrak{m} (\mathfrak{r}^2 + 1)}} \right]_{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0} = 0,$$

wo $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$ die Gleichung der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids in elliptischen Koordinaten darstellt.

Hieraus ergibt sich für n der einzige Wert:

$$n = \tfrac{1}{4} \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}.$$

Da der gefundene asymptotische Wert von m nicht wesentlich abhängt, so ist hier eine Unterscheidung der beiden Fälle $m = 0$ und $m > 0$ noch nicht möglich. Man wird indessen eine solche erreichen, indem man die Formel (128) zunächst nur für $m = 0$ benutzt und dann mittelst der Relation (125) zu höheren Werten von m aufsteigt. In der entsprechenden Gleichung (129) treten dann neben der Exponentialfunktion Ausdrücke höheren Grades in $\mathfrak{m}$ auf; grösseren Werten von m entsprechen daher im Allgemeinen mehr als ein Wert von $\mathfrak{m}$ und n.

Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exzentrizität gibt es daher bei völliger Symmetrie gegen die Rotationsaxe (d. h. $m = 0$) nur eine

einzige Schwingungsdauer (somit auch Wellenlänge), bei der eine elastische Schwingung (unter Einwirkung des Lichtäthers) möglich ist; bei gestörter Symmetrie ($m > 0$) wächst die Anzahl der möglichen Schwingungsdauern mit wachsendem Werte von m.

Auch bei grösserer Exzentrizität wird ein ähnliches Verhalten stattfinden; und dadurch unterscheiden sich die elastischen Schwingungen eines abgeplatteten Rotationsellipsoids sehr wesentlich von denjenigen eines verlängerten Rotationsellipsoids. Aber ebenso wie dort unterscheiden wir eine Haupt-Serie $m = 0$ (hier aus wenigen Linien bestehend) von den Neben-Serien ($m > 0$).

§ 25. Vergleich mit der Kugel. — Spaltung der Spektrallinien.

Bei meiner früheren Behandlung der Kugel (§ 4) habe ich gerade den Fall, der für die Ellipsoide allein in Betracht kommt, nicht eingehender behandelt, nämlich den Fall, wo die Oberfläche der Kugel in Ruhe bleibt und der Normaldruck gegen die Kugel gleich Null ist. Für unsere Funktion U hatten wir, wenn die Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$(130)\qquad \begin{aligned} x &= r\cos\vartheta, & 0 &< r < r_0, \\ y &= r\sin\vartheta\cdot\cos\psi, & 0 &< \psi < 2\pi, \\ z &= r\sin\vartheta\cdot\sin\psi, & 0 &< \vartheta < \pi \end{aligned}$$

gegeben werden:

$$(131)\qquad \begin{aligned} U &= \sum_n (\mathfrak{V}_n \operatorname{cosin} n\,a\,t + \mathfrak{W}_n \sin n\,a\,t), \\ U_1 &= \sum_n (\mathfrak{V}_n' \operatorname{cosin} n_1\,a_1\,t + \mathfrak{W}_n' \sin n_1\,a_1\,t), \end{aligned}$$

wo

$$(132)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{V}_n &= \sum_m \sum_q (A_{m\,q}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + B_{m\,q}^{(n)} \sin m\psi)\, P_m^q(\cos\vartheta)\cdot R_{q+\frac{1}{2}}(nr), \\ \mathfrak{W}_n &= \sum_m \sum_q (C_{m\,q}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + D_{m\,q}^{(n)} \sin m\psi)\, P_m^q(\cos\vartheta)\cdot R_{q+\frac{1}{2}}(nr). \end{aligned}$$

Hier bedeutet in bekannter Weise $P_m^q(\cos\vartheta)$ eine zuge-

ordnete Kugelfunktion und $R_{q+\frac{1}{2}}$ eine Besselsche Funktion, definiert bezw. durch die Gleichung

$$(133)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2 P_m^q}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d P_m^q}{d\vartheta} + \left[q(q+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_m^q = 0, \\ &\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[n^2 - \frac{q(q+1)}{r^2}\right] R = 0. \end{aligned}$$

Unter m und q sind ganze Zahlen verstanden. Ebenso ist für das Äussere der Kugel

$$(134)\quad \begin{aligned} \mathfrak{V}_n' = &\sum_m \sum_q (A_{1mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + B_{1mq}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) R_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r) \\ &+ \sum_m \sum_q (A_{2mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + B_{2mq}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) S_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r) \end{aligned}$$

und $\mathfrak{W}_n'$ geht hieraus hervor, indem man die Buchstaben A, B durch andere C, D ersetzt; $S_{q+\frac{1}{2}}$ bedeutet das zweite partikuläre Integral der angegebenen Besselschen Gleichung.

Es besteht natürlich wieder die Gleichung (104). Bezeichnet ferner r_0 den Radius unserer Kugel, so bestimmen wir die möglichen Schwingungsdauern durch die zu (108) analoge Gleichung

$$(135)\quad \left(\frac{d R_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{dr}\right)_{r=r_0} = 0,$$

in der nun q eine ganze positive Zahl bezeichnet und n die Unbekannte ist; im Gegensatze zu früher ist diese Gleichung von m unabhängig; die Lösung n hängt aber jetzt noch von q ab. Die Koëffizienten A, B, C, D in U_1 bestimmen wir so, dass

$$\mathfrak{V}_n' = \sum_m \sum_q (\alpha_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + \beta_{qm}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r)$$

$$\mathfrak{W}_n' = \sum_m \sum_q (\gamma_{mq}^{(n)} \operatorname{cosin} m\psi + \delta_{mq}^{(n)} \sin m\psi) P_m^q(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r)$$

wird, wobei zur Abkürzung:

$$(136)\quad \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}^{(n)} = R_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r) \frac{d S_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r_0)}{d r_0} - S_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r) \frac{d R_{q+\frac{1}{2}}^{(n)}(n_1 r_0)}{d r_0}.$$

Da aber n von q abhängt, muss überall die Summation nach q zuerst und dann die nach n ausgeführt werden; wir erhalten also

$$U = \sum_m (\mathfrak{Q}_m \cos m\psi + \mathfrak{Q}'_m \sin m\psi),$$

$$U_1 = \sum_m (\mathfrak{Q}_{1m} \cos m\psi + \mathfrak{Q}'_{1m} \sin m\psi),$$

wenn die Grössen $\mathfrak{Q}$ durch folgende Gleichungen definiert werden:

$$\mathfrak{Q}_m = \sum_n \sum_q (A^{(n)}_{mq} \cos nat + C^{(n)}_{mq} \sin nat) P^q_m(\cos\vartheta) R_{q+\frac{1}{2}}(nr),$$

$$\mathfrak{Q}'_m = \sum_n \sum_q (B^{(n)}_{mq} \cos nat + D^{(n)}_{mq} \sin nat) P^q_m(\cos\vartheta) R_{q+\frac{1}{2}}(nr),$$

$$\mathfrak{Q}_{1m} = \sum_n \sum_q (\alpha^{(n)}_{mq} \cos nat + \gamma^{(n)}_{mq} \sin nat) P^q_m(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r),$$

$$\mathfrak{Q}'_{1m} = \sum_n \sum_q (\beta^{(n)}_{mq} \cos nat + \delta^{(n)}_{mq} \sin nat) P^q_m(\cos\vartheta) \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r).$$

Zwischen den auftretenden Konstanten sollen nun folgende Relationen bestehen:

$$(137) \qquad A^{(n)}_{mq} R_{q+\frac{1}{2}}(n r_0) = \alpha^{(n)}_{mq} \mathfrak{S}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r_0), \quad \text{u. s. f.,}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{R(n r_0)}{\mathfrak{S}(n_1 r_0)} = \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C} = \frac{\delta}{D}.$$

Dann bestehen an der Oberfläche der Kugel die Relationen

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \psi} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta \partial \psi},$$

$$(138) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi \partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi \partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2}.$$

Lassen wir die Richtung ϱ mit r, μ mit ϑ, ν mit ψ zusammenfallen, so blieben nach (68) für die Gleichheit der Druckkomponenten noch die Bedingungen

$$N_\mu = N'_\mu, \quad N_\nu = N'_\nu$$

zu befriedigen, wo nun

$$N_\mu = a^2 \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} \right) \cosin(\nu, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \, \partial \nu} \cosin(\mu, x) \right],$$

$$N_\nu = a^2 \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} \right) \cosin(\mu, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \, \partial \nu} \cosin(\nu, x) \right].$$

Um hier ϑ und ψ einzuführen, ist die Bedeutung der Differentiale $d\varrho$, $d\mu$, $d\nu$ zu beachten (wie auch soeben in § 23 beim Rotationsellipsoide). Es ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot d\psi^2,$$

also wird:

$$d\varrho = dr, \quad d\mu = r\, d\vartheta, \quad d\nu = r \sin \vartheta \cdot d\psi.$$

Ferner ist

$$\cosin(\nu, x) = \cosin(\vartheta, x) = \cosin \vartheta,$$
$$\cosin(\mu, x) = \cosin(\psi, x) = 0.$$

Für die Gleichheit der Druckkomponenten bleiben also für $r = r_0$ noch die Bedingungen

(139)
$$a^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) = a_1^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} \right),$$
$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \, \partial \psi} = a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta \, \partial \psi}.$$

Nun folgt aus (135) und aus der zweiten Gleichung (133):

(140)
$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial r^2} \right)_{r = r_0}$$
$$= \sum_n \sum_q (A^{(n)}_{mq} \cosin nat + C^{(n)}_{mq} \sin nat) P^q_m(\cos\vartheta) \cdot \left(\frac{q(q+1)}{r_0^2} - n^2 \right) R_{q+\frac{1}{2}}(nr_0).$$

Bildet man auch $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \vartheta^2}$ für $r = r_0$, so ergibt sich kein Ausdruck, der sich mit dem vorhergehenden zusammenziehen liesse; da überdies schon die Bedingung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} \quad \text{für } r = r_0$$

durch die Festsetzungen (138) erfüllt ist, so kann die erste Gleichung (139) in die Bedingungen

$$(141)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} \quad \text{für } r = r_0$$

zerspalten werden. Wir setzen demgemäss

$$R_{q+\frac{1}{2}}(n r_0) \cdot A_{mq}^{(n)} = a_n \cdot \varepsilon_{mq} \qquad \text{u. s. f.}$$

oder:

$$\frac{\varepsilon_{mq}}{R(r_0)} = \frac{A_{mq}^{(n)}}{a_n} = \frac{B_{mq}^{(n)}}{b_n},$$

$$\frac{\eta_{mq}}{R(r_0)} = \frac{C_{mq}^{(n)}}{c_n} = \frac{D_{mq}^{(n)}}{d_n},$$

wo ε_{mq} und η_{mq} die aus der Theorie der Kugelfunktionen bekannten Konstanten bezeichnen, welche in der Gleichung

$$1 = \sum_m \sum_q (\varepsilon_{mq} \operatorname{cosin} m\psi + \eta_{mq} \sin m\psi) P_m^q (\cos \vartheta)$$

auftreten.[1]) Ebenso sei für die Funktion U_1

$$\frac{\varepsilon_{mq}}{\mathfrak{S}(r_0)} = \frac{\alpha_{mq}^{(n)}}{\alpha_n} = \frac{\beta_{mq}^{(n)}}{\beta_n}, \quad \frac{\eta_{mq}}{\mathfrak{S}(r_0)} = \frac{\gamma_{mq}^{(n)}}{\gamma_n} = \frac{\delta_{mq}^{(n)}}{\delta_n}.$$

Aus (140) und der entsprechenden Gleichung für $\mathfrak{Q}'$ erhält man dann

$$(142)\qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_{r=r_0}$$

$$= -\sum_n (a_n \operatorname{cosin} nat + c_n \sin nat) n^2 - \sum_n (c_n \operatorname{cosin} nat + d_n \sin nat) n^2$$

$$+ r_0^{-2} \sum_m \operatorname{cosin} m\psi \sum_n \sum_q q(q+1)(a_n \varepsilon_{qm} \operatorname{cosin} nat + c_n \eta_{qm} \sin nat)$$

$$+ r_0^{-2} \sum_m \sin m\psi \sum_n \sum_q q(q+1)(b_n \varepsilon_{qm} \operatorname{cosin} nat + d_n \eta_{qm} \sin nat).$$

Eine entsprechende Formel gilt für U_1. Um die dritte Gleichung (141) zu erfüllen, bleibt nur die Möglichkeit $q = 0$, denn andernfalls kämen wir mit den Relationen (138) in Kon-

[1]) Vgl. z. B. Heine a. a. O., Bd. 1, p. 327 ff.

flikt. Da aber im Interesse der Endlichkeit der Funktionen P_m^q die Zahl $m \leq q$ sein muss, so folgt auch $m = 0$, d. h. die Funktion U und damit die Schwingung im Innern der Kugel ist allein von der Entfernung des betreffenden Punktes vom Kugelmittelpunkte abhängig, insofern nach (16) und (130) die Komponenten der Elongationen durch die Gleichungen

$$(143) \quad u = 0, \quad v = -\frac{\partial U}{\partial r} \sin\vartheta \cos\psi, \quad w = \frac{\partial U}{\partial r} \sin\vartheta \sin\psi$$

dargestellt werden. Dadurch ist auch die zweite Gleichung (139) von selbst erfüllt.

Machen wir jetzt $m = 0$, $q = 0$, so wird

$$(144) \quad \begin{aligned} U &= \sum_n (a_n \operatorname{cosin} nat + b_n \sin nat) R_{\frac{1}{2}}(nr), \\ U_1 &= \sum_n (\alpha_n \operatorname{cosin} nat + \beta_n \sin nat)(R_{\frac{1}{2}}(n_1 r) S'_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0) - R'_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0) S_{\frac{1}{2}}(n_1 r)). \end{aligned}$$

Die Gleichung (135) ist zu ersetzen durch

$$(145) \qquad \frac{d R_{\frac{1}{2}}(n r_0)}{d r_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} n r_0 - n r_0 = 0,$$

von welcher bekannt ist, dass sie unendlich viele reelle Wurzeln besitzt (vgl. § 3 meiner früheren Arbeit), die sich mit wachsender Grösse den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2 r_0}$ nähern. Die Oberfläche bleibt jetzt in Ruhe und die Gleichheit der Druckkräfte liefert noch unter Benutzung von (104) und (141) die Bedingungen

$$(146) \qquad \begin{aligned} a^2 a_n R_{\frac{1}{2}}(n r_0) &= a_1^2 \alpha_n \mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0), \\ a^2 b_n R_{\frac{1}{2}}(n r_0) &= a_1^2 \beta_n \mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}(n_1 r_0), \end{aligned}$$

wo wieder $\mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}$ durch (136) definiert ist.

Bei der Kugel sind hiernach zwei wesentlich verschiedene Klassen von transversalen elastischen Schwingungen mit den Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie verträglich:

erstens die soeben durch die Gleichungen (143)—(146) dargestellten Schwingungen, bei denen die Kugel gleichzeitig Licht aussendet und empfängt (vgl. § 21),

zweitens die in § 4 eingehend behandelten Schwingungen, bei denen die Kugel nur Licht nach aussen ausstrahlt.[1])

Die Schwingungen der ersten Art können wir hier als Haupt-Serie, die der zweiten Art als Neben-Serie bezeichnen, denn die letzteren sind wesentlich schwächer, als die ersteren, da die zugehörige transscendente Gleichung für n komplexe Wurzeln liefert.

Lassen wir nun ein dreiaxiges Ellipsoid allmählich in eine Kugel stetig übergehen. Sämtliche möglichen Schwingungsdauern zerlegten sich in acht Gruppen, entsprechend den acht Klassen von eindeutigen Funktionen

$$\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \quad \ldots\ldots \mathfrak{G}_8,$$

die den aufgestellten Differentialgleichungen genügen konnten (vgl. § 17). Bei der Kugel fallen alle diese acht Funktionen in eine einzige zusammen; je acht Schwingungen, die beim Ellipsoide zusammengehören, vereinigen sich also beim Übergange zur Kugel in eine einzige.

Umgekehrt wird es sein, wenn man eine Kugel so deformiert, dass sie in ein dreiaxiges Ellipsoid übergeht: jede Schwingung bestimmter Wellenlänge, die bei der Kugel möglich war, zerspaltet sich dabei in acht neue Schwingungen.

---

[1]) In meiner früheren Arbeit kam es mir hauptsächlich darauf an zu zeigen, dass es möglich ist, bei einem kugelförmigen Körper die Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie wirklich zu erfüllen. Es ist dies in Uebereinstimmung mit dem von Jaerisch erlangten Resultate (Crells Journal Bd. 88 und für Rotationskörper Bd. 104); hier werden die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte gleich Null angenommen, was bei den von uns behandelten Problemen der Optik nicht zulässig ist.

Wenn man also ein kugelförmiges Atom durch Druck in ein Ellipsoid deformiert, so zerspaltet sich jede der Kugel zukommende Spektrallinie in acht Spektrallinien des Ellipsoids.

Bekanntlich werden nun die Spektrallinien eines Atoms bei dem sogenannten Zeeman-Effekt, d. h. durch Einwirkung starker Magnete, in der Tat in eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Linien zerspalten;[1]) es liegt hiernach nahe, die Ursache dieser Erscheinung in dem Drucke zu suchen, der im Lichtäther durch die Wirkung des Magneten nicht mehr gleichmässig verteilt ist, demnach eine Deformation des Atoms sehr wohl veranlassen kann.

Die einzelnen Linien, in welche eine Spektrallinie des ursprünglichen Atoms durch den Magneten zerfällt wird, erweisen sich dabei als polarisiert. Auch das ist mit unseren Formeln in Uebereinstimmung, denn eine elastische Schwingung, wie sie durch die Gleichungen (66) dargestellt wird, besteht in einer Pendelung um die X-Axe (also um eine Hauptaxe des Ellipsoids); dabei bewegt sich jeder Punkt des Raumes (innerhalb und ausserhalb des Ellipsoids) auf einer bestimmten Geraden (Tangente eines konfokalen Ellipsoids) hin und her; ein an diesem Punkte befindlicher Beobachter wird das Licht also stets polarisiert sehen. Die Richtung der Polarisation kann, je nachdem es sich um die Funktion U, V oder W handelt, eine verschiedene sein. Welche Axe des Ellipsoids dabei vorwiegend in Betracht kommt, wird von der Axen-Richtung des Magneten abhängen.

Wird eine Spektrallinie in weniger als acht Linien zerspalten, so wird man schliessen dürfen, dass die Gestalt der Kugel noch nicht hinreichend geändert wurde; beträgt aber die Anzahl der neuen Linien mehr als acht, so ist zu bedenken, dass wir über die Gestalt der Atome nicht genauer unterrichtet

[1]) Vgl. die ausführlichen Untersuchungen von Paschen und Runge: Ueber die Strahlung des Quecksilbers im magnetischen Felde; Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften 1902.

sind; es kann eine Kugel in ein Ellipsoid, aber vielleicht auch in eine höhere Fläche durch Druck verwandelt werden, bei der dann die Anzahl der charakteristischen Funktionen grösser als acht sein mag; es kann aber auch das Atom schon ursprünglich eine von der Kugel abweichende Form gehabt haben, wo dann die ganze Frage sich zunächst der genaueren mathematischen Behandlung entzieht. Jedenfalls wird man aber aus den vorstehenden Untersuchungen schliessen dürfen, dass die Anzahl der Spektrallinien eines Atoms von der äusseren Gestalt desselben wesentlich abhängt und dass die Anzahl sich ändern muss, wenn das Atom durch Druckkräfte im Lichtäther (z. B. im magnetischen Felde) eine Deformation erleidet.

Die Art der Abhängigkeit der Linien von der Gestalt wird im Folgenden an einigen Beispielen näher erläutert.

§ 26. Die Atome der ersten Mendelejeffschen Gruppe.

Wenn wir am Schlusse von § 23 und § 24 von Haupt- und Neben-Serien sprachen, so war damit schon die Anwendung angedeutet, die wir von den damaligen Entwicklungen auf die Spektra der Elemente vornehmen wollen, in welchen man nach Rydberg, Kayser und Runge solche Haupt- und Neben-Serien unterscheidet. Von den Genannten sind die ersten drei Mendelejeffschen Gruppen der Elemente einer besonders sorgfältigen Untersuchung unterworfen worden.

Zur ersten Gruppe gehören die Alkalien: Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium, Caesium. Die Spektra derselben sind durch folgende gemeinsame Eigenschaften zu charakterisieren.[1])

Unter einer Serie von Linien versteht man eine Reihe von Spektrallinien, die sich den ganzen Zahlen N in der Weise zuordnen lassen, dass der reziproke Wert der Wellenlängen λ sich durch eine Formel der Form

---

[1]) Vgl. Kayser und Runge: Über die Spektren der Elemente, dritter Abschnitt (Über die Linienspektren der Alkalien). Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften 1890.

(147) $$\lambda^{-1} \cdot 10^8 = A - B N^{-2} - C N^{-4},$$

wobei N meist die Werte $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ annehmen kann; die Konstanten A, B, C sind bei verschiedenen Elementen verschieden. Sie sind auch verschieden für verschiedene Serien, die im Spektrum eines und desselben Elements auftreten.

Bei jedem der genannten Elemente lassen sich eine Haupt-Serie und mehrere Neben-Serien unterscheiden. Die Haupt-Serie geht vom roten Ende des Spektrums bis ins Ultraviolett; sie besteht aus leicht umkehrbaren, scharfen Linien, enthält die hellsten Linien des Elements und diejenigen, welche am leichtesten erscheinen. Die Neben-Serien bestehen aus weniger hellen, meist unscharfen Linien, die weniger leicht erscheinen; während bei der Haupt-Serie die Linie $N = 3$ meist im roten Teile des Spektrums, die Linie $N = 4$ aber schon im ultravioletten Teile liegt, verteilen sich die Linien der Neben-Serien mit grösserer Gleichmässigkeit durch das ganze sichtbare und unsichtbare Spektrum.

Was den allgemeinen Charakter dieser Serien anbetrifft, so stimmt die Unterscheidung von Haupt- und Neben-Serien mit dem für das verlängerte Rotationsellipsoid gefundenen Resultate, denn im Falle $m = 0$ (Haupt-Serie) herrscht bei der Schwingung vollständige Symmetrie um die Rotationsaxe, und derartige Schwingungen werden bei jeder Rotationsfläche am leichtesten auftreten, die entsprechenden Linien also scharf und hell sein. Nach unseren Formeln werden sie bei kleinem Werte der Exzentrizität h oder bei grossem Werte der Schwingungszahl n durch die Formel

$$\frac{d J(\sqrt{\mu (r_0^2 - 1)})}{d r_0} = 0, \quad \text{wo } \mu = \frac{n}{h}$$

bestimmt, oder durch die weitere Näherungsformel (127). Dabei ist die Schwingungszahl n der Wellenlänge λ umgekehrt proportional. Für kleine Wellenlängen nähern sich die Wurzeln der Gleichung (127) den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$; deshalb wird man angenähert

(148) $$\sqrt{\lambda^{-1}} = a_0 (2N+1)\frac{\pi}{4} - \frac{b_1}{N} - \frac{b_2}{N^2} - \cdots\cdots$$

setzen können. Wenn diese Gleichung auch von der obigen scheinbar ganz verschieden ist, kann doch eine praktische Übereinstimmung hergestellt werden, wie ich in § 14 erörtert habe; man sieht es auch dadurch, dass die Gleichung (147) nur für eine gewisse Anzahl ganzzahliger Werte gelten soll, also nicht wesentlich geändert wird, wenn man sie durch eine Gleichung der Form

(149) $$\lambda^{-1} = A - BN^{-2} - Cn^{-4} + \varphi(N)\cdot(N-3)(N-4)\ldots(N-9)$$

ersetzt, wo $\varphi(N)$ eine willkürliche Funktion von N bezeichnet, die an den Stellen $N = 3, 4, \ldots. 9$ nicht unendlich gross wird.[1])

Für $m > 0$ ist die Symmetrie gestört, die Linien erscheinen schwächer; für $m = 1, 2, 3 \ldots.$ hätte man unendlich viele Serien zu erwarten. Für kleine Werte der Exzentrizität h sind sie beim verlängerten Rotationsellipsoide nach § 24 durch die Gleichung

$$\frac{dR}{dt} = 0, \quad \text{wo } R = t^{\frac{m}{2}} \frac{d^m J(\sqrt{t})}{dt^m}, \quad t = \mu(r_0^2 - 1),$$

näherungsweise dargestellt. Benutzt man auch hier den Näherungswert (126), so ergibt sich eine Gleichung von der Form

(150) $$\operatorname{tang} \xi = F(\xi),$$

wo ξ dieselbe Bedeutung hat, wie in (127) und wo $F(\xi)$ eine rationale Funktion bezeichnet, deren Grad mit m wächst. Denkt man sich die beiden Kurven

$$\eta = \operatorname{tang} \xi \quad \text{und} \quad \eta = F(\xi)$$

in der ξ-η-Ebene gezeichnet, so ist klar, dass diese Gleichung für endliche Werte von ξ weit mehr und dichter gelegene Wurzeln liefert, als die Gleichung (127); für $\xi = \infty$ aber sind beide Gleichungen nicht mehr zu unterscheiden. Mit wach-

---

[1]) Auf die Frage, wie man diese Funktion $\varphi(N)$ in einzelnen Fällen zu wählen hat, denke ich demnächst zurückzukommen.

sendem m verschieben sich daher die Neben-Serien nach dem roten Ende des Spektrums, während ihr Verlauf im ultravioletten Teile gleichmässig mit demjenigen der Haupt-Serie verbleibt. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit den Beobachtungen an den Spektren der Alkalien.

Beim Lithium sind zwei Neben-Serien beobachtet worden, beim Natrium ebenfalls zwei und der Anfang einer dritten, beim Kalium zwei Neben-Serien, beim Rubidium eine Neben-Serie und wahrscheinlich einzelne Linien einer zweiten, beim Caesium ebenso.

Nach ihrem allgemeinen Typus verhalten sich hiernach die Linienspektra der Alkalien so, als wenn ihre Atome die Gestalt von verlängerten Rotationsellipsoiden besässen.

Die obigen Angaben über die verschiedenen Serien sind allerdings nur beim Lithium genau erfüllt. Bei den übrigen Alkalien sind die Linien der Neben-Serien in je zwei zerspalten. Man könnte daraus schliessen, dass die Zahl der beobachteten Neben-Serien (die theoretisch unendlich gross sein soll) einfach zu verdoppeln ist. Dagegen spricht aber, dass bei Kalium, Rubidium und Caesium auch die Linien der Haupt-Serie verdoppelt sind und dass die einzelnen Linien solcher Paare in eigentümlicher Beziehung zu einander stehen. Wird nämlich die Serie durch eine Formel der Form (147) dargestellt, so gilt für eine zweite zugehörige Serie eine Formel der Form

$$(150) \qquad 10^8 \lambda_1^{-1} = A_1 - B_1 N^{-2} - C_1 N^{-4},$$

wo A_1 von A verschieden ist, B_1 und C_1 aber mit den in (147) vorkommenden Konstanten B und C genau oder wenigstens nahezu übereinstimmen; so ist z. B. für die erste Neben-Serie des Natriums

$$A = 24549{,}12, \quad B = 120726, \quad C = 197891,$$

$$A_1 = 24565{,}83, \quad B_1 = 120715, \quad C_1 = 197935.$$

Durch die Gleichungen (147) und (150) werden jeder Zahl N zwei Linien zugeordnet, die zusammen eines der besprochenen Paare bilden.

In solcher Weise verdoppelt treten aber beim Kalium, Rubidium und Caesium auch die Linien der Haupt-Serie auf; da es nun nur eine Haupt-Serie beim Rotations-Ellipsoide gibt, so müssen wir schliessen, dass die betreffenden Atome nur näherungsweise die Gestalt von Rotationsellipsoiden haben, und dass hierdurch sowohl bei der Haupt-Serie als bei den Neben-Serien die Zerspaltung der Linien in Paare gemäss den obigen Erörterungen in § 25 veranlasst wird.

Da B und C mit B_1 und C_1 nahezu übereinstimmen, so ist nahezu

$$10^8 (\lambda^{-1} - \lambda_1^{-1}) = A - A_1,$$

diese „Schwingungs-Differenz" also nahezu konstant, d. h. unabhängig von N. Diese Differenz ist aber nicht nur bei einer einzelnen Serie konstant, sondern hat auch bei allen Serien desselben Elements ungefähr denselben Wert und zwar

172 bei Na, 568 bei K, 2344 bei Rb, 5450 bei Cs.

Nun sind die Atomgewichte dieser Elemente bezw. gleich

22,995, 33,09, 85,2, 132,7

und es ist nahezu

$$(151) \quad \begin{aligned} \sqrt{172} &= 1,706 \cdot 22,995, \quad & \sqrt{568} &= 1,706 \cdot 33,09, \\ \sqrt{2344} &= 1,706 \cdot 85,2 \quad, & \sqrt{5450} &= 1,706 \cdot 132,7, \end{aligned}$$

d. h. es besteht das von Rydberg und Kayser und Runge bemerkte Gesetz, dass jene Schwingungsdifferenzen den Quadraten der Atom-Gewichte nahezu proportional sind.

Bedeutet λ die Wellenlänge einer bestimmten Schwingung eines Rotationsellipsoids, bezeichnen ferner λ_1 und λ_2 diejenigen Wellenlängen, welche daraus entstehen, wenn das Rotationsellipsoid sich in ein dreiaxiges verwandelt, so ist:

$$(152)\qquad \begin{aligned} \lambda_1^{-1} &= \lambda^{-1} + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^4 + \cdots \\ \lambda_2^{-1} &= \lambda^{-1} + a_1'\varepsilon^2 + a_2'\varepsilon^4 + \cdots, \end{aligned}$$

wenn ε die numerische Exzentrizität derjenigen Ellipse bezeichnet, in welche der Äquator des Rotationsellipsoids verwandelt wird, vorausgesetzt, dass die lange Axe des Ellipsoids sich nicht wesentlich ändert. Die Schwingungsdifferenz $\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}$ wird demnach dem Quadrate der numerischen Exzentrizität näherungsweise proportional; der Vergleich mit dem erwähnten Gesetze, das in den Gleichungen (151) seinen Ausdruck findet, führt dann zu folgendem Resultate:

Die Atome der Alkalien haben die Gestalt von Ellipsoiden, deren eine Axe die beiden anderen an Länge wesentlich übertrifft; die Exzentrizität des zu dieser ausgezeichneten Axe senkrechten Hauptschnittes ist dem Atomgewichte proportional.

Dass in der Tat in (152) nur gerade Potenzen von ε vorkommen können, folgt daraus, dass die Funktionen $\mathfrak{G}$, durch welche die Werte λ_1 und λ_2 bestimmt werden, als Integrale der Gleichung (19) nur von $\varkappa^2 = \frac{b^2}{c^2}$ und $\frac{\varrho_0^2}{c^2}$ abhängen, wenn die beiden kleineren Axen des Ellipsoids mit b und c, die grosse Axe mit ϱ_0 bezeichnet werden. Indem wir das Verhältnis $\frac{\varrho_0}{c}$ in die Konstanten a_i, a_i', eingehen lassen, setzen wir voraus, dass das Verhältnis der grossen zur kleinen Axe des Rotationsellipsoids bei den verschiedenen Alkalien dasselbe sei.

Die Druckkräfte, welche im Lichtäther tätig sind, um das Ellipsoid zu deformieren, können von der elektrischen Erregung herrühren, da ja die Beobachtungen zwischen den Polen eines Lichtbogens angestellt werden. Sie können aber auch in dem Widerstande ihren Grund haben, den das Atom bei seiner Bewegung im Lichtäther findet. Dieser Äther verhält sich gegenüber den schnellen Bewegungen elastischer Schwingungen wie ein starrer Körper, aber (nach Lord Kelvin)

gegenüber den vergleichsweise sehr langsamen Bewegungen der Atome wie eine Flüssigkeit; der Widerstand aber, den letztere auf eine bewegte Kugel ausübt, ist bekanntlich dem Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge proportional. Haben nun die Atome verschiedener Elemente gleiche Dichte, wie es nach meinen früheren Untersuchungen (vgl. auch unten § 27) wahrscheinlich ist, so ist dieser Widerstand dem Atom-Gewichte proportional. Umgekehrt würde die Exzentrizität ε des deformierten Rotationsellipsoids dem Widerstande proportional sein, den das Atom bei seiner Bewegung im Lichtäther erleidet, und dadurch das obige empirische Gesetz verständlich werden.

§ 27. Die Atome der alkalischen Erden.

Mit den Spektren der alkalischen Erden (Magnesium, Calcium, Strontium, Baryum) habe ich mich schon in meiner früheren Arbeit eingehend beschäftigt. Über das Beryllium liegen noch zu wenige Beobachtungen vor; es bleibt deshalb von der Betrachtung ausgeschlossen. Unter der Annahme, dass das einzelne Atom die Gestalt einer Kugel habe und dass die Dichte der Atome bei verschiedenen Elementen denselben Wert habe, hatte ich in § 6 zwischen den Wellenlängen λ und λ' und den Atomgewichten G und G' zweier verschiedenen Elemente für kleine Wellenlängen das in der Formel

$$(153) \qquad \frac{\lambda}{\lambda'} = \sqrt[3]{\frac{G}{G'}}$$

ausgesprochene Gesetz als näherungsweise richtig nachgewiesen. Die Prüfung dieser Formel an den Beobachtungen, wie sie infolge der Arbeiten von Kayser und Runge vorliegen, ergab, dass dieses Gesetz bei den alkalischen Erden sich bestätigt. Man konnte so aus jeder Linie des einen Elements eine Linie des andern berechnen; und im Allgemeinen entsprach dabei einer Serie des einen Elements wieder eine Serie des andern. Hieraus schliessen wir:

Die Gestalt der Atome weicht bei den alkalischen Erden wenig von der Kugel ab; die innere Dichte der Atome ist bei verschiedenen Elementen dieselbe.

Da nach den vorhergehenden Untersuchungen die Verteilung der Linien im Spektrum ganz wesentlich von der Gestalt der Atome abhängt, werden wir die Abweichungen, welche sich in den früheren Tabellen finden, jetzt dadurch erklären, dass die Kugel durch ein dreiaxiges Ellipsoid zu ersetzen ist. Insbesondere wird es so erklärlich, dass in jenen Tabellen öfter bei dem gegenseitigen Entsprechen der Linien verschiedener Spektra die Serien durch einander geworfen erscheinen; denn wir haben in § 25 gesehen, dass sich bei der Kugel nur eine Serie ergibt; es ist also unmöglich, unter Voraussetzung der Kugelgestalt die verschiedenen Serien aus einander zu halten.

Die Formel (153) behält aber ihren Wert, da sie die vielfach beobachtete Tatsache, dass die augenscheinlich analogen Linien in den Spektren verwandter Elemente sich mit wachsendem Atomgewichte in Richtung auf das rote Ende des Spektrums verschieben, in eine mathematische Formel kleidet. In § 11 und § 12 versuchte ich die bei den Alkalien auftretenden grösseren Abweichungen durch Annahme verschiedener innerer Dichte der Atome zu erklären. Nachdem wir jetzt in § 26 gesehen haben, dass die Gestalt der Atome der Alkalien von der Kugel stark abweicht, werden wir an dieser Annahme verschiedener innerer Dichten nicht mehr festzuhalten brauchen. Wir werden vielmehr in der Annahme bestärkt, die meinen damaligen Betrachtungen zu Grunde lag, dass es nur eine Art von Materie gibt und dass sich die chemischen Elemente nur durch Gestalt und Grösse ihrer Atome unterscheiden.

Bei den alkalischen Erden fehlt die Haupt-Serie; daraus schliessen wir, dass von den drei Axen des Ellipsoids keine durch ihre Länge vor den beiden anderen wesentlich ausgezeichnet ist. Bei Magnesium, Calcium und Strontium treten zwei Nebenserien auf; jede Linie zerlegt sich in drei zusammengehörige Linien. Man könnte diese Verhältnisse so auffassen,

als ob im Ganzen sechs verschiedene Serien in Betracht kommen; da aber bei je drei zusammengehörigen Linien wieder das Gesetz von der Konstanz der Schwingungsdifferenzen näherungsweise erfüllt ist, werden wir das Auftreten der Linien-Triplets in ähnlicher Weise erklären, wie das Auftreten der Doppellinien bei den Alkalien.

Die Schwingungsdifferenzen sind jetzt den Quadraten der Atomgewichte nur noch der Grössen-Ordnung nach proportional; wir werden daraus schliessen, dass es nicht möglich ist, durch eine einzelne Grösse ε die Abweichung der Gestalt vom Rotationsellipsoide bei den verschiedenen Elementen zu unterscheiden. Während also bei den Alkalien den Hauptaxen $2\varrho_0$, $2b$, $2c$ des Ellipsoids die Eigenschaft zukam, dass ϱ_0 die beiden anderen wesentlich an Grösse übertraf, dass b nahezu gleich c war, und dass das Verhältnis $\varrho_0 : b$ (oder $\varrho_0 : c$) bei allen Alkalien denselben Wert hatte, erscheinen die drei Axen bei den alkalischen Erden als wesentlich gleich berechtigt.

Beim Baryum sind keine Serien beobachtet worden; das Mittel, die Serien aus der grossen Anzahl von Linien auszuscheiden, besteht nämlich darin, dass man Linien-Paare oder Linien-Triplets mit konstanter Schwingungsdifferenz heraussucht; nach unserer Auffassung ist das Auftreten solcher Paare dadurch bedingt, dass die Abweichung von der Gestalt eines Rotationsellipsoids nur gering ist; wird diese Abweichung grösser, so versagt jenes Mittel, wenn es auch noch mittelst der Formel (153) gelingt, im Baryum Linien zusammen zu ordnen, die annähernd eine Serie bilden (vgl. § 9 meiner hinteren Arbeit). Das Fehlen der Serien-Paare im Baryum zeigt uns demnach, dass dessen Atomgestalt am meisten von einem Rotationsellipsoide abweicht.

Da bei der Kugel nur eine Serie auftrat, und da die Atome der alkalischen Erden nahezu kugelförmig sind, so haben wir uns vorzustellen, dass diese eine Kugel-Serie sich in die beiden Neben-Serien aufgelöst hat, ohne dass eine Haupt-Serie (welche Symmetrie um eine bevorzugte Axe voraussetzt) erscheint. Die

stärkere Abweichung von der Gestalt eines Rotationskörpers wird auch durch das Auftreten von dreifachen Linien bestätigt, während bei den Alkalien sich die Linien nur verdoppelten.

§ 28. Die Atome einiger Metalle.

Zu den Elementen der ersten Mendelejeffschen Gruppe gehören neben den Alkalien die Metalle Kupfer, Silber und Gold; zu denen der zweiten Gruppe die Metalle Cadmium, Zink, Quecksilber. Von letzteren habe ich früher gezeigt (§ 8 und § 10), dass die Formel (153) auf sie mit besonders gutem Erfolge angewandt werden kann. Die Gestalt ihrer Atome wird daher nahezu kugelförmig sein. Auch bei Kupfer, Silber und Gold (a. a. § 13) wird die Formel (153) noch nicht unbrauchbar; auch für sie wird demnach analoges gelten.

Bei Kupfer und Silber finden Kayser und Runge wieder zwei Neben-Serien, bestehend aus Linien-Paaren mit konstanter Schwingungsdifferenz, bei Zink, Cadmium und Quecksilber ebenfalls zwei Neben-Serien, jede aus Triplets von Linien zusammengesetzt. Hierdurch ist die Zugehörigkeit der ersteren Metalle zu den Alkalien, der letzteren zu den alkalischen Erden auch spektralanalytisch zum Ausdrucke gebracht. Die Atome der letzteren weichen (wegen Auftretens der Triplets) mehr von der Kugelform ab als die der ersteren.

Den Spektren aller sechs Metalle ist aber eine Eigenschaft gemeinsam, die sie von den übrigen Elementen beider Gruppen trennen. „Von den Elementen Kupfer, Silber und Gold besitzt jedes im Ultravioletten ein starkes umgekehrtes Paar mit der dem Elemente eigentümlichen Schwingungsdifferenz; diese Linien sind die stärksten des ganzen Spektrums. Ob man in ihnen das erste Glied einer Haupt-Serie sehen soll, ist zweifelhaft; da kein anderes entsprechendes Paar beobachtet ist, lässt sich eine solche Hypothese nicht kontrollieren. Ebenso gut ist es möglich, dass wir ein isoliertes Linienpaar vor uns haben, welches dieselbe Rolle spielt wie die isolierten Linien in den Spektren der alkalischen Erden."

Ebenso hat von den Elementen Zink, Cadmium und Quecksilber jedes eine sehr stark verbreiterte und umgekehrte Linie im Ultravioletten, die stärkste des ganzen Spektrums.

Die Rolle dieser isolierten hellen Linien dürfte durch unsere Untersuchungen in § 24 aufgeklärt werden. Beim Rotationsellipsoide werden die stärksten Linien diejenigen sein, die einem zur Axe symmetrischen Schwingungszustande ent-entsprechen; diesem entspricht aber beim abgeplatteten Rotationsellipsoide mit geringer Exzentrizität, wie wir sahen, in der Tat nur eine mögliche Wellenlänge. Die Linie wird sich zerspalten, wenn das Ellipsoid nur annähernd eine Rotationsfläche ist. Wir schliessen also:

Die Atome der Metalle Kupfer, Silber, Gold, Zink, Cadmium, Quecksilber haben annähernd die Gestalt von abgeplatteten Rotationsellipsoiden; die Atome der letzteren drei sind fast kugelförmig.

Auch beim Magnesium zeigt sich die charakteristische isolierte Linie im Ultravioletten; von den alkalischen Erden nähert sich also die Gestalt des Magnesium-Atoms am meisten einem abgeplatteten Rotationsellipsoide.

Die Schwingungsdifferenzen bei den Linien derselben Serie sind hier, wie bei den alkalischen Erden, den Quadraten der Atomgewichte nur der Grössenordnung nach proportional.

Letzteres gilt auch für die Elemente Aluminium, Indium und Thallium, die der dritten Mendelejeffschsn Gruppe angehören.[1]) Auch bei ihnen sind je zwei Neben-Serien beobachtet worden; ausserdem gibt es einzelne isolierte Linienpaare mit konstanter Schwingungsdifferenz; wir haben also dreiaxige Ellipsoide, die noch eine Annäherung an abgeplattete Rotationsellipsoide aufweisen.

Wenn wir bei den Atomen der genauer untersuchten Elemente wesentliche Abweichungen von der gewöhnlich gedachten

---

[1]) Vgl. Kayser und Runge: Über die Spektren der Elemente, sechster Abschnitt; Abhandlungen der Berliner Akademie 1892.

Kugelgestalt finden, so ist der Grund für das Fehlen der Kugelgestalt vielleicht in Folgendem zu suchen. Ein kugelförmiges Atom ist nach § 25 imstande, seine innere Energie frei in den Lichtäther auszuströmen. Gerät aber ein ellipsoidisch gestaltetes Atom in Schwingungen, so ist das nur möglich, wenn gleichzeitig der Aether einen Theil seiner Schwingungen dem Atome zurückgibt, indem nach § 21 Funktionen von $r - at$ und $r + at$ gleichzeitig auftreten müssen. Ein solches Atom gibt also Energie an den Aether ab und empfängt stets gleichzeitig Energie zurück; ein kugelig gestaltetes Atom dagegen würde seine innere Energie gänzlich verlieren können, folglich allen äusseren Einwirkungen gegenüber sich apathisch verhalten, und sich am Spiele der chemischen und physikalischen Kräfte nicht mehr beteiligen, bis es durch Stösse von neuem erregt wird. In der That kann man diese Kräfte in ihrer Abhängigkeit von der inneren Energie der Atome mathematisch darstellen, worauf ich bei anderer Gelegenheit eingehen werde.[1])

§ 29. Über die Serien-Formeln, insbesondere beim Wasserstoffe.

Durch vorstehende Untersuchungen ist meine früher ausgesprochene Ansicht über die Natur der Serien (vgl. § 5 und § 14) im Ganzen bestätigt etc.: die Linien jeder Serie entsprechen den Wurzeln einer gewissen transscendenten Gleichung. Bei Annahme kugelförmiger Atome erschien es notwendig, verschiedene Arten von Grenzbedingungen in Betracht zu ziehen, um eine entsprechende Anzahl von transscendenten Gleichungen zu erhalten. Bei den Ellipsoiden sehen wir aber, dass die Theorie sogar auf unendlich viele solche Gleichungen führt, die sich in Gruppen ordnen. Wenn also bei der früheren Auffassung das Zusammenlaufen verschiedener Serien an einer Stelle oder an benachbarten Stellen als etwas zufälliges erschien, so erscheint dies bei den

---

[1]) Im Sommer-Semester 1902 habe ich meine entsprechenden Überlegungen in einer Vorlesung näher entwickelt.

jetzt aufgestellten Gleichungssystemen als natürlich, denn mit abnehmender Wellenlänge (zunehmender Schwingungszahl) kann man die Wurzeln dieser verschiedenen Gleichungen immer weniger von einander unterscheiden. Immerhin bleibt auch jetzt die Möglichkeit, dass neben den von uns studierten Schwingungen, die den Forderungen der Elastizitätstheorie streng genügen, noch andere auftreten, bei denen infolge der (z. B. elektrischen) Erregung des umgebenden Lichtäthers die Druckkräfte an der Oberfläche nicht ausgeglichen sind.

Jedenfalls bleiben die früheren Angaben über die wahrscheinliche allgemeine Form der Serienformel gültig, denn allen transscendenten Gleichungen, die auftreten, ist die Eigenschaft gemeinsam, dass ihre Wurzeln bei abnehmender Wellenlänge den ganzen Vielfachen gewisser Konstanten proportional werden, wie in Gleichung (148); und die Abweichung von der empirischen Formel (147) wird durch die Hülfs-Formel (149) hinreichend erklärt.

Die erwähnte empirische Formel verdankt ihre Entstehung dem einfachen Balmerschen Gesetze, nach dem sich die Wellenlängen des Wasserstoffs aus der Gleichung

$$\lambda^{-1} = A\left(1 - \frac{4}{N^2}\right) \tag{154}$$

für $N = 3, 4, 5 \ldots 15$ mit überraschender Genauigkeit berechnen lassen. Diese Tatsache wird man ungern einem Zufalle zuschreiben wollen, und deshalb soll im Folgenden noch eine Erklärung versucht werden.

Wir haben in § 24 das verlängerte Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exzentrizität h untersucht. Setzt man:

$$\frac{n}{h} = \mu \quad \text{und} \quad \mu\,\varrho = t, \tag{155}$$

wo ϱ die in (94) angegebene Bedeutung hat, so kam es auf die Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$4\,t\,(t+\mu)\frac{d^2\mathfrak{R}}{d\,t^2} + 2\,[t + (2m+2)(t+\mu)]\frac{d\,\mathfrak{R}}{d\,t}$$
$$+ [\mu\,t + m\,(m+1) + \mathfrak{A}]\,\mathfrak{R} = 0.$$

Für grosse Werte von μ reduzierte sie sich auf die oben behandelte Gleichung (123); für kleine Werte von μ dagegen erhalten wir

$$(156)\quad t^2 \frac{d^2 \mathfrak{R}}{d t^2} + \tfrac{1}{2} t [2m + 3] \frac{d \mathfrak{R}}{d t} + \tfrac{1}{4} [m(m+1) + \mathfrak{A}] \mathfrak{R} = 0.$$

Bekanntlich sind die partikulären Integrale der Gleichung

$$t^2 \frac{d^2 y}{d t^2} + a t \frac{d y}{d t} + b y = 0$$

durch die Ausdrücke [1])

$$(157)\qquad y_1 = t^{-\alpha+\beta} \quad \text{und} \quad y_2 = t^{-\alpha-\beta}$$

gegeben, wenn

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}.$$

Bei uns ist

$$a = m + \tfrac{3}{2}, \quad b = \tfrac{1}{4} m (m+1) + \tfrac{1}{4} \mathfrak{A}.$$

Hier bedeutet m eine ganze Zahl; $\mathfrak{A}$ ist so zu bestimmen, dass das eine Integral der Differentialgleichung (92) für $h = \infty$ endlich bleibt. Letztere geht aber dadurch in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d \vartheta^2} + \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \frac{d y}{d \vartheta} - \left(\mathfrak{A} + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}\right) y = 0$$

über, welche mit der Gleichung für die „Zugeordneten" der Kugelfunktionen übereinstimmt,[2]) wenn man $\mathfrak{A} = -n(n+1)$ setzt, unter n eine ganze Zahl verstanden. Dann wird

$$(158)\qquad \alpha = \frac{2m+1}{4}, \quad \beta = \frac{2n+1}{4},$$

und es muss nach der Theorie der Kugelfunktionen $m < n$ sein. Es ist ferner nach (94) die gesuchte Funktion R durch die Gleichung

---

[1]) Auch diese Gleichung ist ein Grenzfall der Besselschen Gleichung, vgl. Lommel, Math. Annalen Bd. 3, p. 487.

[2]) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I, p. 216.

$$R = (r^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R} = \left(\frac{t}{\mu}\right)^{\frac{m}{2}} \mathfrak{R}$$

gegeben, wo $\mathfrak{R}$ sich aus den Funktionen (157) linear zusammensetzt. Damit $\mathfrak{R}$ endlich bleibt für $r = 1$, d. h. $t = 0$, ist nur das eine Integral y_1 brauchbar, folglich bis auf einen konstanten Faktor

$$R = t^{\frac{n}{2}}.$$

Die Gleichung (108) oder $\frac{dR}{dt} = 0$ führt hier also nicht zu brauchbaren Resultaten.

Anders ist es, wenn wir einen entsprechenden Grenzübergang für das abgeplattete Rotationsellipsoid durchführen. Hier müssen wir auf die Gleichung (120) zurückgehen. Setzen wir

$$\text{(159)} \qquad \frac{n}{\mathfrak{h}} = \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m}\,\varrho = \mathfrak{t},$$

so ergibt sich

$$4\,\mathfrak{t}(\mathfrak{t} - \mathfrak{m}) \frac{d^2 \mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}^2} + 2\,[\mathfrak{t} + (2\,m + 2)(\mathfrak{t} - \mathfrak{m})] \frac{d\,\mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}} + [m\,(m+1) + \mathfrak{m}\,\mathfrak{t} + \mathfrak{A}]\,\mathfrak{R}^* = 0$$

und hieraus für $\mathfrak{m} = 0$:

$$\text{(160)} \quad 4\,\mathfrak{t}^2 + \frac{d^2 \mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}^2} + 2\mathfrak{t}(2m+3)\frac{d\,\mathfrak{R}^*}{d\,\mathfrak{t}} + [m(m+1) + \mathfrak{A}]\,\mathfrak{R}^* = 0.$$

Hier bedeutet m eine ganze positive Zahl, und $\mathfrak{A}$ ist so zu bestimmen, dass die zweite Gleichung (118) für $\mathfrak{h} = \infty$, d. h. $\mathfrak{m} = 0$, eine eindeutige Lösung zulässt. Die gefundene Gleichung (160) ist zwar von (156) nicht verschieden; aber für die Bestimmung von $\mathfrak{A}$ bleibt eine andere Möglichkeit, als die oben benutzte. Die Kugelfunktionen bleiben nämlich brauchbar, wenn

$$n = -\tfrac{1}{2} + i\,\mu$$

gewählt wird; sie gehen dann in die Mehlerschen Kegelfunktionen über. Es wird:

$$\mathfrak{A} = -n(n+1) = -(\tfrac{1}{2} - i\mu)(\tfrac{1}{2} + i\mu) = -(\tfrac{1}{4} + \mu^2)$$

und somit nach (158)

$$\alpha = \frac{2m+1}{4}, \quad \beta = \frac{\mu i}{2}.$$

Aus den partikulären Integralen (157) kann man zwei reelle lineare Kombinationen herleiten

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = t^{-\frac{1}{4} - \frac{m}{2}} \cos\left(\frac{\mu}{2} \log t\right),$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = t^{-\frac{1}{4} - \frac{m}{2}} \sin\left(\frac{\mu}{2} \log t\right).$$

Beim verlängerten Rotationsellipsoide war $t = \mu(r^2 - 1)$, also gleich Null für den Grenzfall $r = 1$; es wären dann diese Integrale und ebenso die daraus hervorgehenden Funktionen

$$(161) \qquad \begin{aligned} R &= t^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\mu}{2} \log t\right) = \frac{t^{\frac{\mu}{2}i} + t^{-\frac{\mu}{2}i}}{2\sqrt[4]{t}} \\ S &= t^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{\mu}{2} \log t\right) = \frac{t^{\frac{\mu}{2}i} - t^{-\frac{\mu}{2}i}}{2i\sqrt[4]{t}} \end{aligned}$$

unendlich für $t = 0$; nur beim abgeplatteten Rotationsellipsoide ($r = 0$) kann daher der jetzt vorliegende Fall in Betracht kommen.

Die Zahl μ ist zunächst noch willkürlich; um sie genauer zu bestimmen, müssen wir überlegen, wie die Integrale (161) bei genauerer Durchführung zu Stande kommen. Im Allgemeinen hatten wir eindeutige Funktionen, die sich nach Potenzen von $r = \cos\vartheta$ entwickeln lassen, ausserdem eine Potenz von $\sin\vartheta$ als Faktor enthalten können. Da aber bei einem sehr stark abgeplatteten Ellipsoide die Haupt-Serie (mit zur Axe symmetrischen Schwingungen) allein von Bedeutung sein kann, so kommt hier nur der Fall $m = 0$ in Betracht, bei dem ein solcher Faktor $\sin^m\vartheta$ nicht auftritt. Wenn nun jetzt Entwicklungen nach Potenzen von $\log t$ vorkommen, so ist

dies nur dadurch möglich, dass der Grenzwert einer gewissen Potenzreihe eben auf einen solchen Logarithmus führt. Man kann daher etwa auf die Formel

$$\mu \log t = \log t^\mu = \lim_{m=\infty} (m\, t^{\frac{\mu}{m}} - 1) = \lim_{m=\infty} [m\, (t^\mu + \varphi(t))^{\frac{1}{m}} - 1]$$

Bezug nehmen, wo $\varphi(t)$ eine Funktion ist, die für $m = \infty$ nicht in Betracht kommt.

Es soll R eine eindeutige Funktion von $\mathfrak{r}$ und $\sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1}$, und der zugehörige Faktor, der den Winkel ϑ enthält und in den betreffenden Reihen-Entwicklungen der Funktion U hinzutrat, eine eindeutige Funktion von $r = \cos\vartheta$ und $\sqrt{1 - r^2} = \sin\vartheta$ sein. Dementsprechend können ganze Potenzen von t und $\sqrt{t} = \sqrt{r^2 - 1}$, ebenso von $\mathfrak{t}$ und $\sqrt{\mathfrak{t}} = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1}$ auftreten. Wenn also auf diese Weise der Logarithmus in die Funktionen (161) beim Grenzübergange eingeht, so muss μ oder wenigstens 2μ eine ganze positive Zahl sein.

Die vorstehende Überlegung lässt vielleicht noch andere Möglichkeiten offen; deshalb habe ich oben (p. 92) nur von einem Versuche für den Fall $\mathfrak{h} = \infty$ gesprochen. Immerhin wird der gemachte Schluss durch den asymptotischen Wert der Kegelfunktion[1])

$$\overset{\bullet}{\mathfrak{f}}{}^\mu (\operatorname{cosin} \vartheta) = \frac{2}{\sqrt{\mu \pi}} \frac{\operatorname{cosin}\left(\mu \vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{e^\vartheta - e^{-\vartheta}}} \quad (\mu = \infty)$$

bestätigt; denn für sehr grosse Werte der Zahl μ muss auch der Zähler dieses Ausdruckes sich nach Potenzen von $\cos\vartheta$ so entwickeln lassen, dass die Reihe für jeden Wert von ϑ konvergiert; und zu dem Zwecke muss μ eine ganze Zahl oder eine rationale Zahl mit dem Nenner 2 sein.

Wir haben noch zu entscheiden, welche der beiden Funksionen (161) für das Innere des stark abgeplatteten Sphäroids zu wählen ist. Da $\mathfrak{h}$ sehr gross ist, so ist nach (159) $\mathfrak{t}$ sehr klein vorausgesetzt; wir können also die Funktionen (161)

---

1) Vgl. Heine a. a. O., Bd. II, p. 224.

nicht durch ihr Verhalten bei sehr grossen Werten von t unterscheiden; wohl aber müssen sie bei kleinen Werten von t unseren bisherigen Resultaten entsprechen. Die durch (119) eingeführte Funktion R war für $\varrho = \mathfrak{m}^{-1} = \infty$, d. h. $\mathfrak{t} = 1$, nicht gleich Null; die in (161) gegebene Funktion S dagegen verschwindet für $\mathfrak{t} = 1$; wir wollen deshalb die Funktion R zur Darstellung der inneren Schwingungen wählen.

Um die Schwingungsdauern der letzteren zu bestimmen, haben wir nach (108) die Gleichung

$$\frac{dR}{d\mathfrak{t}} = 0,$$

in der nun $\mathfrak{m} = \frac{n}{\mathfrak{h}}$ als Unbekannte zu betrachten ist, aufzulösen. Dieses gibt

$$\left[\left(-\tfrac{1}{4} + \frac{\mu}{2} i\right)\mathfrak{t}^{\frac{\mu}{2} i} - \left(\tfrac{1}{4} + \frac{\mu}{2} i\right)\mathfrak{t}^{-\frac{\mu}{2} i}\right]_{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0} = 0,$$

oder

$$\mathfrak{t}_0^{\mu i} = \frac{\mu i + \frac{1}{2}}{\mu i - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\mu i - \frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{n}{\mathfrak{h}}(\mathfrak{r}_0^2 + 1) = \left(1 + \frac{1}{\mu i - \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\mu i}},$$

oder in erster Annäherung

$$\frac{n}{\mathfrak{h}}(\mathfrak{r}_0^2 + 1) = 1 + \frac{1}{\mu i(\mu i - \frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{2} i \mu}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{2} i \mu} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\mu - \frac{1}{2} i}{\mu^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{4}} - i\,\frac{2}{4\mu^3 + \mu}.$$

Es wird also n eine komplexe Zahl; setzen wir

$$n = n' + i n'',$$

so kommt für die Schwingungsdauer nur der reelle Teil n' in Betracht, denn n kommt in den Entwicklungen der Funktion

U nur in der Verbindung cosin $\mathfrak{n}\, a\, t$ und sin $\mathfrak{n}\, a\, t$ vor, wo a die Elastizitätskonstante im Innern des Sphäroids bedeutet; die Schwingungsdauer T ist dann

$$T = \frac{2\pi}{n' a} = \frac{\lambda}{a},$$

wenn λ die Wellenlänge bedeutet. Diese Grössen beziehen sich auf das Innere des Sphäroids; ausserhalb desselben im freien Lichtäther ist nach unserer früheren Bezeichnungsweise wegen Gleichung (104)

$$T = \frac{2\pi}{n_1 a_1} = \frac{2\pi}{n' a} = \frac{\lambda_1}{a_1},$$

also

$$(162)\quad \lambda_1^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \frac{a}{a_1} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{n'}{2\pi} = \frac{a\,\mathfrak{h}}{a_1 \pi (\mathfrak{r}_0^2 + 1)} \left(1 - \frac{4}{4\mu^2 + 1}\right).$$

Nun sollte 2μ eine ganze Zahl sein; setzen wir dieselbe gleich N, so wird

$$\lambda_1^{-1} = A\left(1 - \frac{4}{N^2 + 1}\right)$$

was im Wesentlichen die Formel (154) ist, denn das Hinzutreten des Gliedes 1 im Nenner ist bei grösseren Werten von N ohne Einfluss auf das numerische Resultat. Diese Balmersche Formel stellt also näherungsweise die Wellenlängen eines ausserordentlich stark abgeplatteten Rotationsellipsoides in ihrer Abhängigkeit von einer ganzen Zahl N dar.

Da nun die numerischen Folgerungen für die Werte $N = 3$ bis $N = 15$ sich in überraschender Weise mit den Beobachtungen beim Wasserstoff decken,[1]) so werden wir umgekehrt einen Schluss auf die Gestalt des Wasserstoff-Atoms ziehen können. Zweifelhaft bleibt es, ob wir hier das Wort „Atom" nicht besser durch „Molekül" ersetzen; denn das Wasserstoff-Molekül ist zweiatomig. Möglich wäre es aber, dass das

[1]) Vgl. die bei Nernst (Theoretische Chemie, Stuttgart 1893, 1. Auflage p. 169) nach Versuchen Cornus (Journal de physique, II. Serie, t. 5) mitgeteilte Tabelle.

Molekül sich unter Einwirkung der Elektrizität in seine Atome zerspaltet, und dann würde das Wort „Atom" richtig sein. Dem Wasserstoff kommen in der Tat zwei verschiedene Spektren zu; wahrscheinlich entspricht das eine dem Moleküle, das andere (aus einer weit grösseren Anzahl von Linien bestehend) dem einzelnen Atome. Die Gestalt des Wasserstoff-Moleküls ist demnach wahrscheinlich die eines dünnen kreisrunden Blattes.

Das Wasserstoffatom würde hiernach aus der Hälfte eines solchen sehr platten Sphäroids bestehen, indem sich letzteres längs des Äquators in zwei Teile zerspaltet. Es wäre ferner zu erwarten, dass eine solche Eigenschaft auch den anderen Sphäroiden (also *Cu*, *Ag*, *Au*) zukommt, so dass auch ihre Moleküle als zweiatomig zu betrachten wären.

Die in der Balmerschen Formel auftretende Konstante A hat bei Benutzung der üblichen Einheiten den Wert $A = (3645{,}42)^{-1}$ oder $10^8 \cdot A = 27431{,}5$. Der Vergleich mit (162) lehrt also, dass zwischen der Exzentrizität $\mathfrak{h}$ des Sphäroids, der halben kleinen Axe $\mathfrak{r}_0 \mathfrak{h}$ desselben, der Elastizitäts-Konstante a (Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes) im Innern des Moleküls und der entsprechenden Konstante a_1 für den umgebenden Lichtäther die Relation besteht

$$\pi\,(3645{,}42)^{-1} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}. \tag{163}$$

Hierin ist $\mathfrak{h}$ sehr gross, $\mathfrak{r}_0$ sehr klein; das Verhältnis $a : a_1$ ist also eine ausserordentlich kleine Zahl. Um ähnliche Formeln für die inneren Konstanten (a, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}_0$) anderer Moleküle zu berechnen, müsste man die Formeln von Kayser und Runge benutzen, zuvor aber den noch zweifelhaft erscheinenden Anfangspunkt der Zählung genauer festlegen.

Besonders bemerkenswert erscheinen noch die von Kayser und Runge für Kupfer und Silber angegebenen Serien-Formeln. Es ist nämlich bei Kupfer:

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 31591{,}6 - 131150\,N^{-2} - 1085060\,N^{-4},$$

oder

$$= 31840{,}1 - 131150\,N^{-2} - 1085060\,N^{-4}.$$

Hier ist 131150 = 4.32787,5 und für eine zweite Serie von Linienpaaren:

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 31591{,}6 - 124809\, N^{-2} - 440582\, N^{-4},$$

oder

$$= 31840{,}1 - 124809\, N^{-2} - 440582\, N^{-4},$$

und hier ist 124809 = 4.31202,5. In beiden Fällen ist also das Verhältnis der beiden ersten Konstanten nahezu gleich 4, wie beim Wasserstoff. Ähnlich verhält sich das Silber. Für eine erste Serie von Linienpaaren haben wir

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 30712{,}4 - 130621\, N^{-2} - 1093823\, N^{-4},$$

oder

$$= 31633{,}2 - 130621\, N^{-2} - 1093823\, N^{-4},$$

und für eine zweite Serie

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = 30696{,}2 - 123788\, N^{-2} - 394303\, N^{-4},$$

oder

$$= 31617{,}0 - 123788\, N^{-2} - 394303\, N^{-4}.$$

Hierin ist 130621 = 4.32454,2 und 123788 = 4.30947,0. Man wird hieraus schliessen, dass auch die Sphäroide der Atome von Silber und Kupfer sehr stark abgeplattet sind, und zwar gilt hier, analog zu (163), angenähert die Formel

$$10^8 \cdot \frac{a}{a_1} \cdot \frac{\mathfrak{h}}{\pi(\mathfrak{r}_0^2 + 1)} = 31600{,}0 \quad \text{für } Cu,$$
$$= 30700{,}0 \quad \text{„} \quad Ag.$$

Nimmt man an, dass a in diesen Elementen denselben Wert hat, so ergibt sich die Proportion:

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}\right)_H : \left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}\right)_{Ag} : \left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}_0^2 + 1}\right)_{Cu} = 27431{,}5 : 30700{,}0 : 31600{,}0.$$

Ähnliches gilt wahrscheinlich für Gold, da es auch zur ersten Mendelejeffschen Gruppe gehört; bei *Zn*, *Cd* und *Hg* dagegen weicht das Verhältnis der entsprechenden Konstanten wesentlich von 4 ab. Es ist dies damit in Übereinstimmung, dass die Gestalt der Atome dieser letzteren Metalle nach Obigem mehr kugelförmig ist.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlichem Range.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 7. Februar.*)

In einer früheren Mitteilung[1]) habe ich, anknüpfend an einen grundlegenden Aufsatz des Herrn Poincaré,[2]) die Beziehungen behandelt, welche zwischen dem infinitären Verhalten einer ganzen transcendenten Funktion $g(x) = \sum c_\nu x^\nu$ für $x = \infty$ und demjenigen der Koeffizienten c_ν für $\nu = \infty$ bestehen. Andererseits hängt aber, wie Herr Poincaré in jenem Aufsatze ebenfalls zuerst gezeigt hat, das infinitäre Anwachsen einer ganzen Funktion, welche unendlich viele Nullstellen a_ν mit konvergenter Summe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ $(p \geqq 0)$ besitzt, wesentlich von p, d. h. schliesslich von der Dichtigkeit der Nullstellen ab. Eine vereinfachte Herleitung bezw. Vervollständigung gewisser in dieser Hinsicht bestehender Beziehungen bildet den Inhalt der folgenden Mitteilung.

Zur näheren Orientierung diene zunächst folgendes. Es sei ein für allemal $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$, und es werde angenommen, dass für irgend ein $\sigma > 0$ die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiere. Ist dann $\sigma = p + 1$ die kleinste ganze Zahl, für welche dies stattfindet, so soll das für jeden endlichen Bereich absolut und gleichmässig konvergente Produkt:

---

[1]) Dieser Berichte Bd. 32 (1902), p. 163; 295.

[2]) Bullet. de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 136.

$$P(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_{1}^{p}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\varkappa}}$$

(wobei im Falle $p = 0$ der Exponent $\sum_{1}^{p}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\varkappa}$ durch 0 zu ersetzen ist) als eine ganze Funktion p^{ten} Ranges bezeichnet werden.[1]) Ein von Herrn Poincaré (a. a. O. p. 142) bewiesener Satz kann alsdann folgendermassen formuliert werden: Für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle x, deren absoluter Betrag eine passend gewählte Zahl R_ε übersteigt, hat man:

(A) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}}.$$

Späterhin hat Herr Borel gezeigt,[2]) dass sogar die Beziehung besteht:

(B) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}},$$

---

[1]) Ich gebrauche die Bezeichnung Rang in etwas anderem Sinne, wie diejenigen Autoren, welche jenen Ausdruck als völlig gleichwertig mit dem Laguerreschen „genre“ (Oeuvres compl. I, p. 167) verwenden. Hierunter versteht man bekanntlich, wenn:

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot x^m \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_{1}^{p}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\varkappa}}$$

und $g(x)$ vom Grade q, die grössere Zahl h der beiden Zahlen p und q (eventuell hat man $h = p = q$). Ich bezeichne diese Zahl h nach dem Vorgange von K. v. Schaper (Dissertat. Göttingen 1898, p. 24) als Höhe von $G(x)$, dagegen p (was auch q sein mag) als Rang von $G(x)$. Nur wenn $q \leqq p$, insbesondere, wenn $q = 0$ (in welchem Falle ich $G(x)$ eine primitive ganze Funktion nenne) fallen nach der von mir benützten Terminologie Rang und Höhe zusammen.

[2]) Leçons sur les fonctions entières (Paris, 1900) p. 56. Den sehr komplizierten Beweis hat neuerdings Herr E. Lindelöf durch einen überaus einfachen ersetzt: Acta soc. scient. Fennicae, T. 31 (1902), p. 4. Die weniger scharfe Relation (D) des Textes war schon etwas früher von Herrn Borel mit Andeutung eines Beweises ausgesprochen (Acta math. T. 20 [1897], p. 361) und zuerst von Herrn v. Schaper vollständig (wenn auch recht umständlich) bewiesen worden.

auch für $\sigma < p + 1$, sofern nur $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiert. Da nun nach Voraussetzung $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergiert, dagegen $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ schon divergiert, so haben die Exponenten σ, für welche $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiert eine dem Intervalle $p \leq \varrho \leq p + 1$ angehörige untere Grenze ϱ, sodass also für jedes $\varepsilon > 0$ zwar $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ konvergiert, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$ divergiert, während das Verhalten von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ hierdurch noch in keiner Weise präjudiziert wird. Ich bezeichne diese Zahl ϱ als den zur Folge $\left(\frac{1}{a_\nu}\right)$ oder auch zur Funktion $P(x)$ gehörigen Grenz-Exponenten[1]) und spezialisiere diesen letzteren im Bedarfsfalle als Convergenz- bezw. Divergenz-Exponenten,[2]) je nachdem $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert oder divergiert.[3]) Hiernach lässt sich der Inhalt von Ungl. (B) nunmehr folgendermassen formulieren:

Ist $P(x)$ vom Grenz-Exponenten ϱ, so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

(C) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\varrho},$$

falls ϱ Konvergenz-Exponent. Ist dies nicht der Fall oder zum mindesten nicht erwiesen, so kann man nur behaupten, dass für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R_\delta$:

(D) $$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho+\delta}}.$$ [4])

---

[1]) Bei Borel: „Ordre réel" de $P(x)$, späterhin nach dem Vorgange von Schaper, welcher ϱ als Konvergenz-Exponent bezeichnet, auch: „Exposant de convergence de la suite (a_ν)."

[2]) Bei Borel unterschieden als „ordre par excès" und „ordre par défaut."

[3]) Man hat also stets $\varrho > p$, wenn ϱ Konvergenz-Exponent, $\varrho < p + 1$, wenn ϱ Divergenz-Exponent.

[4]) Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\delta}$ für jedes $\delta > 0$ konvergiert, so hätte man

Dieses Resultat ist nun aber, wie die Fassung des zweiten Teiles zeigt, ein unvollständiges. Denn die Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ erscheint darnach zwar als eine hinreichende, aber keineswegs als eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung (C). Dass aber tatsächlich auch im Falle der Divergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ die Beziehung (C) bestehen kann, wurde seinerzeit schon von Herrn Poincaré an einem speziellen Beispiele bemerkt (a. a. O. p. 139), nämlich:

$$P_1(x) = \prod_2^\infty {}^\nu \left(1 - \frac{x^2}{(\nu \cdot \lg \nu)^2}\right)$$

$$= \prod_2^\infty {}^\nu \left(1 + \frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}},$$

also einer Funktion vom Range $p = 1$, welche, wie die direkte Vergleichung mit:

$$\sin i \varepsilon x = i \varepsilon x \cdot \prod_1^\infty {}^\nu \left(1 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

zeigt, der Bedingung genügt:

$$|P_1(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|},$$

---

auf Grund von Ungl. (A) an Stelle der Beziehung (D) zunächst eine solche von der Form:

(D') $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}}.$$

Diese letztere Beziehung sagt aber in Wahrheit nicht mehr (und *eo ipso* nicht weniger) aus, als die etwas einfachere Relation (D). Denn ist diese letztere erfüllt, so hat man für alle hinlänglich grossen x auch:

$$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho + \frac{\delta}{2}}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \cdot |x|^{\varrho + \delta}}$$

und kann sodann für jedes $\varepsilon > 0$ nötigenfalls durch weitere Vergrösserung von $|x|$ stets erzielen, dass: $\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$, also schliesslich:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}}.$$

also derjenigen Beziehung, welche nach (A) zunächst einer Funktion vom Range $p = 0$ zukommt. Oder anders ausgesprochen: Obschon hier $\varrho = p = 1$ Divergenz-Exponent ist, so genügt $P_1(x)$ immerhin der lediglich für den Konvergenz-Fall bewiesenen Relation (C).

Die in der eben angedeuteten Richtung bestehende Lücke ist neuerdings durch die Herren P. Boutroux und E. Lindelöf im wesentlichen ausgefüllt worden, ja sogar hat das in Ungl. (C) enthaltene Resultat insofern noch eine Verschärfung erfahren, als an die Stelle des „beliebig kleinen" Faktors ε eine durch das infinitäre Verhalten der a_ν bedingte, gleichzeitig mit $x = \infty$ gegen Null konvergierende (oder auch ins Unendliche wachsende) Funktion von $|x|$ getreten ist. Herr Lindelöf hat nämlich den folgenden Satz bewiesen:[1])

Ist $p < \varrho < p + 1$ *und von einem bestimmten* n *ab:*

$$|a_n| > (n \cdot \lambda(n))^{\frac{1}{\varrho}}, \quad \textit{wo:}\ \lambda(n) = (\lg n)^{\alpha_1} \cdot (\lg_2 n)^{\alpha_2} \cdots (\lg_\varkappa n)^{\alpha_\varkappa},$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa$ *beliebig reell*), *so hat man für alle hinlänglich grossen* x:

$$\text{(C')} \qquad |P(x)| < e^{A \cdot \lambda(|x|)^{-1} \cdot |x|^\varrho} \qquad (A > 0).$$

Und Herr Boutroux hat darauf aufmerksam gemacht,[2]) dass dieses Resultat schon in einem von ihm zuvor mitgeteilten,[3]) etwas allgemeineren Satze enthalten sei. Durch die obige Verschärfung der Ungleichung (C) haben indessen die betreffenden Beweise so erhebliche Komplikationen erlitten, dass sie als elementare wohl kaum noch bezeichnet werden können. Zugleich hat sich gezeigt, dass die im Falle eines ganzzahligen ϱ auftretenden Schwierigkeiten,[4]) welche eigentlich den Anlass zur Einführung jener Verschärfung ge-

---

[1]) A. a. O. p. 24 (eine vorläufige Mitteilung schon: Comptes rendus, T. 133 [1901], p. 1279).

[2]) Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 82.

[3]) Ebendas. T. 132 (1901), p. 252.

[4]) Vgl. § 3.

geben hatten, auf diesem Wege wohl einigermassen eingeschränkt, aber keineswegs prinzipiell behoben werden können. Auf der anderen Seite gewinnt man tatsächlich schon eine einigermassen befriedigende Einsicht in das Wesen der hier in Betracht kommenden Fragen, sobald man nur über die Gültigkeitsgrenzen der Ungleichung (C) möglichst genau orientiert ist. Im folgenden soll nun vollkommen elementar gezeigt werden, dass jene Gültigkeitsgrenzen im Falle eines nichtganzzahligen ϱ vollständig, im Falle eines ganzzahligen[1]) ϱ wenigstens teilweise festgestellt werden können, nämlich:

Die notwendige Bedingung für die Existenz der Beziehung (C) *besteht keineswegs in der (allemal hinreichenden) Konvergenz der Reihe* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$, *vielmehr lediglich in der Beziehung:*

$$\text{(E)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho = 0.$$

Diese letztere ist zugleich auch hinreichend, wenn ϱ *keine ganze Zahl. Ist dagegen* ϱ *eine ganze Zahl,* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ *divergent, so erscheint in Verbindung mit Gl.* (E) *als hinreichende Bedingung die Beziehung:*

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho = 0.^{2)}$$

Der erste Teil dieses Satzes wird in § 1, der zweite für Funktionen vom Range 0 in § 2, für solche vom Range $p \geqq 1$ in § 3 bewiesen. In § 4 werden dann die bekannten

[1]) Der Fall des Grenz-Exponenten (und zwar offenbar allemal Divergenz-Exponenten) $\varrho = 0$, welcher z. B. eintritt, wenn $a_\nu = a^\nu$ und $|a| < 1$, ist hier ein für allemal auszuschliessen, da alsdann die Möglichkeit der Bedingung (C) hinfällig wird.

[2]) Dabei wird also die Reihe $\sum \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho$ nur als bedingt konvergent vorausgesetzt.

Sätze über den Zusammenhang zwischen dem Grenz-Exponenten und dem infinitären Verhalten einer primitiven[1]) ganzen Funktion auf Grund des obigen Resultates entsprechend vervollständigt.

---

§ 1.

1. Lehrsatz. *Ist für jedes* $\varepsilon > 0$ *und alle hinlänglich grossen* x:

(1) $$|G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}} \qquad (\sigma > 0),$$

und besitzt $G(x)$ *überhaupt unendlich viele Nullstellen* a_ν (*wo* $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$), *so hat man:*

(2) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma} = 0.^{2})$$

Beweis. Da $G(x)$ die Nullstellen a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) besitzen soll, überdies noch eventuell $x = 0$ zur λ-fachen Nullstelle haben kann, so muss sich $G(x)$ in die Form setzen lassen:

(3) $$G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x)},$$

wo $\lambda \geqq 0$, $g(x)$ eine ganze (rationale oder transcendente) Funktion ohne konstantes Glied (eventuell auch $g(x) \equiv 0$) und:

$$g_\nu(x) = \sum_{1}^{m_\nu}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\varkappa}.^{3})$$

Wir bringen $G(x)$ zunächst auf die Form:

---

[1]) S. p. 1, Fussn. 3.

[2]) Modifikation eines bekannten Satzes von E. Schou (Comptes rendus, T. 125 [1897], p. 763) und elementarere Darstellung der a. a. O. benützten Beweis-Methode.

[3]) Die m_ν könnten auch mit ν ins Unendliche wachsen, d. h. es wird keineswegs vorausgesetzt, dass $G(x)$ von endlichem Range, vielmehr ergibt sich dies schliesslich als selbstverständliche Folgerung aus der zu beweisenden Relation (2).

$$G(x) = C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n{}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g(x) + \sum_1^n{}^{\nu} g_\nu(x)} \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{q_\nu(x)}$$
$$= \frac{C \cdot x^{\lambda}}{a_1 a_2 \ldots a_n} \prod_1^n{}^{\nu} (a_\nu - x) \cdot G_1(x),$$

wo $G_1(x)$ eine transcendente ganze Funktion, also wegen: $G(0) = 1$, von der Form:

$$G_1(x) = 1 + \sum_1^{\infty}{}^{\nu} c_\nu x^\nu,$$

und daher:

$$(4) \qquad \frac{G(x)}{C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n{}^{\nu} (a_\nu - x)} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} (1 + \sum_1^{\infty}{}^{\nu} c_\nu x^\nu).$$

Auf Grund des Cauchyschen Koeffizienten-Satzes ergibt sich sodann für jedes $r > 0$:

$$\left| \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \right| < \operatorname{Max.}_{|x|=r} \left| \frac{G(x)}{C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n{}^{\nu} (a_\nu - x)} \right|$$

und für $r \geqq 1$ a fortiori:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} \right|^n &\leq \frac{1}{\prod_1^n{}^{\nu} \left| r - |a_\nu| \right|} \cdot \operatorname{Max.}_{|x|=r} |C^{-1} \cdot G(x)| \\ &< \frac{1}{\prod_1^n{}^{\nu} \left| r - |a_\nu| \right|} \cdot e^{\varepsilon \cdot r^{\sigma}}, \end{aligned}$$

da aus der Beziehung (1) offenbar auch die folgende resultiert:

$$|C^{-1} \cdot G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}}, \quad \text{etwa für } |x| > R_\varepsilon.$$

Setzt man jetzt:

$$r = (e + 1) \cdot |a_n|$$

und nimmt n gross genug, dass:

$$|a_n| > \frac{1}{e+1} \cdot R_\varepsilon$$

wird, so geht Ungl. (5) in die folgende über:

$$(6)\qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu} \left((e+1)\,|a_n| - |a_\nu|\right)} \cdot e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|a_n|^\sigma}.$$

Da aber für $\nu = 1, 2, \ldots (n-1)$:

$$(e+1)\cdot|a_n| - |a_\nu| \geqq (e+1)\cdot|a_n| - |a_n| = e\cdot|a_n|,$$

so folgt a fortiori:

$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{e^n\cdot|a_n|^n}\cdot e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|a_n|^\sigma},$$

und daher:

$$e^n < e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|a_n|^\sigma},$$

also:

$$(7)\qquad n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\sigma < \varepsilon\cdot(e+1)^\sigma \qquad \left(\text{falls: } |a_n| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon\right)$$

und, da ε unbegrenzt verkleinert werden kann, schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Als Folgerung aus dem eben bewiesenen Satze ergibt sich unmittelbar:

Ist $P(x)$ eine primitive ganze Funktion mit dem Grenz-Exponenten $\varrho > 0$, so bildet die Relation:

$$(8)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho = 0$$

eine notwendige Bedingung dafür, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$(9)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\varrho}.$$

Zugleich erkennt man, dass allemal, wenn für irgend ein $\sigma > 0$ die Beziehnung besteht:

$$(10)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0,$$

$\varrho \leqq \sigma$ sein muss. Denn aus (10) folgt durch Erhebung in die $\left(1+\frac{\delta}{\sigma}\right)$te Potenz:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{1+\frac{\delta}{\sigma}} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma+\delta} = 0$$

und somit die Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma+\delta}$. Man kann daher den Grenz-Exponenten ϱ geradezu auch definieren als die untere Grenze der Zahlen σ, für welche eine Relation von der Form (10) besteht.

Daraus folgt weiter, dass für jedes (beliebig kleine) $\delta > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\delta} > 0$$

sein muss und somit, nach dem eben bewiesenen Satze, die Existenz der Beziehung:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho-\delta}} \qquad (\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und } |x| > R_\varepsilon)$$

ausgeschlossen erscheint. Da aber diese letztere Ungleichung wegen der Willkürlichkeit von δ nicht mehr und nicht weniger aussagt, als die folgende:[1])

$$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho-\delta}} \qquad (\text{für jedes } \delta > 0 \text{ und } |x| > R'_\delta),$$

so ergibt sich noch das folgende Resultat:

Besitzt $P(x)$ den Grenz-Exponenten $\varrho > 0$, so ist für jedes $\delta > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:

(11) $$|P(x)| > e^{|x|^{\varrho-\delta}}.$$

---

[1]) S. p. 2, Fussn. 4.

§ 2.

Lehrsatz. *Ist* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ *konvergent, also:*

(12) $$P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$$

eine ganze Funktion vom Range 0, *und besteht für irgend ein* $\sigma \leqq 1$ *die Relation:*

(13) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0 \qquad \left(\textit{anders geschrieben: } |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ *und* $|x| > R_\varepsilon$:

(14) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}.$$

Beweis. Wir trennen die beiden Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma < 1$.

I. Sei zunächst $\sigma = 1$, in welchem Falle also wegen der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ und der Voraussetzung $|a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$ die Bedingung (13) stets eo ipso erfüllt ist. Man hat für jedes $m > 1$:

$$|P(x)| \leqq \prod_1^m{}^\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)$$

(15) $$< e^{m \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{x}{a_1}\right|\right)} \cdot e^{\sum_{m+1}^{\infty}{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|}.$$

Wird jetzt nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m so fixiert, dass:

(15a) $$\sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und darauf eine positive Zahl R_ε so bestimmt, dass:

(15b) $$\frac{m \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{x}{a_1}\right|\right)}{|x|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon,$$

so ergibt sich aus (15), wie behauptet:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|}.$$[1]

II. Es sei jetzt $\sigma < 1$, und es werde gesetzt:

$$|a_\nu| = a_\nu, \qquad |x| = r.$$

Wird $\delta > 0$ beliebig klein angenommen, so lässt sich auf Grund der Voraussetzung (13) ein m so fixieren, dass für $\nu > m$:

$$(16) \qquad \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma \equiv \frac{\nu}{a_\nu^\sigma} < \delta, \quad \text{also: } \frac{1}{a_\nu} < \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Man hat sodann:

$$|P(x)| < \prod_1^m{}^{\nu} \left(1 + \frac{r}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^{\nu} \left(1 + \frac{r}{a_\nu}\right)$$

$$< e^{m \cdot \lg\left(1 + \frac{r}{a_1}\right)} \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right)$$

und, wenn wiederum r_δ so fixiert wird, dass:

$$(17) \qquad \frac{m \cdot \lg\left(1 + \frac{r}{a_1}\right)}{r^\sigma} < \delta \qquad \text{für } r > r_\delta,$$

auch:

$$(18) \quad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma} \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right) \qquad \text{für } |x| > r_\delta.$$

Es bedeute nun n diejenige ganze Zahl, welche durch die Bedingungen bestimmt ist:

$$(19) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^\sigma \leqq n,$$

und es werde gesetzt:

---

[1]) Dieser Teil des Satzes enthält lediglich das in der Einleitung erwähnte Poincaré'sche Resultat (A) (für den Fall $p = 0$) und wird hier nur der Vollständigkeit halber bewiesen.

$$(20)\quad \prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right)=\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right)\cdot\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right).^{1)}$$

Für das erste der rechts auftretenden Teil-Produkte ergibt sich alsdann mit Berücksichtigung von Ungl. (19):

$$\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta\, r^{\sigma}}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)\leqq\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)$$

$$<\prod_{1}^{n}{}^{\nu}\frac{n^{\frac{1}{\sigma}}+\nu^{\frac{1}{\sigma}}}{\nu^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$<\left(\prod_{1}^{n}{}^{\nu}\frac{2^{\sigma}\cdot n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=\left(\frac{(2^{\sigma}\cdot n)^{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$(21)\qquad <e^{\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}\cdot n}.$$

Da aber nach (19): $n<\delta\cdot r^{\sigma}+1$, so folgt weiter:

$$\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta\, r^{\sigma}}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)<e^{\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}(\delta\cdot r^{\sigma}+1)}$$

$$=e^{\delta\cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+\frac{2^{\sigma}}{\sigma\,\delta\cdot r^{\sigma}}\right)}$$

$$(22)\qquad <e^{\delta\cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+1\right)},$$

sofern nur:

$$(22^{a})\qquad \frac{2^{\sigma}}{\sigma\,\delta\cdot r^{\sigma}}\leqq 1,\quad \text{d. h. } r\geqq 2\cdot\left(\frac{1}{\sigma\,\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

---

1) Sollten unter den r, welche der Bedingung $r>r_{\delta}$ genügen, solche vorkommen, für welche $n\leqq m$ ausfällt, so würde für diese das erste der beiden Teil-Produkte einfach wegfallen, während das zweite zunächst in $\prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu}$ übergehen würde und in der Folge *a fortiori* durch $\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}$ ersetzt werden könnte.

Für das zweite Teil-Produkt in Gl. (20) findet man zunächst:

(23)
$$\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right) < e^{\delta^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \quad ^{1)}$$

$$= \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\left(\frac{r^{\sigma}}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot r^{\sigma-1}$$

$$\leqq \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\delta^{1-\frac{1}{\sigma}}\cdot r^{\sigma-1} \quad \left(\text{da: } \frac{r^{\sigma}}{n} \leqq \delta^{-1} \text{ nach (19)}\right),$$

---

[1]) Man hat bekanntlich für $\lambda > 0$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda},$$

wie am kürzesten mit Hilfe der Beziehung:

$$\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\lambda}}$$

resultiert, aber auch leicht rein elementar mit Hilfe der Ungleichungen:

$$b^{\lambda}-a^{\lambda}\begin{cases} > \lambda\cdot a^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (\lambda > 1) \\ > \lambda\cdot b^{\lambda-1}\ (b-a) & (0 < \lambda < 1) \end{cases}$$

(s. Sitz.-Ber. Bd. 32 [1902], p. 177) gefunden wird. Darnach ergibt sich nämlich zunächst:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda}\begin{cases} > \frac{\lambda}{\nu\cdot(\nu+1)^{\lambda}} & (\lambda > 1) \\ > \frac{\lambda}{\nu^{\lambda}\cdot(\nu+1)} & (0 < \lambda < 1), \end{cases}$$

also schliesslich für jedes $\lambda > 0$:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda} > \lambda\cdot\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda},$$

und hieraus durch Summation:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} = \sum_{n}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda}.$$

so dass Ungleichung (23) in die folgende übergeht:

(24) $$\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right) < e^{\delta\cdot r^{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Durch Einsetzen von (22), (24) in Ungl. (18) ergibt sich also:

(25) $$|P(x)| < e^{\delta\cdot r^{\sigma}\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)} \quad \text{für: } r > r'_{\delta},$$

wenn r'_{δ} die grössere der beiden Zahlen r_{δ} und $2\cdot\left(\frac{1}{\sigma\,\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ bedeutet. Wird also δ zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ so angenommen, dass:

$$\delta\cdot\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\leqq\varepsilon$$

und sodann das entsprechende r'_{δ} mit R_{ε} bezeichnet, so findet man, wie behauptet:

(26) $$|P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\sigma}} \quad \text{für: } |x| > R_{\varepsilon}.$$

---

§ 3.

1. Hilfssatz. *Ist:*

(27) $$E_p(u) = (1-u)\cdot e^{\sum_1^p{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\cdot u^{\varkappa}} \quad (p\geqq 1),$$

so hat man für jedes von Null verschiedene u und für $0\leqq a\leqq 1$:

(28) $$|E_p(u)| < e^{c_{p,a}\cdot|u|^{p+a}},$$

wo $c_{p,a}$ *eine lediglich von p und a abhängige positive Zahl bedeutet.*[1])

---

[1]) Ein im wesentlichen dasselbe aussagender Satz bei E. Lindelöf, a. a. O., p. 2.

Beweis: Man hat zunächst für $|u| < 1$:

$$E_p(u) = e^{-\sum_1^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa} = e^{-\sum_{p+1}^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa},$$

also für $0 < |u| < 1$:

$$|E_p(u)| < e^{\sum_{p+1}^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot |u|^\varkappa}$$

$$< e^{\frac{1}{p+1}\cdot\sum_{p+1}^\infty \varkappa |u|^\varkappa} = e^{\frac{1}{p+1}\cdot\frac{|u|^{p+1}}{1-|u|}}.$$

Ist jetzt $|u| \leqq \frac{p}{p+1}$, also $1 - |u| \geqq \frac{1}{p+1}$, so wird:

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+1}}$$

und, wegen $|u| < 1$, a fortiori:

(29) $$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+\alpha}} \qquad \text{für: } 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Andererseits hat man:

$$|E_p(u)| < (1 + |u|)\cdot e^{\sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa}$$

$$< e^{|u| + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa}$$

$$= e^{\left\{\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-\varkappa}\right\}\cdot|u|^{p+\alpha}}.$$

Ist jetzt $|u| > \frac{p}{p+1}$, also $\left|\frac{1}{u}\right| < \frac{p+1}{p}$, so wird:

(30) $$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha}\cdot|u|^{p+\alpha}},$$

wo:

(30a) $$c_{p,\alpha} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-\varkappa}.$$

Da im übrigen offenbar $c_{p,\alpha} > 1$, so ergibt sich mit Rücksicht auf Ungl. (29) die Gültigkeit von (30) für jedes von Null verschiedene u.

2. Hauptsatz. *Es sei p eine positive ganze Zahl, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ divergent, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergent, also:*

$$(31)\quad P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \text{ wo: } E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa},$$

eine ganze Funktion vom Range p. Ist sodann für irgend ein dem Intervalle $p < \sigma \leq p + 1$ angehöriges σ:

$$(32)\quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0 \quad \left(\textit{anders geschrieben: } |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$(33)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}.$$

Dieses Resultat gilt auch noch im Falle $\sigma = p$, wenn $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{a_\nu}$ bedingt konvergiert und die Summe 0 besitzt.[1])

Beweis. Wir unterscheiden hier die 3 Fälle $\sigma = p + 1$, $p < \sigma < p + 1$, $\sigma = p$.

I. Sei zunächst $\sigma = p + 1$, in welchem Falle wiederum die Voraussetzung (32) eo ipso erfüllt ist. Man hat, wenn m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, mit Benützung des zuvor bewiesenen Hilfssatzes:

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \left|\prod_1^m{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| \cdot \left|\prod_{m+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| \\ &< e^{c_{p,0} \cdot \sum_1^m{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^p + c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}} \\ (34)\qquad &= e^{\left(\frac{c_{p,0}}{|x|} \cdot \sum_1^m{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p + c_{p,1} \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}\right) \cdot |x|^{p+1}}. \end{aligned}$$

[1]) Das letzte Resultat findet sich auch bei P. Boutroux: Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 83.

Wird jetzt über m so verfügt, dass:

$$(34^a) \qquad c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p+1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf R_ε so fixiert, dass für $|x| > R_\varepsilon$:

$$(34^b) \qquad \frac{c_{p,0}}{|x|} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p} < \frac{\varepsilon}{2},$$

so ergibt sich, wie behauptet:

$$(35) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon.$$ [1]

II. In dem nunmehr zu betrachtenden Falle: $p < \sigma < p+1$ möge gesetzt werden:

$$(36) \qquad \begin{cases} P(x) = \prod_{1}^{m}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \\ \quad = P_1^{(m)}(x) \cdot P_{m+1}^{(n)}(x) \cdot P_{n+1}^{(\infty)}(x) \end{cases}$$

wo die ganzen Zahlen m, n genau dieselbe Bedeutung haben, wie in § 2 (s. Formel (16), (19) nebst Fussnote 1 p. 113), also:

$$(37) \qquad \nu \cdot \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{\sigma} \equiv \frac{\nu}{a_\nu^\sigma} < \delta \quad \text{für } \nu > m,$$

$$(38) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^\sigma \leqq n \quad (r = |x|).$$

Man hat nun wiederum mit Benützung des Hilfssatzes (28):

$$|P_1^{(m)}(x)| < e^{c_{p,0} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^p} = e^{\left(\frac{c_{p,0}}{r^{\sigma - p}} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right) \cdot r^\sigma},$$

also, wenn r_δ so fixiert wird, dass:

$$(39) \qquad \frac{c_{p,0}}{r^{\sigma - p}} \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p < \delta \quad \text{für: } r > r_\delta,$$

zunächst:

$$(40) \qquad |P_1^{(m)}(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma}.$$

---

[1] Dieser Teil des Satzes enthält wiederum nur das Poincarésche Resultat (A).

Für das zweite in Gl. (36) auftretende Teil-Produkt ergibt sich:

$$|P_{m+1}^{(n)}(x)| \leq \prod_{m+1}^{n}{}_\nu \left(1+\frac{r}{a_\nu}\right)\cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

(41) $$< \prod_{m+1}^{n}{}_\nu \left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)\cdot \prod_{m+1}^{n}{}_\nu\, e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}}$$ (nach Ungl. (37), (38)).

Für das erste dieser Produkte wurde bereits in § 2, Ungl. (21) die Beziehung gefunden:[1])

(42) $$\prod_{m+1}^{n}{}_\nu \left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < e^{\frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma \cdot n}.$$

Andererseits hat man:

$$\prod_{m+1}^{n}{}_\nu\, e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} < e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}}.$$

Nun ist für $\varkappa \leq p < \sigma$:

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \frac{1}{1-\frac{\varkappa}{\sigma}}\cdot n^{1-\frac{\varkappa}{\sigma}}$$ [2]),

und daher:

---

[1]) Die betreffende Herleitung ist gänzlich unabhängig davon, ob $\sigma < 1$ oder $\sigma \geq 1$.

[2]) Aus der oben (p. 114, Fussn. 1) benützten Ungleichung:

$$b^\lambda - a^\lambda > \lambda\cdot b^{\lambda-1}(b-a) \qquad (0<\lambda<1)$$

folgt:

$$\nu^\lambda - (\nu-1)^\lambda > \lambda\cdot\nu^{\lambda-1} = \lambda\cdot\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda}$$

und hieraus durch Summation:

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot n^\lambda.$$

$$\sum_1^p{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \sum_1^p{}^{\varkappa} \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} \cdot n$$

$$< \frac{\sigma}{\sigma - p} \cdot n$$

$$\left(\text{wegen: } \sum_1^p{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} < p \cdot \frac{1}{p \cdot (\sigma - p)} = \frac{1}{\sigma - p}\right)$$

also:

$$(43) \qquad \Pi_{m+1}^{n}{}^{\nu}\, e^{\sum_1^p{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} < e^{\frac{\sigma}{\sigma - p} \cdot n}.$$

Durch Einsetzen von (42), (43) in Ungl. (41) ergibt sich somit:

$$(44) \qquad \left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| < e^{n\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right)}.$$

Wegen $n < \delta \cdot r^{\sigma} + 1$ (s. Ungl. (38)) hat man sodann:

$$n\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right) < (\delta \cdot r^{\sigma} + 1)\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right)$$

$$= \delta \cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{\sigma - p} + \frac{2^{\sigma} \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma \cdot (\sigma - p) \cdot \delta \cdot r^{\sigma}}\right)$$

$$< \delta \cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{\sigma - p} + 1\right),$$

wenn:

$$(45) \quad \frac{2^{\sigma} \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma\,(\sigma - p) \cdot \delta \cdot r^{\sigma}} \leqq 1, \quad \text{d. h.} \quad r \geqq \left(\frac{2^{\sigma} \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma \cdot (\sigma - p) \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

und daher:

$$(46) \qquad \left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| < e^{\delta \cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{\sigma - p} + 1\right)},$$

wenn r der Bedingung (45) genügt.

Schliesslich findet man für das dritte in Gl. (36) auftretende Teil-Produkt:

$$(47)\qquad |P^{(x)}_{n+1}(x)| < e^{c_{p,1}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^{p+1}} \quad \text{(s. Ungl. (28))}$$

$$< e^{c_{p,1}\cdot r^{p+1}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}}} \quad \text{(s. Ungl. (37)).}$$

Nun ist wiederum:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{p+1-\sigma}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1} \quad \text{(s. p. 114, Fussn. 1))}$$

$$= \frac{\sigma}{p+1-\sigma}\cdot\left(\frac{r^\sigma}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1}\cdot r^{\sigma-(p+1)}$$

$$\leqq \frac{\sigma}{p+1-\sigma}\cdot\delta^{1-\frac{p+1}{\sigma}}\cdot r^{\sigma-(p+1)} \quad \left(\text{wegen: } \frac{r^\sigma}{n}\leqq\delta^{-1}\right.$$

nach (38)),

so dass sich ergibt:

$$(48)\qquad |P^{(\infty)}_{n+1}(x)| < e^{\delta\, r^\sigma\cdot\frac{c_{p,1}\cdot\sigma}{p+1-\sigma}}.$$

Durch Zusammenfassung der Resultate (40), (46), (48) liefert also Gl. (36) die Beziehung:

$$(49)\quad |P(x)| < e^{\delta\cdot r^\sigma\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma+\frac{\sigma}{\sigma-p}+\frac{c_{p,1}\cdot\sigma}{p+1-\sigma}\right)} \quad \text{für: } r > r'_\delta,$$

wenn r'_δ die grössere der beiden Zahlen r_δ und $\left(\frac{2^\sigma\cdot(\sigma-p)+\sigma^2}{\sigma(\sigma-p)\cdot\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ bedeutet.

Wird also $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben und δ so angenommen, dass:

$$\delta\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma+\frac{\sigma}{\sigma-p}+\frac{c_{p,1}\cdot\sigma}{p+1-\sigma}\right)\leqq\varepsilon,$$

so folgt, wenn man noch R_ε statt r'_δ schreibt:

$$(50)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\sigma} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon.$$

III. Sei jetzt $\sigma = p$, also:

$$(51)\qquad \lim_{\nu=\infty}\nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = \lim_{\nu=\infty}\frac{\nu}{a_\nu^p} = 0$$

und ausserdem: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$. Es mag dann m und n wiederum die frühere Bedeutung haben, so dass also:

$$(52) \qquad \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = \frac{\nu}{a_\nu^p} < \delta \text{ für: } \nu > m,$$

$$(53) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^p \leqq n.$$

Ferner möge n' eine Zahl von der Beschaffenheit bedeuten, dass für $n \geqq n'$:

$$(54) \qquad \left|\sum_1^n{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right| < \delta,$$

was offenbar, auf Grund der Voraussetzung: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$, durch passende Wahl von n' stets erzielt werden kann. Zugleich soll dann die in Ungl. (53) auftretende Zahl $n \geqq n'$ $\left(\text{d. h. } r \geqq \left(\frac{n'-1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ angenommen werden.

Man hat nun wiederum:

$$(55) \qquad \begin{aligned} P(x) &= \prod_1^m{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \\ &= e^{\sum_1^n{}^\nu \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \cdot \prod_1^m{}^\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \end{aligned}$$

wo:

$$E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1}{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa},$$

und im Falle $p = 1$ der Exponential-Faktor durch die Einheit zu ersetzen ist.

Aus (54) folgt dann zunächst, dass:

$$(56) \qquad \left|e^{\sum_1^n{}^\nu \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}\right| < e^{\frac{1}{p} \cdot \delta \cdot r^p}.$$

Für das erste Teil-Produkt in Gl. (55) ergibt sich analog wie früher (s. Ungl. (34), (34^b) bezw., im Falle $p-1=0$, Ungl. (15), (15^b)):

$$(57)\qquad \left|\prod_1^m{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{\delta \cdot r^p} \quad \text{etwa für: } r > r_\delta.$$

Für das zweite Teil-Produkt hat man mit Benützung von Ungl. (52), (53) (vgl. die analoge Beziehung (41)):

$$(58)\qquad \left|\prod_{m+1}^n{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < \prod_1^n{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}}.$$

Dabei ergibt sich genau wie früher (cf. Ungl. (21), (42)):

$$(59)\qquad \prod_1^n{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) < e^{\frac{1}{p}\cdot 2^p\cdot n},$$

und andererseits im Falle $p>1$:

$$(60)\qquad \prod_1^n{}^{\nu} e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} = e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\cdot n^{\frac{\varkappa}{p}}\cdot\sum_1^{n}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} < e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\frac{p}{\varkappa\cdot(p-\varkappa)}\cdot n}$$

(wegen: $\sum_1^n{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \frac{p}{p-\varkappa}\cdot n^{1-\frac{\varkappa}{p}}$ für $\varkappa < p$, s. p. 119, Fussnote 2)). Nun ist:

$$(61)\qquad \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\frac{p}{\varkappa(p-\varkappa)} = \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\left(\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{p-\varkappa}\right) = 2\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa} < 2\lg p,$$

so dass die Beziehung (58) mit Benützung von Ungl. (59) – (61) in die folgende übergeht:

$$(62)\qquad \left|\prod_{m+1}^n{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{n\left(\frac{1}{p}\cdot 2^p + \lg p\right)}.$$

Diese zunächst unter der Voraussetzung $p>1$ abgeleitete Ungleichung gilt dann, wie leicht zu sehen, auch noch für

$p = 1$, da in diesem Falle die Exponential-Faktoren auf der rechten Seite von Ungl. (58) wegfallen und andererseits, wegen $\lg 1 = 0$, die rechte Seite von Ungl. (62) dann mit derjenigen von (59) identisch wird.

Wegen $n < \delta \cdot r^p + 1$ (s. Ungl. (53)) hat man sodann:

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{p}\cdot 2^p + \lg p\right) &< (\delta \cdot r^p + 1)\left(\frac{1}{p}\cdot 2^p + \lg p\right) \\ &= \delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p}\cdot 2^p + \lg p + \frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta \cdot r^p}\right) \\ &< \delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p}\cdot 2^p + \lg p + 1\right), \end{aligned}$$

wenn:

$$(63) \qquad \frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta \cdot r^p} \leq 1, \quad \text{d. h. } r \geq \left(\frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{p}},$$

und daher:

$$(64) \qquad \left| \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p}\cdot \; {}^{p} + \lg p + 1\right)},$$

wenn r der Bedingung (63) genügt.

Auf das letzte der in Gl. (55) auftretenden Teil-Produkte lässt sich ohne weiteres die Ungleichung (48) anwenden, da, wie unmittelbar einleuchtet, die betreffenden Schlüsse auch noch für $\sigma = p$ giltig bleiben. Darnach wird also:

$$(65) \qquad \left| \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p \cdot p \cdot c_{p,1}}.$$

Durch Zusammenfassung der in Ungl. (56), (57), (64), (65) enthaltenen Resultate liefert also Gl. (55) die Beziehung:

$$(66) \qquad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^p \left(2 + \frac{1}{p}(1 + 2^p) + \lg p + p \cdot c_{p,1}\right)} \quad \text{für: } r > r'_\delta,$$

wenn r'_δ die grössere der beiden Zahlen r_δ und $\left(\frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{p}}$ bezeichnet.

Man findet also schliesslich wiederum:

(67) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon,$$

wenn δ zu beliebig vorgeschriebenem ε entsprechend gewählt und $r'_\delta = R_\varepsilon$ gesetzt wird. —

3. Die in dem zuletzt behandelten Falle auftretende Bedingung $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ (bei gleichzeitiger Divergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$) ist offenbar allemal erfüllt, wenn:

(68) $$a_{2\nu} = e^{\frac{\pi i}{p}} \cdot a_{2\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

desgl. für ungerade p, wenn:

(69) $$a_{2\nu} = -a_{2\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei im letzteren Falle ausser $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p$ auch allgemein $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^{2\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ verschwindet. Bezeichnet man ferner mit α eine primitive $(p+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, etwa:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

und setzt sodann:

(70) $$\begin{cases} a_{(p+1)\nu+\lambda+1} = \alpha^{-\lambda} \cdot a_{(p+1)\nu+1} \\ \phantom{a_{(p+1)\nu+\lambda+1}} = \alpha^{-\lambda} \cdot b_{\nu+1} \end{cases} \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots p \end{pmatrix},$$

so hat man (wegen: $\sum_0^p{}^\lambda \alpha^{\pm\varkappa\lambda} = 0$ für $1 \leq \varkappa \leq p$) offenbar:

$\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varkappa = 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$.

Es wird daher

(71) $$\begin{cases} P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu \prod_0^p{}^\lambda \left(1 - \frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right)^\varkappa} \\ = \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right), \end{cases}$$

falls $\sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p$ divergiert, jedoch immerhin:

$$|b_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}} \quad \left(\text{z. B. } b_\nu = [(\nu+1)\lg(\nu+1)]^{\frac{1}{p}}\right),$$

eine ganze Funktion $(p+1)^{\text{ten}}$ Ranges darstellen, welche für hinlänglich grosse x der Beziehung genügt:

$$(72) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}.$$

Das in der Einleitung erwähnte Poincarésche Beispiel $\Pi\left(1 - \frac{x^2}{(\nu \lg \nu)^2}\right)$ fällt offenbar gleichzeitig unter den eben bezeichneten, wie auch unter den durch Gl. (69) charakterisierten Typus.

Im übrigen sei über den vorliegenden, in dem vorausgehenden Beweise unter III behandelten Fall $\sigma = p$ noch folgendes bemerkt. Bie Bedingung $\sum_1^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ in Verbindung mit der als notwendig erkannten: $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ erscheint zunächst zwar hinreichend, aber keineswegs notwendig für das Zustandekommen der Beziehung (72). Immerhin wird man sagen dürfen, dass sie nahezu den Charakter einer notwendigen Bedingung besitzt; oder etwas genauer ausgedrückt, dass zum mindesten eine Bedingung ganz ähnlicher Art zu der allemal notwendigen: $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ hinzukommen muss, wenn Ungl. (72) erfüllt sein soll.

Während nämlich im Falle $\sigma > p$ jeder einzelne Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$, also auch jedes endliche Produkt solcher Faktoren nur wesentlich schwächer ins Unendliche wachsen kann, wie $e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$ (nämlich nur so, wie $e^{c \cdot |x|^p}$, wo c endlich) und naturgemäss die Erhaltung dieser Eigenschaft für das betreffende unendliche Produkt lediglich von dem infinitären Verhalten der $|a_\nu|$ abhängt, so wächst im Falle $\sigma = p$ schon jeder einzelne Primfaktor wesentlich stärker ins Unend-

liche, wie $e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ (nämlich wiederum, wie $e^{c\cdot|x|^p}$) und die Beziehung $|P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ wird dann überhaupt nur dadurch ermöglicht, dass die von den einzelnen Prim-Faktoren herrührenden Beträge von der Form: $e^{\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ sich in ihrer Wirkung gegenseitig zerstören: das letztere geschieht in der Tat, wenn: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ wird. Ob die Relation $|P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ noch unter anderen Bedingungen zu Stande kommen kann, erscheint fraglich, wenn auch nicht besonders wahrscheinlich. Jedenfalls aber müssten derartige Bedingungen, geradeso wie die Bedingung $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{a_\nu} = 0$, allemal so geartet sein, dass sie erstens nicht nur von den absoluten Beträgen, sondern auch von den Argumenten der a_ν abhängen, und dass sie zweitens nicht nur auf das infinitäre Verhalten der a_ν, sondern auf die Gesamtheit aller a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) sich erstrecken. Denn offenbar wird hier (im Gegensatze zu dem allgemeinen Falle $\sigma > p$) allemal jeder einzelne Primfaktor für das Zustandekommen der Beziehung $|P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ in dem Grade massgebend sein, dass schon durch Weglassung oder Abänderung irgendwelcher einzelnen Primfaktoren jene Beziehung hinfällig werden kann.

Um diese Bemerkung durch ein möglichst einfaches Beispiel zu illustrieren, werde etwa in dem Ausdrucke (71) $p = 2$ gesetzt und die b_ν reell, positiv angenommen (z. B. $b_\nu = [(\nu+1)\lg(\nu+1)]^{\frac{1}{2}}$), so dass also:

$$(73)\begin{cases} P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu \prod_0^2{}^\lambda \left(1 - \frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right)^2} \quad (\text{wo: } \alpha^3 = 1) \\ \quad\;\; = \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^3}{b_\nu^3}\right). \end{cases}$$

Entfernt man jetzt aus $P(x)$ lediglich die zwei von den Wurzeln αb_1, $\alpha^2 b_1$ herrührenden Faktoren, so entsteht:

$$(74)\qquad P_1(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \cdot e^{\frac{x}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}' \left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right),$$

und man findet unmittelbar für $x = -r$ (wo r reell, positiv):

$$(75)\qquad P_1(-r) = \left(1 + \frac{r}{b_1}\right) \cdot e^{-\frac{r}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}' \left(1 + \frac{r^3}{b_\nu^3}\right) > e^{c \cdot r^2}.$$

---

§ 4.

1. Es sei jetzt $\varrho \geq 0$ der Grenz-Exponent von $P(x)$, also zum mindesten für jedes $\delta > 0$:

$$(76)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\delta} = 0 \quad \text{(vgl. § 1, Nr. 2).}$$

Alsdann ergibt sich aus den Sätzen von § 2, § 3, dass für alle hinlänglich grossen x:

$$(77)\qquad \begin{aligned} |P(x)| &< e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho+\delta}} \\ &< e^{|x|^{\varrho+\delta}}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung kann dann durch die engere ersetzt werden:

$$(77^a)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\varrho},$$

wenn $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ und ϱ weder Null, noch eine ganze Zahl; desgleichen im Falle eines ganzzahligen ϱ, wenn $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert, oder wenn $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ zwar divergiert, aber $a_\nu > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ und $\sum_1^\infty{}' \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho = 0$. Umgekehrt ist stets $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$, wenn $P(x)$ der Beziehung (77ª) genügt.

Andererseits hat man nach § 1, Ungl. (11) stets:

$$(78)\qquad |P(x)| > e^{|x|^{\varrho-\delta}},$$

für jedes $\delta > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen.

2. Um diese Resultate kürzer formulieren zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Genügt eine ganze Funktion $G(x)$ für jedes $\delta > 0$ den beiden Bedingungen:

(79) $|G(x)| < e^{|x|^{\mu+\delta}}$ für alle $|x| > R_\delta$

(80) $|G(x)| > e^{|x|^{\mu-\delta}}$ für unendlich viele beliebig grosse x,

so soll gesagt werden, $G(x)$ sei von der Ordnung μ.[1])

Man bemerke zunächst, dass die durch Ungl. (79) statuierte obere Schranke von $|G(x)|$ merklich erniedrigt werden kann, ohne dass deshalb Ungl. (80) hinfällig zu werden braucht. Insbesondere kann, wenn $\mu > 0$, für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

(79ª) $$|G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\mu}$$

werden und $|G(x)|$ dennoch der Ungl. (80) genügen. Denn, wie klein auch $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ vorgeschrieben sein mögen, so hat man stets:

$$\varepsilon \cdot |x|^\delta > 1 \quad \text{für: } |x| > R = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

und sodann:

$$\varepsilon \cdot |x|^\mu > |x|^{\mu-\delta},$$

so dass also die Existenz der Ungleichungen (79ª) und (80) sich keineswegs gegenseitig ausschliesst. Ist nun $G(x)$ durch die beiden Ungleichungen (79ª) und (80) charakterisiert, so wollen wir sagen: $G(x)$ gehöre dem Minimal-Typus der Ordnung μ, kürzer dem Minimal-Typus (μ), an.

3. Der Inhalt der Ungleichungen (77) (78) lässt sich daher zunächst folgendermassen aussprechen:

Die Ordnung einer primitiven ganzen Funktion $P(x)$ ist identisch mit dem Grenz-Exponenten.

---

[1]) Bei Borel (Leçons p. 74) „ordre apparent"; v. Schaper sagt, $G(x)$ sei vom Typus e^{x^μ} und gebraucht das Wort Ordnung in anderem Sinne (a. a. O., p. 12, 22). Nach seiner Terminologie wäre $G(x)$ von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$.

Sodann ergibt sich mit Rücksicht auf (77ª): Ist ϱ weder Null, noch eine ganze Zahl, so besteht die Beziehung $|a_\nu| < \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ oder auch nicht, je nachdem $P(x)$ dem Minimal-Typus (ϱ) angehört oder nicht.

Bedeutet ferner $[\varrho] < \varrho$ die grösste in ϱ enthaltene ganze Zahl (eventuell die Null, wenn $\varrho < 1$), so ist $P(x)$ vom Range $[\varrho]$.

Ist ϱ eine ganze Zahl und gehört $P(x)$ nicht dem Minimal-Typus (ϱ) an, so kann $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ nicht konvergieren, folglich ist in diesem Falle $P(x)$ vom Range ϱ. Gehört dagegen $P(x)$ dem Minimal-Typus (ϱ) an, so dass also $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ ausfällt, so wird in der Regel $P(x)$ vom Range $\varrho - 1$ (also ϱ Konvergenz-Exponent) sein; nur in besonderen Fällen, nämlich bei ganz spezieller Verteilung der a_ν, ist $P(x)$ vom Range ϱ.

Führt man statt des Grenz-Exponenten ϱ den Rang p ein, so kann der wesentliche Inhalt des letzten Absatzes auch folgendermassen formuliert werden: Eine primitive ganze Funktion $P(x)$ vom Range p ist höchstens vom Minimal-Typus $(p+1)$, mindestens vom Minimal-Typus p. Dabei gehören dem Minimal-Typus $(p+1)$ tatsächlich alle diejenigen $P(x)$ an, für welche $(p+1)$ Konvergenz-Exponent ist; dagegen dem Minimal-Typus (p) überhaupt nur solche $P(x)$, für welche p Divergenz-Exponent, ausserdem noch $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ ist und die a_ν ganz speziellen, auf jeden einzelnen Index ν sich erstreckenden Beschränkungen unterliegen.

Sitzung vom 7. März 1903.

1. Herr Seb. Finsterwalder referiert über die von Herrn H. Ebert vorgelegte Arbeit: „Über die Möglichkeit radioaktivierende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern und dauernd wirksam zu erhalten."

2. Herr Rich. Hertwig spricht über: „Das Wechselverhältnis von Kern und Protoplasma." Der Gegenstand wird anderwärts veröffentlicht.

3. Herr Sigm. Günther legt eine Abhandlung des Dr. J. Reindl: „Beiträge zur bayerischen Erdbebenkunde" vor.

4. Herr Gust. v. Bauer berichtet über eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Hermann Brunn: „Nachtrag zum Aufsatz über Mittelwertssätze für bestimmte Integrale."

Über die Möglichkeit radioaktivierende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern.

Von H. Ebert.

(Eingelaufen 7. März.)

Von all den merkwürdigen Eigenschaften, welche die radioaktiven Substanzen zeigen, ist unzweifelhaft die eigentümlichste die, dass sie Gasen, welche über sie hinwegstreichen, die Fähigkeit erteilen, selbst wieder radioaktivierende Wirkungen auszuüben, z. B. einer abgeschlossenen Luftmenge eine erhöhte Leitfähigkeit zu erteilen, d. h. in ihr Gasionen zu erzeugen. Dabei wird die Wirkung übertragen durch ein vom Gase mitgeführtes Etwas, welches augenscheinlich an sich zunächst elektrisch neutral ist; denn beim Passieren eines elektrischen Feldes von noch so starkem Spannungsgefälle geht die Wirkung nicht verloren, während negativ oder positiv elektrisch geladene Teilchen an den Begrenzungsflächen des Feldes ausgeschieden werden würden. Man hat dieses Etwas „Emanation" genannt; unentschieden ist noch, ob man sich dieselbe als einen Stoff etwa von der Natur der in der Luft von Ramsay entdeckten Edelgase zu denken hat (Rutherford), oder als einen Zustand, der eine spezielle die Emanation kennzeichnende Form von Energie repräsentiert (P. Curie und A. Debierne).

Das Studium dieser Emanationen verdient darum ein besonderes Interesse, weil es ganz sicher ist, dass auch die Bildung der in der freien Atmosphäre angetroffenen Gasionen zum Teil wenigstens auf die Wirkung gewisser derartiger Emanationen zurückzuführen ist.

Elster und Geitel wiesen nach, dass die den Erdkapillaren entstammende Bodenluft in hohem Grade aktivierende Wirkungen äussert, so dass in Höhlen oder Kellerräumen abgeschlossene ruhende Luft, zu der sie hinzutritt, abnorm hohe Werte der Leitfähigkeit annimmt. Ihnen gelang auch der Nachweis, dass sich die radioaktivierende Wirkung auf negativ geladenen in solcher Luft aufgestellten Körpern ansammeln lasse, eine Erscheinung, die nach Rutherford besonders charakteristisch für die vorhergegangene Wirkung einer Emanation ist. Ebert und Ewers haben dann ganz direkt nachgewiesen, dass die Bodenluft zwar arm an bereits vorhandenen Ionen, aber reich an einer elektrisch neutralen Emanation ist, welche in einer abgeschlossenen Luftprobe der freien Atmosphäre, die mit ihr infiziert wird, sehr bald eine weit über das normale Mass gesteigerte Ionenbildung wachruft. Was hier im Kleinen verfolgt würde, muss sich im Grossen auch in der Atmosphäre abspielen, wenn bei sinkendem Barometerstande Bodenluft aus der Erde heraus und in die untersten atmosphärischen Schichten eindringt.

Fast gleichzeitig haben Sella und Pocchettino sowie J. J. Thomson gefunden, dass sich beim Schütteln von Luft und Wasser eine Emanation bildet, welche besonders deutlich auftritt, wenn eine abgegrenzte Luftmasse in einem Wassertrommelgebläse mit einer grossen Menge Wasserleitungswasser wiederholt in innige Berührung getreten ist. Es hat den Anschein, als ob das Wasser Träger einer gewissen, wenn auch äusserst schwachen und direkt nicht nachweisbaren Radioaktivität sei, welche ihre Wirkung der Luft in Form einer in dieser erzeugten Emanation mitteile. Die Frage ist nicht von der Hand zu weisen, ob nicht die beiden genannten Erscheinungen in einem gewissen Zusammenhange stehen, und die Bodenemanation nicht zum Teil oder ganz ihr Entstehen den in den Erdkapillaren zirkulierenden Bodenwässern verdankt. Haben doch C. T. R. Wilson und später Allan nachgewiesen, dass frisch gefallenes Regenwasser bezw. frischer Schnee einen Rückstand oder Niederschlag hinterlassen, der deutliche, wenn

auch schnell abklingende radioaktivierende Wirkungen zeigt. Dringt diese radioaktive Substanz mit den Sickerwässern in den Boden ein, so vermag sie in der hier stagnierenden Luft die Emanation hervorzurufen. Freilich könnten auch schwach aktive mineralische Bestandteile direkt die Ursache derselben sein, deren Wirkung durch die Länge der Zeit, während welcher die Bodenluft ihrer Strahlung ausgesetzt ist, gesteigert wird.

Ueber diese Fragen ebenso wie über die nach der Natur der Emanationen überhaupt wird man erst zur völligen Klärung gelangen, wenn man die Emanationen verschiedenen Ursprungs deutlich voneinander zu unterscheiden vermag. Das wesentlichste Unterscheidungsmerkmal liegt in dem Grade, in welchem eine Emanation eine gegebene Luftmenge elektrisch leitend macht und dem Gesetze, nach welchem diese Wirkung mit der Zeit abklingt. Man kann beides durch eine einfache Beziehung zum Ausdruck bringen, in welcher gewisse Konstanten auftreten, welche als charakteristisch für eine bestimmte Emanation anzusehen sind, vergl. w. u.

Bei den in der Atmosphäre wirksamen Emanationen stösst man auf die grosse Schwierigkeit, dass diese unter gewöhnlichen Umständen nur in äusserst verdünnter Form in der Luft enthalten sind. Bringt man also eine gewisse Luftmenge unter eine Glocke, so hat man zwar auch eine bestimmte Menge der Emanation mit eingeschlossen, aber diese Menge ist so gering, dass ihre Wirkung vollkommen durch diejenige der Gefässwände z. B. überdeckt werden kann.

Seit länger als Jahresfrist sind bei mir in dem physikalischen Institute der Technischen Hochschule zu München Untersuchungen im Gange, welche zeigen, dass sich die radioaktivierenden Emanationen der natürlichen Luft ebenso wie die der Bodenluft und der mit Wasser geschüttelten Luft durch Verflüssigung anreichern und darin für längere Dauer in nahezu ungeschwächter Wirksamkeit erhalten lassen. Aus zahlreichen Einzeluntersuchungen hat sich auf dem im folgenden näher geschilderten Wege allmählich die folgende Methode herausgebildet: Lässt man eine grössere Menge mittels der

Lindemaschine verflüssigter Luft (gewöhnlich wurden 2 Liter benutzt) in einer doppelwandigen Dewarschen Vacuumflasche unter vermindertem Drucke sieden, indem man die Verdampfungsprodukte (mittels gekoppelter Wasserstrahlpumpen, einer durch Elektromotor betriebenen Bianchi- oder Geryk-pumpe) rasch absaugt, so kann man leicht Temperaturen unter — 200° C. erreichen. Baut man also in die Dewarflasche ein Kondensationsgefäss ein, welches mit der Aussenluft oder der zu untersuchenden, in einem grossen Glockengasometer enthaltenen Luft kommuniziert, so kann man von dieser beliebige Mengen zu Flüssigkeit verdichten (Siedepunkt bei normalem Druck von — 192° bis — 182° je nach der Zusammensetzung). Durch eine geeignete Heberanordnung kann man von Zeit zu Zeit Proben der verflüssigten Luft entnehmen. Wenn nun auch diese Luft wieder verdampft, so lässt sich doch folgendes nachweisen:

1. Die aus der verflüssigten Luft aufsteigenden Verdampfungsprodukte nehmen die Emanation *nicht* mit, diese verbleibt vielmehr in dem Verdampfungsrückstande.

2. Die Wirksamkeit der Emanation klingt bei der Temperatur der flüssigen Luft mit der Zeit nur sehr langsam ab, bei weitem nicht so schnell, als man die Luft selbst verdampfen lassen kann.

Wenn man daher immer neue Luftmengen kondensiert und das Kondensat durch Stehenlassen eindampft, so reichert sich die Emanation immer mehr an und kann auf kleinstem Raume zusammengedrängt zu weiterer Untersuchung verwendet werden, falls man nur dafür Sorge trägt, dass in der Sammelflasche immer noch eine kleine Menge flüssiger Luft verbleibt. Denn erst wenn diese vollkommen verdampft ist, bei einer Temperatur, die augenscheinlich wesentlich höher liegt als der Verdampfungspunkt der flüssigen Luft, geht auch die Emanation in den umgebenden Gasraum mit über, hier ihre ionenbildende Wirksamkeit äussernd. Man kann geradezu von einer bestimmten Verdampfungstemperatur der

Emanation sprechen; sollte sich zeigen, dass die Emanationen verschiedener Herkunft verschiedene und wohlcharakterisierte Verdampfungspunkte aufweisen, so wäre damit ein neues und sehr wichtiges Unterscheidungsmittel für dieselben gewonnen.

Der Gang der Untersuchnng ist hiernach kurz folgender: Eine bestimmte Literzahl der zu prüfenden Luft (Frischluft, Bodenluft, Kellerluft, mit Wasser geschüttelter Luft, Regenluft) wird verflüssigt, die Flüssigkeit bis zu einer bestimmten cbcm-Zahl eingedampft und dann durch ein System von Absorptionsmitteln (Kalilauge, Chromsäure, Schwefelsäure) und ein starkes zwischen zwei konachsialen Zylindern dauernd erhaltenes elektrisches Feld (zur Wegnahme aller etwa bereits vorhandener, elektrisch nicht neutraler Beimengungen) in eine grosse Glasglocke von 60 Liter Inhalt verdampft, die vorher gut mit frischer, direkt dem Freien entnommener Luft ausgespült war; unter die Glocke ist ein Elster-Geitelscher Zerstreuungsapparat eingebaut, mit dessen Hilfe die Leitfähigkeit vor und nach dem Einlassen der verdampften Luft gemessen wird.

Statt in einem besonderen Hilfsgefässe zu kondensieren, kann man natürlich auch die Luftverflüssigungsmaschine direkt verwenden und in dieser Weise wurden die ersten Versuchsreihen auch ausgeführt.

Ich habe das geschilderte Verfahren seither in ausgedehntem Masse besonders zum Studium derjenigen Emanationen verwendet, welche für das Zustandekommen der Ionenführung der freien Atmosphäre und damit der luftelektrischen Erscheinungen in erster Linie in Betracht kommen. Dabei bin ich vielfach von den Herren Gelehrten und Ingenieuren der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen, Abteilung für Gasverflüssigungen in München-Höllriegelskreuth, aufs wirksamste unterstützt worden, welche die Verdampfungsrückstände auch jener grossen Mengen flüssiger Luft, die in ihrem Betriebe verwendet werden, für mich sammelten; ich danke den genannten Herren, namentlich Herrn Dr. Linde und Herrn Dr. Sieder, auch an dieser Stelle.

Durch ein Referat in der Naturwissenschaftlichen Rund-

schau wurde ich dieser Tage darauf aufmerksam gemacht, dass es den Herren Rutherford und Soddy gelungen ist, auch die radioaktivierenden Emanationen von Thor- und Radiumverbindungen in ähnlicher Weise in flüssiger Luft festzuhalten.[1]) Desgleichen berühren sich meine Untersuchungen in einem Punkte mit denen von P. Curie, der zeigte, dass die von Radiumsalzen ausgehende, in einem zugeschmolzenen Glasröhrchen aufbewahrte Wirkung auch noch bei der Temperatur der flüssigen Luft fortbesteht und hier mit derselben Zeitkonstante abklingt wie bei gewöhnlicher oder bei sehr viel höherer Temperatur.

Nach dieser orientierenden Uebersicht über das von mir eingeschlagene Verfahren gehe ich zur Mitteilung der Ergebnisse der einzelnen Versuchsreihen über.

1. Im Herbste 1901 veranlasste ich den in meinem Laboratorium über die spontane Ionisierung verschiedener unter einer Glasglocke von ca. 60 Liter Inhalt eingeschlossener Gase nach der Methode von H. Geitel und J. Elster und H. Geitel[2]) arbeitenden cand. phys. et math. Karl Ruf[3]) gelegentlich auch grössere oder kleinere Quantitäten flüssiger Luft unter der Glocke verdampfen zu lassen, wobei die Verdampfungsprodukte durch einen oben an dem dauernd geerdeten metallenen Verschlussstücke der Glocke angebrachten Hahn entweichen konnten. Dabei zeigte sich an dem unter der Glocke aufgestellten, gegen äussere elektrische Einwirkungen genügend geschützten und durch eine luftdicht eingeführte Sonde von aussen her zu ladenden Elster-Geitelschen Zerstreuungsapparate regelmässig folgendes: Die Zerstreuung blieb durchaus die normale, während die flüssige Luft verdampfte; dagegen stiegen

---

[1]) E. Rutherford und F. Soddy, Proceedings of the Chemical Soc. 18, 219, 1902; Naturw. Rundschau 18, 111, Nr. 9, 1903.

[2]) H. Geitel, Physikal. Zeitschrift 2, 116, 1900 und J. Elster und H. Geitel, ebenda 2, 560, 1901.

[3]) Vergl. H. Ebert: Bericht über die in München im Jahre 1901/1902 ausgeführten luftelektrischen Arbeiten. Nachr. der Göttinger Ges. der W. math.-phys. Kl., Heft 3, S. 10, 1902.

die Zerstreuungswerte für beide Vorzeichen stark an, unmittelbar nachdem der letzte Rest der flüssigen Luft verdampft war. Von dieser Erscheinung bin ich, nachdem Herr Ruf seine auf andere Ziele gerichtete Arbeit abgeschlossen hatte, ausgegangen. Zunächst war durch einige Vorversuche festzustellen, ob die ionisierende Wirkung nicht etwa nur eine Begleiterscheinung des Verdampfungsprozesses sei, und ob sie wirklich ihren Sitz in der flüssigen Luft selbst habe.

2. Man könnte in der Tat meinen, dass der Prozess des heftigen Siedens der flüssigen Luft allein schon einen unmittelbaren Einfluss auf die elektrischen Vorgänge unter der Glocke haben könnte. Aber auch wenn das Siedegefäss ausserhalb der Glocke sich befindet und durch eine Saugpumpe nur die Verdampfungsprodukte durch die Glocke gesaugt werden, zeigt sich dieselbe Erscheinung: so lange die Luft siedet, tritt keine Erhöhung der Zerstreuung ein, unmittelbar danach steigt deren Betrag an; erst ganz allmählich, nach vielen Tagen, stellt sich der ursprüngliche Zustand wieder her.

3. Weiter könnte man geneigt sein, die Erscheinung auf die elektrischen Erregungen zurückzuführen, welche beim Versieden flüssiger Luft, die mit Eispartikelchen vermengt ist, aufzutreten pflegen;[1]) das Eis wird dabei positiv elektrisch, die von ihm geriebenen Gegenstände negativ. Man könnte denken, dass so lange noch flüssige Luft vorhanden ist, durch Reiben zwar immer neue Ladungen geschaffen werden, dass sie sich aber nicht ausgleichen können, da die flüssige Luft ein vorzüglicher Isolator ist. Ist diese verdampft, so könnten etwa kleine Fünkchen zwischen den geladenen Partikelchen verschiedenen Vorzeichens den Ausgleich herbeiführen, und dabei Ionen bilden, welche dann in die Glocke eingesaugt die

---

[1]) Vergl. H. Ebert und B. Hoffmann: Elektrizitätserregung in flüssiger Luft; diese Berichte 30, 1, 1900 und Annalen der Physik, 2, 706, 1900.

besprochene Erscheinung bedingen. Wenn man aber direkt die Luft aus der Umgebung einer zwischen Spitze und Platte übergehenden kleinen Funkenstrecke absaugt, so erhält man wohl die Erscheinung einer vorübergehenden Ionenführung, nicht aber das nachträgliche Ansteigen des elektrischen Leitvermögens der Luft, wie es eine Emanation hervor zu bringen vermag.

Nach unseren früheren Erfahrungen kann man übrigens die Elektrisierung durch Eisreibung fast vollkommen eliminieren, wenn man die flüssige Luft vorher filtriert. Nun zeigte sich kein Unterschied, ob man sorgfältig filtrierte flüssige Luft verwendete oder Luft, die nicht filtriert, oder durch Anhauchen sogar noch besonders reich an Eis- und Kohlensäurepartikelchen gemacht worden war. Die Eisreibung konnte also nicht die Ursache der starken Luftionisierung sein, ebensowenig der Kohlensäuregehalt der nicht gereinigten Luft.

Um indessen nach dem Verdampfen weder diesen noch Wasserdampf in den Versuchsraum zu bekommen, wurde bei allen weiteren Versuchen die verwendete flüssige Luft unmittelbar vor dem Einbringen noch einmal auf das Sorgfältigste durch Fliesspapier hindurch filtriert.

4. Für die weiter ausgedehnten Messungsreihen war die Versuchsanordnung vor allem so zu treffen, dass kein störendes elektrisches Feld das eingeschlossene Luftquantum dauernd beeinflussen konnte; denn es ist bekannt, wie stark die Ionenführung einer ruhenden Luftmasse selbst durch sehr kleine elektromotorische Kräfte, wenn sie nur genügend lange zur Wirksamkeit gelangen, beeinflussbar ist.[1]) Daher wurde zunächst das verwendete kleine zylindrische Dewargefäss von 110 cbcm Inhalt ebenfalls möglichst gut elektrostatisch geschützt. Dasselbe war vollkommen mit Stanniol umkleidet, aus dem nur vorn ein längerer, rückwärts ein kürzerer schmaler Streifen ausgeschnitten war, damit das Verdampfen der Luft von aussen her verfolgt werden konnte. Das Gefäss

---

[1]) Vergl. z. B. H. Geitel in der oben S. 138 genannten Arbeit.

selbst wurde von einem Drahtgestelle gehalten, das auf einen messingenen Untersatz mit Rand aufgelötet war. Ueber das Ganze wurde ein oben und an den Seiten völlig geschlossener Sturz aus Drahtgaze von nur 0,3 mm Maschenweite gestülpt; das so geschützte Gefäss wurde auf die metallene Grundplatte, auf der auch der Zerstreuungsapparat stand, gesetzt und mit dieser dauernd gut geerdet. Wie bei Elster und Geitel war der auf der Grundplatte stehende Zerstreuungsapparat (ohne Schutzdach) von einem auf derselben Platte stehenden grossen engmaschigen Messingdrahtkäfig, der die Innenwände der Glocke bekleidete, umgeben; nur oben war eine kleine Oeffnung zum Einführen der Sonde beim Laden und an der Seite eine vergitterte Oeffnung zum Ablesen der Elektroskopskala frei gelassen.

Dass der elektrostatische Schutz ein vollkommener war, wurde durch besondere Versuche mit einer grossen Influenzmaschine erwiesen.

Gemessen wurde jedesmal der Spannungsverlust in Volt, welchen der Zerstreuungskörper bei + und bei — Ladung in 15 Minuten erlitt; erfolgte die Entladung so schnell, dass nur 10 oder nur 5 Minuten lang der Elektrizitätsverlust verfolgt werden konnte, so wurden die erhaltenen Zahlen des Vergleichs halber immer auf 15 Minuten umgerechnet. Diese Werte geben ein Mass für die Zahl der zur Beobachtungszeit in dem Versuchsraume vorhandenen freien — und + Ionen. Unmittelbar nach diesen Zerstreuungsmessungen wurde die während derselben hoch gezogene Sonde wieder bis zur Berührung mit dem Zerstreuungskörper herabgelassen, so dass dieser sich mit seiner Umgebung immer auf gleichem Potentiale befand.

An die Glocke war noch ein Quecksilbermanometer angeschlossen, in ihr ein Thermometer befestigt. Direktes Sonnenlicht wurde vom Apparate fern gehalten.

5. Die verschiedenen Versuchsreihen, von denen sich die meisten über mehrere Wochen erstreckten, wurden durch Pausen unterbrochen, während deren die Glocke sowie alle unter ihr aufgestellten Gegenstände sorgfältig geputzt und ausgelüftet wurden; es ist bekannt, dass die Wände eines Raumes, der eine

kräftig wirksame Emanation oder eine sehr ionenreiche Luft enthalten hat, selbst nach Entfernung derselben noch längere Zeit induzierte radioaktivierende Wirkungen auf die in ihn eingeführte frische Luft ausüben, so dass die folgenden Versuchsreihen durch die vorhergehenden gestört werden können. Diese Pausen wurden gleichzeitig dazu benutzt um die Isolation des Elektroskopes bei abgenommenem Zerstreuungskörper zu prüfen. Dieselbe war — wohl Dank auch der Natriumtrocknung — dauernd eine so vorzügliche, dass der Isolationsverlust nur etwa 1 Volt pro Stunde betrug, also bei den viertelstündigen Zerstreuungszeiten als innerhalb der Fehlergrenze fallend vernachlässigt werden konnte.

Nach dem Zusammensetzen des Apparates ergaben sich in der eingeschlossenen frischen Luft je nach der Jahreszeit Zerstreuungen von 11 bis 17 Volt pro 15 Minuten und zwar für beide Vorzeichen nahezu die gleichen Werte. Wurde die Luft sich selbst überlassen, so stieg die Zerstreuung allmählich an, um Maxima von etwa 23 bis 34 zu erreichen, die dann dauernd beibehalten wurden. Es sind dies die durch spontane Ionisierung in der abgeschlossenen Luft zu erreichenden Werte; dieselben werden erst nach tagelangem Stehen erreicht.

6. Um zunächst zu entscheiden in wie weit sich die aktivierende Wirkung in der flüssigen Luft anreichern und konservieren lasse, wurden Versuche in der folgenden Weise angestellt: Mit Hilfe der Luftverflüssigungsmaschine des Institutes wurde eine grössere Menge flüssiger Luft, gewöhnlich 6 bis 7 Liter, unmittelbar hintereinander hergestellt. Von dieser wurden 107 cbcm unmittelbar nach der Bereitung in dem Dewargefässe unter die Glasglocke gebracht und die durch sie herbeigeführte Erhöhung der Zerstreuungswerte, namentlich aber auch die Art des Wiederabklingens derselben wochenlang verfolgt. Unterdessen verdampfte die übrige gleichzeitig bereitete flüssige Luft allmählich mehr und mehr; es wurden aber die Reste der einzelnen Flaschen immer in eine einzige Sammelflasche zusammengegossen, so dass sich in dieser die Verdampfungsrückstände immer mehr anreicherten. Als dieser Rest auf

etwa 150 cbcm eingedampft war, wurden von ihm abermals 107 cbcm in das Dewarfläschchen gegossen und der durch diese herbeigeführte Gang der Zerstreuungen nach sorgfältig wieder gereinigter und gelüfteter Glocke untersucht.

Zur Erläuterung diene der folgende einzelne Fall:

a) Frische Luft. Dieselbe war infolge ihres Reichtums an Stickstoff wasserklar und siedete ziemlich heftig. Die Zerstreuung war unmittelbar nach dem Aufsetzen der Glocke 18 für + und 14 für — und ging zunächst etwas (bis auf 13) zurück; dieser fast immer beobachtete anfängliche Rückgang der Zerstreuung beruht vielleicht auf einer schwachen Nebelbildung in den durch das Einbringen der flüssigen Luft stark abgekühlten nächsten Luftschichten. Nach ca. drei Stunden war alles verdampft, die Zerstreuung war 18 für +, 19 für —. Nun beginnt ein Steigen, so dass schon nach 8 Stunden nach dem Schliessen der Glocke, 5 Stunden nach dem Verdampfen des letzten flüssigen Restes, die Zerstreuung auf 21 bezw. 23 gewachsen ist, während sie bei spontaner Ionisierung erst Werte von höchstens 18 bis 19 Volt in dieser Zeit erreicht haben würde. Nach 30 Stunden war 26 bezw. 30 erreicht, nach 127 Stunden 33 und 37, Werte, die sich nur noch wenig erhöhten, so dass nach 173 Stunden, also nach 7 $^1/_4$ Tagen, 37 für +, 39 für — erreicht war.

b) Gealterte Luft. Diese hatte eine intensiv blaue Färbung, da fast aller Stickstoff aus ihr verdampft war und sie vorwiegend nur noch aus Sauerstoff bestand. Sie siedete nur noch schwach; es dauerte 4 $^1/_2$ Stunden, bis die in dem Dewargefäss unter die Glocke gestellten 107 cbcm völlig verdampft waren. Die Zerstreuung war anfangs 15 bezw. 14, bei einer zweiten eine Stunde nach dem Einbringen der flüssigen Luft angestellten Messung 14 für beide Vorzeichen. Unmittelbar nach dem Verdampfen des letzten Restes stieg die Zerstreuung auf 71 für + wie für — an, wuchs also auf den fünffachen Betrag und strebte schnell einem Maximum von 81 zu, welches 11 $^1/_2$ Stunden nach dem Abschliessen der Luft, also schon 7 Stunden nach dem Verdampfen des letzten Restes erreicht war.

Von diesem Maximalwerte sanken die Zerstreuungswerte erst rasch, dann aber immer langsamer und langsamer herab; nach 40 Stunden konnte noch immer 65 für + und 69 für — gemessen werden, nach 100 Stunden noch 63 bezw. 68. Die Untersuchung wurde 410 Stunden lang fortgesetzt, nach welcher Zeit die Zerstreuung noch 39 bezw. 44 betrug. Dies sind Werte, gegen welche die Reihe a) hinstrebt, wenn man sie sich bis zu dieser Dauer verlängert denkt; bemerkenswerter Weise liegen diese Werte noch immer etwa doppelt so hoch, als wenn die während der betreffenden Jahreszeit eingesogene Frischluft vollkommen sich selbst überlassen geblieben und sie nicht mit einem ionisierenden Agens versetzt worden wäre.

Die Lindemaschine des Institutes ist so aufgestellt, dass dieselbe die Luft aus dem Laboratorium entnimmt und verflüssigt. Diese Luft gibt, unter der Glocke abgesperrt, nach sehr langem Stehen Ladungsverluste von nur 20 Volt für — Ladungen und von 19 Volt für + Ladungen in der üblichen Beobachtungszeit von 15 Minuten. Sie enthält also keine merklichen Verunreinigungen durch Thorerdestaub oder andere radioaktive Präparate.

Der beschriebene Doppelversuch lehrt:

α) Frisch bereitete flüssige Luft enthält einen Bestandteil (oder einen Zustand), der erst nach völligem Verdampfen derselben frei wird (vergast oder verdampft), welcher die Fähigkeit besitzt, in abgeschlossener, ruhender, vor allen äusseren elektrischen Wirkungen geschützter Luft freie elektrische Ionen beiderlei Vorzeichens hervorzubringen und zwar weit rascher und in merklich grösserem Betrage, als die gasförmige Luft aus sich selbst heraus zu entwickeln im Stande ist, etwa infolge eines in ihr selbst normal enthaltenen radioaktiven Bestandteils oder schwacher Strahlungen, die von den Gefässwänden ausgehend zu denken sind.

β) Dieser Bestandteil oder Zustand behält seine radioaktivierende Wirkung in der flüssigen Luft, so

dass diese bei dem allmählichen Eindampfen prozentual reicher an demselben wird.

γ) Diese Anreicherung gibt sich sofort kund, sowie ein bestimmtes Volumen flüssiger Luft einem gegebenen Quantum gasförmiger, unter normalen Bedingungen befindlicher Luft beigegeben wird: die gealterte Luft erhöht nach dem Verdampfen die Leitfähigkeit der Luft plötzlich um ein Vielfaches des normalen, spontan nach langer Zeit erworbenen Betrages, die frische Luft erreicht dies erst ganz allmählich nach längerer Zeit.

δ) Ist jener Bestandteil aber erst einmal in die Gas- oder Dampfform übergegangen, oder hat sich der als wirksam zu betrachtende Zustand dem Gase mitgeteilt, so klingt seine Wirkung namentlich im Anfange rasch ab; derselbe hält sich also in der gasförmigen Luft nicht; hier wird seine Energie augenscheinlich bei dem Ionisierungsprozesse selbst erschöpft.

7. Angesichts dieser Ergebnisse wird man zunächst an die wenigst flüchtigen Bestandteile der Luft als die möglichen Träger der Wirkung denken können. Eis und Kohlensäure sind nach den Ausführungen S. 140 bereits ausgeschlossen. Aber man könnte an die Edelgase Krypton und Xenon denken, deren Siedepunkte oberhalb desjenigen des Sauerstoffs liegen (Sauerstoff — 182,5, Krypton — 151,67, Xenon — 109,1 nach Ramsay und Travers), welche also erst merklich verdampfen, wenn der Sauerstoff völlig vergast ist und die sich in alternder flüssiger Luft mehr und mehr anreichern. In der Tat bieten ja gerade in elektrischer Beziehung die Edelgase so viele Eigentümlichkeiten, dass die Vermutung nicht von der Hand zu weisen ist, dass ihnen auch bei der Ionisierung der Atmosphäre eine besondere Rolle zufalle. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, stellte ich Verdampfungsversuche mit Rückständen an, welche mir, wie oben S. 137 erwähnt, die Linde-

gesellschaft zur Verfügung stellte und die meist von vielen Hunderten von Litern verflüssigter Luft zurückgeblieben waren.

Indessen zeigte sich ein Ansteigen der Zerstreuungskurven, wie es dem Gehalte an Edelgasen entsprochen hätte, bei diesen Proben durchaus nicht. Ein Beispiel möge dies erläutern:

Am 1. September 1902 erhielt ich den Verdampfungsrückstand von ca. 300 Litern flüssiger Luft zur Verfügung gestellt. Die Farbe desselben war tief himmelblau, fast grünbläulich; die Olszewskischen vier Absorptions-Banden waren selbst in sehr dünner Schicht schon deutlich zu erkennen; die Flüssigkeit bestand demnach fast nur noch aus verflüssigtem Sauerstoff mit Argon, Krypton und Xenon. Das Sieden im Dewargefäss war äusserst schwach. Die Zerstreuung, die anfangs 20 bezw. 19 für + und — gewesen war, stieg nach vier Stunden auf 25 bezw. 40, nach 15 Stunden auf 52 und 54 an und erreichte ganz allmählich die Höchstwerte 53 und 56, von welchen die Zerstreuung ganz langsam herabsank. Die Beobachtungsreihe wurde 506 Stunden lang fortgesetzt und es war interessant zu sehen, wie die Endwerte ganz allmählich in dieselben Beträge übergingen, wie bei der von uns im Laboratorium mit unserer Maschine verflüssigten Luft, trotz der ganz verschiedenen Anfangswerte der einzelnen Reihen.

Verschiedentlich wurden auch direkte Versuche mit Edelgasen angestellt, indem grössere oder kleinere Beträge von Helium, Argon oder Krypton unter die Glocke gelassen wurden, die freilich noch nicht vollkommen gereinigt waren. Es zeigte sich niemals eine merkliche ionisierende Wirkung. Allerdings sind diese Versuche nicht vollkommen beweiskräftig, da immer nur verhältnismässig recht geringe Mengen der genannten Edelgase verwendet werden konnten; die Versuche nach dieser Richtung werden daher augenblicklich mit grösseren Mengen fortgesetzt.

8. Weiter aber war die Möglichkeit nicht ganz ausgeschlossen, dass in der Lindemaschine selbst die Ursache der

Aktivierungen zu suchen sei, und dass diese nur durch den Verflüssigungsprozess zu der beobachteten Wirksamkeit gebracht würden. Wenn das Material der dreifachen, ineinander steckenden Kupferrohrspiralen des Gegenstromapparates auch nur ganz schwache Becquerelstrahlungen aussenden sollte, so wäre die soeben besprochene Verschiedenheit der Luftproben verständlich. Es war daher erwünscht, bestimmte Luftmengen zu verflüssigen, ohne den Lindeapparat mit denselben passieren zu müssen. Dies gelingt, wenn man die von der Maschine gelieferte flüssige Luft nur als Kältemittel benutzt und mit ihrer Hilfe die zu untersuchende Luftprobe kondensiert. Eine weithalsige Zweiliter-Dewarflasche wurde durch einen grossen Kautschukstopfen geschlossen, durch dessen eine Bohrung die in der Flasche enthaltene verdampfende flüssige Luft durch eine Luftpumpe abgesaugt wurde; dadurch konnte die Siedetemperatur bis auf — 200° herabgezogen werden. Durch die andere, weitere Bohrung war der Hals eines unten kolbenförmig erweiterten, in die flüssige Luft tauchenden Gefässes gesteckt, welches oben durch einen wiederum doppelt durchbohrten Stopfen geschlossen war. Durch denselben ging einerseits ein kurzes, schon im Gefässhalse endendes Rohr hindurch, andererseits ein bis zum Boden des Gefässes reichendes längeres Rohr. Auf die beiden äusseren Rohrenden waren Gummischläuche gesteckt, die durch Quetschhähne verschliessbar waren. An dem Aufgeblasen- oder Zusammengedrücktwerden der Schläuche ersieht man, ob Über- oder Unterdruck in dem Gefässe herrscht. Wird das längere Rohr zunächst geschlossen gehalten, so kann durch das kürzere Rohr Luft einströmen, welche in das Gefäss hinein kondensiert. Hat man genügend viel verflüssigte Luft in diesem angesammelt, so schliesst man das kürzere, stellt die Pumpe ab, stellt wieder Atmosphärendruck in dem Kühlgefässe her und hebt eventuell das Kondensationsgefäss etwas aus der Dewarflasche heraus; der Druck über dem Kondensat steigt und treibt die Flüssigkeit durch das bis auf den Boden reichende längere Rohr wie bei einem Siphon hinaus. Man lässt sie durch ein Filter gehen, fängt sie in dem

kleinen zylindrischen Dewargefässe auf und bringt sie unter die Zerstreuungsglocke.

Hier kommt die verflüssigte Luftprobe weder mit der Maschine noch mit der aus dieser hervorgegangenen flüssigen Luft in Berührung.

9. Von den verschiedenen Luftproben, die nach dieser Methode untersucht wurden, verdient die dem Erdboden entnommene Bodenluft ein besonderes Interesse. In der in einer Arbeit von mir und Dr. P. Ewers[1]) näher angegebenen Weise wurde Bodenluft aus den Erdkapillaren des Institutsgartens in ein grösseres Glockengasometer angesaugt und von diesem in das Kondensationsgefäss übergeführt; zwei Gasometerfüllungen von je 35 Liter Bodenluft gaben 56 cbcm flüssige Luft in dem Dewargefässchen unter der Glasglocke, also nur etwa halb so viel als bei den in 3. und 4. beschriebenen Versuchen verwendet wurde. Nichtsdestoweniger stieg die Zerstreuung von 14 auf 156 für +, 192 für — bereits nach einer Stunde. Nach vier Stunden wurden die Höchstwerte 850 und 870 erreicht, dann erfolgt das allmähliche Abklingen in der gewöhnlichen Weise, doch waren noch nach 265 Stunden Zerstreuungen von 144 bezw. 150 zu konstatieren. Vergleicht man diese Zahlen mit den beim direkten Einleiten der Bodenluft in die Glocke erhaltenen Werten (vgl. die oben genannte Arbeit S. 163), so sieht man, dass die Abkühlung der Bodenluft auf — 200° der aktivierenden Wirksamkeit derselben keinen Abbruch tut, sondern dass dieselbe beim verflüssigten Zustande gewissermassen latent weiter existiert und sofort wieder in Wirksamkeit tritt, wenn das Kondensat wieder verdampft.

Verglichen mit den oben angeführten Reihen ergeben sich hier enorm hohe Zerstreuungen, was darauf hinweist, dass es nicht die flüssige Luft an sich ist, welche die radioaktivierenden Wirkungen enthält, sondern dass sie nur als Konservator der in der Luft bereits vorhandenen wirkenden Teilchen aufzufassen

[1]) H. Ebert und P. Ewers, Physikal. Zeitschrift 4, 162, 1902.

ist. Auch die in 7. erörterte Ansicht, dass es nicht die Edelgase an sich sind, deren Menge in der flüssigen Luft das Bestimmende ist, wird durch die vorliegenden Ergebnisse gestützt; denn es liegt kein Grund zu der Annahme vor, dass die Bodenluft besonders reich an Krypton oder Xenon ist.

Die Unterschiede der in unserem Laboratorium und dem der Lindegesellschaft verflüssigten Luftproben (vergl. S. 146) dürfte sich daraus erklären, dass bei uns die Lindemaschine in einem tief gelegenen Parterreraum untergebracht, und die aspirierte Luft daher reicher an stagnierender Keller- und Bodenluft ist als draussen in der auf freiem Felde erbauten Höllriegelskreuther Versuchsstation der genannten Gesellschaft.

10. Bei den oben (9.) angeführten Studien über die Bodenluft konnte der Nachweis geführt werden, dass die dem Erdboden direkt entnommene Luft an sich zunächst nur ein geringes Leitvermögen besitzt, dass sie also nur wenig freie Ionen mitbringt, dass sie dagegen das Vermögen besitzt, solche zu erzeugen, entweder in sich selbst oder in einer ruhenden Luftmasse, der sie beigemischt wird. Eine ähnliche Frage war auch hier von Interesse. Es handelte sich darum, festzustellen: Sind freie Ionen bereits in der flüssigen Luft enthalten, die beim Verdampfen derselben wieder in die Atmosphäre übergehen oder entweicht aus ihr nur eine Emanation, die an sich elektrisch indifferent ist, die aber sekundär in der ruhenden Luft Ionen zu erzeugen vermag?

Dies liess sich entscheiden, indem man die verdampfende flüssige Luft vor dem Eintritt in den Versuchsraum durch ein starkes elektrostatisches Feld gehen lässt. Die Luft wurde ausserhalb verdampft. Damit aber die Anordnung im übrigen der vorher benutzten völlig glich, wurde das kleine Dewargefäss mit seinem Metallgazemantel unter der Glocke belassen. Zwischen das Verdampfungsgefäss und die Glocke wurde der schon früher (a. a. O. S. 164) benutzte Zylinderkondensator eingeschaltet, zwischen dessen beiden Belegen eine Hochspannungssäule ein hohes Spannungsgefälle unterhielt. War die Wirksamkeit der verdampfenden Luft an den Übertritt

elektrisch geladener Teilchen gebunden, so musste sich die Wirkung durch die Zwischenschaltung des Spannungsrohres wesentlich vermindern. Doch wurde nichts dergleichen bemerkt. Es scheint daher in der flüssigen Luft nur eine Emanation gebunden zu sein, nicht aber freie Ionen.

In der Tat schlugen auch Versuche fehl, negativ geladene, in flüssiger Luft hängende Drähte zu aktivieren oder an der Kathode eines eingetauchten Elektrodenpaares eine Anreicherung der aktivierenden Wirkung zu erzielen. Auch gelang es nicht, eine von flüssiger Luft etwa ausgehende Strahlung mit dem Leuchtschirm oder der photographischen Platte mit Sicherheit nachzuweisen.

11. Die bisher beschriebenen Versuchsreihen zeigten, wie sich durch den Verflüssigungsprozess die in der Luft enthaltene Emanation akkumulieren lässt. Es ist aber weiter von Interesse, zu untersuchen, ob die Verflüssigung auch konservierend wirkt, d. h. ob sich die Wirksamkeit der Emanation in dem verflüssigten Zustande länger erhält, als wenn sie in dem gasförmigen Zustande verbleibt. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, wurde die folgende Doppelreihe von Messungen mit Bodenluft ausgeführt.

Mittels eines 120 Liter fassenden Glockengasometers wurden 88 Liter Bodenluft entnommen, von denen 75 Liter durch die Glocke geschickt wurden, die vorher gut ausgelüftet und mit frischer Luft durchgespült worden war. In der Frischluft ergaben sich Zerstreuungswerte von nur 24 Volt (pro 15 Minuten) für beide Vorzeichen, vergl. die Fig. 1, welche den zeitlichen Verlauf der ganzen Erscheinung darstellt; als Abscissen ist die Zeit in Stunden, als Ordinaten die Zerstreuung in Volt pro 15 Minuten eingetragen. Schon unmittelbar nachdem die durch Kalilauge, Schwefelsäure und das Spannungsrohr geschickte Bodenluft eingetreten war (Stelle A der Kurve), stieg die Zerstreuung sehr stark an, so dass sie die Werte 855 für +, 847 für — nach ca. 3 Stunden, 953 bezw. 945 nach $5^1/_2$ Stunden erreichte. Die Höchstwerte, bis zu denen die Zerstreuung nach $5^1/_2$ Stunden anstieg, waren 954 für +,

947 für — (aus der nach den einzelnen Beobachtungsdaten konstruierten Kurve bei M entnommen). Von da an fielen die Werte in regelmässiger Weise ab, wie es auch in den von Ewers

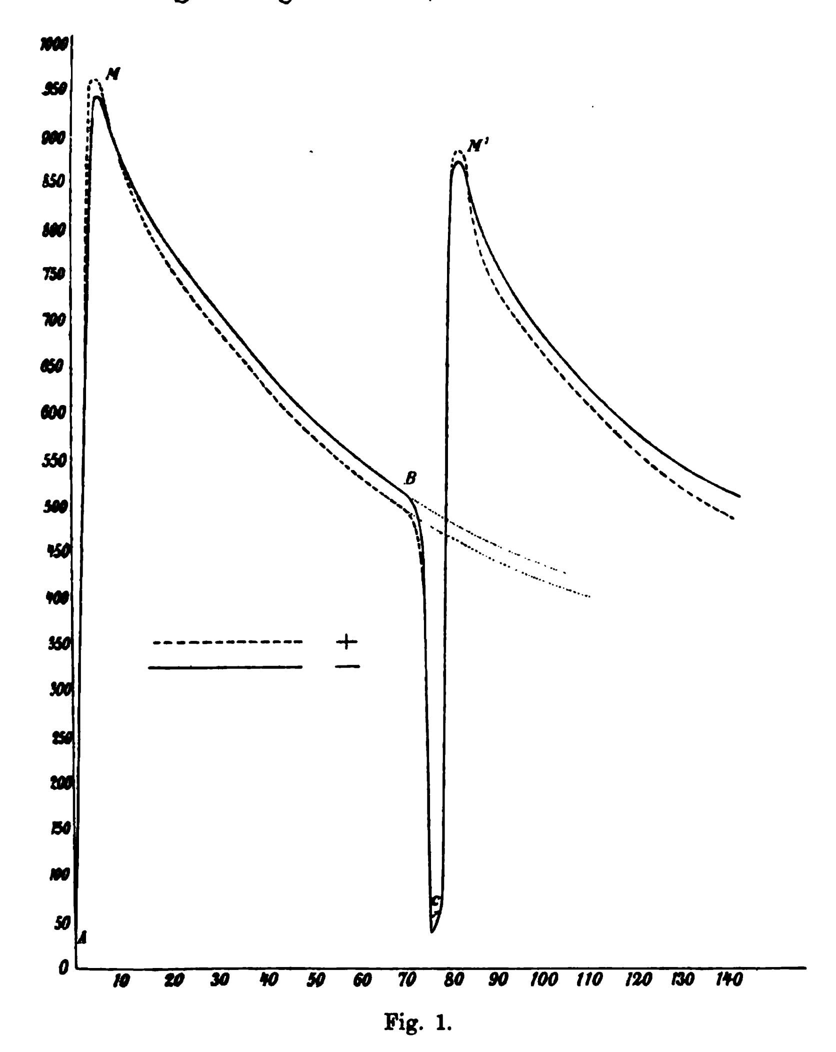


Fig. 1.

und mir in der oben erwähnten Arbeit mitgeteilten Kurven zum Ausdruck kommt.

Am gleichen Tage wurden nun unmittelbar nachdem die 75 Liter durch die Glocke geschickt worden waren, mit demselben Gasometer abermals 75 Liter Bodenluft entnommen, dann das Gasometer durch je eine Waschflasche mit Kalilauge und Schwefelsäure hindurch mit dem in der Dewarflasche befindlichen Kondensationsgefässe in Verbindung gesetzt, und die zweite Bodenluftprobe alsbald in dieses hinein verflüssigt. Diese Luftprobe wurde nun drei Tage lang verflüssigt erhalten, während gleichzeitig das Abklingen der Zerstreuung, welche die Vergleichsluftprobe unter der Glocke hervorrief, genau verfolgt wurde. Wenn auch während der Nacht etwas von dem Kondensat in das Gasometer, was dauernd angeschlossen blieb, zurückverdampfte, so konnte es doch leicht am anderen Morgen wieder in die Flüssigkeit zurückgeholt werden, dadurch, dass man mittels der Saugpumpe die Verdampfung der das Kondensat umgebenden Kühlluft etwas beschleunigte und damit die Temperatur erniedrigte. Jedenfalls wurde der wirksame Bestandteil in dem Kondensationsgefäss zum grössten Teile zurückgehalten, da die verflüssigte Luft aus diesem nie ganz entwich.

Nach drei Tagen (genauer 70 Stunden) war die Zerstreuung unter der Glocke bis auf 495 für +, 510 für — Ladungen zurückgegangen (Stelle B der Kurve Fig. 1). Jetzt wurde die Luft herausgesaugt und durch aus dem Freien angesaugte (und wie immer durch ein Wattefilter und eine Trockenflasche gegangene) Frischluft ersetzt, mit der dann noch 6 Stunden lang nachgespült wurde. Die Zerstreuung ging dadurch bis auf 49 bezw. 46 herab. Von nun an liess man die kondensierte Bodenluft durch die Glocke hindurch verdampfen, indem man das Kondensationsgefäss langsam aus der Dewarflasche heraushob (Stelle C). Schon während der Verdampfung stieg die Zerstreuung so, dass bereits nach $2^1/_2$ Stunden wieder 577 für + und 645 für — erreicht war. Man könnte meinen, dass die vorher vorhanden gewesene, stark ionisierte Luft die Gefässwände und alle von ihnen umschlossenen Gegenstände derart aktiviert hätte, dass infolge hiervon

die Zerstreuungen so schnell wieder in die Höhe gingen. Um zu entscheiden, ob der Einfluss der sicher vorhandenen Aktivierungen sich so weit erstrecken könne, wurde nach dieser Reihe in ganz gleicher Weise die Luft ausgesaugt, durch Frischluft ersetzt und mit dieser ebensolange nachgespült. Die Zerstreuungswerte erhielten sich dauernd auf der Höhe von 30 bis 36, etwa dem Betrage der Spontanionisierung. Die induzierte Radioaktivität der Wände klingt also zu rasch ab, um länger nachzuwirken. Dieses schnelle Steigen der Ionisierung schon während des Verdampfens musste also dem Umstande zugeschrieben werden, dass in diesem Falle ein Teil der Emanation bereits mit den Verdampfungsprodukten entweicht, noch ehe der letzte Tropfen Flüssigkeit verschwand, eine Erscheinung, die übrigens auch bei den im vorhergehenden Paragraphen erwähnten Bodenluftreihen schon hervortrat. Dass dies nicht im Widerspruche mit dem früher (etwa S. 136) Gesagten steht, erkennt man sofort, wenn man bedenkt, dass im vorliegenden Falle die Emanation ausserordentlich angereichert und, da das Kühlmittel das ganze Kondensationsgefäss umgab, an allen Teilen der Gefässwände niedergeschlagen war. Es konnte also beim allmählichen Herausziehen des Kondensationsgefässes aus der flüssigen Luft auch schon von den Wänden Emanation wieder verdampfen. Da, wie oben (S. 136) bereits hervorgehoben, der Kondensationspunkt der Emanation bedeutend höher als der der flüssigen Luft liegt, so können wir uns dieselbe in der Flüssigkeit gelöst oder auch als festen Körper in dieser suspendiert denken. In beiden Fällen kann sich beim Eindampfen der flüssigen Luft der Körper, der bei seinem Verdampfen in der Glockenluft die Ionisation hervorruft, an den Wänden absetzen und von hier aus z. T. bereits in den dampfförmigen Zustand übergehen, noch ehe das Lösungs- oder Suspensionsmittel ganz verdampft ist.

Nachdem alle Luft verdampft war, erreichte die Zerstreuung nach 5 Stunden ihre Höchstwerte M': 872 für + und 867 für —, also nur wenig niedrigere, als die Maximalzerstreuungen der Vergleichsluftprobe ganz am Anfange waren.

In dem verflüssigten Zustande hat die Bodenluft also ihre ionisierende Wirkung in hohem Grade konserviert.

Jedenfalls war die ionisierende Wirkung der verflüssigten Luft in den drei Tagen seit ihrer Entnahme aus dem Boden bei weitem nicht so weit herabgegangen, als die der Vergleichsluftprobe. Verlängert man die dieser letzteren entsprechende Kurve (in Fig. 1 punktiert), so würde sie nur 457 für +, 467 für — gegeben haben zu einer Zeit, wo die in der verflüssigten Luft angereicherte Emanation tatsächlich 872 bezw. 867, also beinahe doppelt so viel, ergab.

Würde es gelingen, die ganze Menge Bodenluft dauernd in kondensiertem Zustande zu erhalten, so dass nichts von derselben wieder verdampft, so würde sich auch ihre Emanation vollkommen erhalten lassen.

Dass in diesem Resultate kein Widerspruch mit den Ergebnissen von P. Curie, die er in der oben angeführten Arbeit in der Physikal. Zeitschrift mitteilt, liegt, wird w. u. erläutert.

12. Bei diesen mit Bodenluft angestellten Versuchsreihen, bei denen die Leitfähigkeit unter der Glocke besonders hohe Werte annahm, zeigte sich auch eine Erscheinung vollkommen deutlich, welche sonst auch wohl angedeutet war, aber nicht so klar hervortrat. Wie schon in der früheren Arbeit über die Bodenluftemanation hervorgehoben worden war und sich auch aus den hier mitgeteilten Zahlen ergibt, stellt sich unter der Glocke durchgängig eine ausgesprochene Unipolarität der Leitfähigkeit in dem Sinne her, dass die — Ladungen schneller als die + Ladungen des Zerstreuungskörpers ausgeglichen werden; die den ersteren entsprechenden Zerstreuungswerte sind in Fig. 1 durch eine ausgezogene Linie dargestellt, die den + Ladungen entsprechende durch eine gestrichelte Kurve. Da die + Ionen träger sind und den durch die Ladung des Zerstreuungskörpers bedingten Feldkräften langsamer folgen, als die — Ionen, so ist aus diesem Verhalten zu schliessen, dass ihre Zahl in der Glockenluft grösser als die

der — Gasionen ist. Wenn nun Emanation in so reichlichem Masse, wie sie in einer grösseren Anzahl Litern Bodenluft enthalten ist, in der Glocke plötzlich zur Wirkung gelangt und Zerstreuungen von der oben angegebenen Höhe hervorruft, so tritt in den ersten Stunden bis nach dem Ueberschreiten des Maximums eine Umkehr der geschilderten normalen Unipolarität ein, dergestalt dass + Ladungen schneller als — Ladungen zerstreut werden. Die Kurve der Zerstreuungswerte für die + Ladungen überschiesst bei dem steilen Ansteigen im Anfange gewissermassen die — Kurve, erreicht ein höher gelegenes Maximum als diese, kehrt dann aber etwa zu derselben Zeit wie diese um und fällt schneller ab; es tritt ein Durchschneiden der beiden Kurven ein, wie es auch in Fig. 1 angedeutet ist; dann erst lagern die Zerstreuungswerte für + dauernd unter denen für — Ladungen. Diese Umkehr, die anfangs Beobachtungsfehlern zugeschrieben wurde, hat sich stets gezeigt; insofern bedürfen auch die in unserer früheren Arbeit mitgeteilten Kurven in der Nähe ihrer Maxima einer entsprechenden Korrektur.[1])

Teilt man die Vorstellung, die Rutherford aus seinen Untersuchungen über die Emanationen abgeleitet hat, so kann man sich diese auffallende Erscheinung etwa wie folgt erklären: Die Emanation ist zunächst elektrisch völlig neutral, besteht aber aus Molekülen oder Molekülaggregaten, die von den raschest bewegten Molekülen eines zunächst ebenfalls neutralen Gases getroffen, Elektronen, d. h. sehr kleine, mit grosser Geschwindigkeit sich bewegende, negativ geladene Teilchen, Korpuskeln, abstossen; ein träger, positiv erscheinender Komplex bleibt zurück; wir haben zunächst gleich viel — und + Bestandteile im Gasraume. Wirkt ein Spannungsgefälle, etwa das von dem geladenen Zerstreuungskörper ausgehende, so tritt eine

---

[1]) Bei der sehr schnellen zeitlichen Aenderung der Zerstreuung am Anfange der Beobachtungsreihen könnte die Reihenfolge, in der das Verschwinden von + und — Ladungen gemessen wird, von Einfluss sein; um von diesem Einflusse frei zu sein, wurde am Beginn der Bodenluftreihen vielfach mit dieser Reihenfolge gewechselt.

Wanderung der elektrisch nicht mehr neutralen Bestandteile ein; die rascher beweglichen Elektronen neutralisieren die Ladung des im Inneren des Gases isoliert aufgestellten Zerstreuungskörpers viel rascher, wenn diese + ist, als es die ungleich schwerer beweglichen Restkörper mit dem — geladenen Zerstreuungskörper zu tun vermögen, daher die viel höheren Zerstreuungswerte für + Ladung am Anfange. Die aus den Emanationskernen hervorschiessenden Elektronen, die wie eine Becquerelstrahlung auf das umgebende Gas wirken müssen, rufen aber zweitens in diesem auch positive und negative gleich stark geladene Gasionen hervor. Hier bewegen sich die — Ionen wiederum schneller als die + Ionen. Kommen sie in die Nähe des zur Erde abgeleiteten Schutzdrahtnetzes oder der metallenen, gleichfalls geerdeten Bodenplatte (vergl. S. 141), so müssen daher in der Zeiteinheit viel mehr — Ionen als + Ionen ihre Ladungen an diese abgeben. Daher werden auch aus dem Gasinneren durch Diffusion allmählich viel mehr — Ionen auswandern; so stellt sich in der Zeit von einigen Stunden ein neuer Gleichgewichtszustand her, bei dem ein erheblicher Ueberschuss an + Ionen in dem Gase vorhanden ist. Nun werden — Ladungen schneller als + Ladungen zerstreut, ein Zustand der dann dauernd bestehen bleibt, ganz wie es die Beobachtungen zeigen.

13. Gegen die Bodenluftdoppelreihe in 11 könnte noch das Bedenken erhoben werden, dass die beiden dabei benutzten Luftproben nicht zu gleicher Zeit dem Boden entnommen wurden, sondern die eine am Vormittage, die andere am Nachmittage, wenn auch am gleichen Tage. In der Tat hängt die Wirksamkeit der Bodenluft sehr vom Wetter, namentlich vom Barometerstande ab, wie der Vergleich zahlreicher an derselben Stelle, aber zu verschiedenen Zeiten entnommener und dann in gleicher Weise geprüfter Proben zeigt.

Es scheint, dass die Bodenluft bei sinkendem Luftdrucke, namentlich aber bei gewissen Niederschlägen besonders reich an Emanation würde. Man kann dies einmal damit erklären, dass wenn der auf den Bodenschichten lastende Druck abnimmt, die

in den Erdkapillaren eingepressten Luftmassen aus grösseren Tiefen heraufkommen und dass andererseits die Niederschläge, Regen und Schnee, nach den oben S. 134 erwähnten Beobachtungen eine radioaktive Substanz mitbringen, die in der Bodenluft sehr wohl eine Emanation wachrufen kann. Selbst am gleichen Tage entnommene Proben sind daher in Bezug auf ihre Wirksamkeit möglicher Weise nicht direkt mit einander vergleichbar und es war erwünscht, das oben mitgeteilte Ergebnis an zwei Proben zu prüfen, welche zur selben Zeit dem Erdboden entnommen waren. Dazu wurde eine möglichst günstige Wetterlage ausgesucht. Als nach klarem Wetter das Barometer von Mittag an während des ganzen Nachmittags und im Verlaufe der Nacht stark gefallen war, wurden am Morgen eines regnerischen Tages mit dem 120 Liter-Gasometer 100 Liter Bodenluft entnommen; während der Entnahme sank der Luftdruck noch um 1 mm, Regen und Schnee fielen fast ununterbrochen. Von der Füllung wurde die eine Hälfte direkt unter die Glocke (unter Vorschalten der oben S. 150 genannten Absorptionsmittel) geschickt, in der Frischluft seit 13 Tagen gestanden und die maximale Zerstreuung von 31 für +, 35 für — im Mittel angenommen hatte. Die andere Hälfte wurde unmittelbar darauf verflüssigt.

Die Luftprobe war so reich an Emanation, dass die 50, in die Glocke eingelassenen Liter die Leitfähigkeit schon nach 5 Stunden auf 1185 für + und 1164 für — brachten, Maximalwerte, die mit zu den höchsten zählen, die ich auf dem genannten Wege beobachten konnte. Nach 6 Stunden war schon ein deutlicher Rückgang und die Ausbildung der normalen Unipolarität zu konstatieren. Dann sank die Zerstreuung in regelmässiger Weise und hatte nach 48 Stunden die Werte 756 für +, 764 für — erreicht. Nun wurde ausgepumpt, Frischluft eingelassen, gespült und die Zerstreuung bestimmt; es ergab sich 36 bezw. 24, ein Zeichen, dass die Wirkung der ersten Hälfte der Luftprobe vollkommen entfernt war. Hierauf wurde die zweite, seither verflüssigt erhaltene Hälfte in die Glocke gelassen; sofort stieg die Zerstreuung stark an, hatte

schon nach 3½ Stunden die Schlusswerte des ersten Teiles der Reihe passiert und stieg nach ca. 6 Stunden bis zu Werten von 896 bezw. 892 an, welche um 212 bezw. 208 Volt höher liegen, als sie die erste Hälfte der Luftprobe zu derselben Zeit in der Glocke gezeigt haben würde. Also auch hier zeigte sich deutlich, dass die Emanation im flüssigen Zustand ihre Wirksamkeit nicht zerstreut, wie sie es tut, wenn sie einem Gase beigemischt wird.

Dass nicht die Höchstwerte des Anfangsstadiums der ersten Luftprobe erreicht werden, darf nicht verwundern. Denn tatsächlich ist die zweite Luftprobe nicht die ganze Zwischenzeit über im flüssigen Aggregatzustande. Einmal nimmt der Verflüssigungsprozess selbst mehrere Stunden, im vorliegenden Falle etwa 5 Stunden, in Anspruch; er kann nicht mehr beschleunigt werden, weil sonst die Absorptionsmittel, durch die die Luft vor ihrer Verflüssigung gesaugt wird, nicht genügend wirken würden. Ferner kann man den Kondensationsprozess nicht so genau dirigieren, dass sich die gesamte Flüssigkeitsmenge mehrere Tage lang in unveränderter Menge erhält. Würde man die Kühlluft fortwährend absaugen, so würde man Gefahr laufen, dass schliesslich auch das Gasometerwasser mit in das Kondensationsgefäss hineingezogen würde. Man muss es immer, namentlich während der Nacht zulassen, dass wieder ein Teil des Kondensates in das Gasometer zurückverdampft. So waren bei dem letzten Beispiele nach der einen Nacht 21 Liter, während der zweiten leider sogar 45 Liter wieder zurückverdampft; wenn dieselben am anderen Morgen auch sogleich wieder kondensiert wurden, und nach früher Gesagtem die Hauptwirkung im allerletzten Rest enthalten ist, so hatten sie doch zum Teil mehrere Stunden lang im vergasten Zustande gestanden.[1]) Da man die Abklingungskonstante für diesen Fall kennt (s. w. u.), so kann man wenigstens angenähert berechnen, wie viel die Emanation von ihrer Wirksam-

---

[1]) Eine automatisch wirkende Vorrichtung, die dieses verhindert, ist im Bau begriffen.

keit auf diese Weise verloren haben konnte. Addiert man die entsprechenden Werte zu den beobachteten, so gelangt man etwa zu denselben Zerstreuungswerten, welche die Vergleichsluftprobe am Anfange lieferte.

Die Tatsache, dass wir hier einen Zustand vor uns haben, bei dem eine radioaktivierende Wirkung gewissermassen latent bleibt und sich nicht mit der Zeit erschöpft, scheint mir nicht unwichtig für die Beantwortung der sehr schwierigen Frage zu sein, wie es möglich ist, dass gewisse radioaktive Ursachen ihre Wirksamkeit ungewöhnlich lange erhalten können. Es gibt eben molekulare Zustände, bei denen diese Körper nicht strahlen und folglich die ihnen innewohnende spezifische Energiequelle nicht erschöpfen. Erst wenn wir diese molekularen Verbände lösen, wird diese Energie in Form von Strahlung frei.

Zugleich wirft die Tatsache Licht auf das Wesen dessen, was man eine Emanation nennt. Im verflüssigten Zustande scheint sie nach aussen hin sich vollkommen neutral und indifferent zu verhalten; hier wirkt sie nicht und kann dadurch dauernd erhalten werden. Der gasförmige Zustand scheint die notwendige Bedingung dafür zu sein, sie in Wirksamkeit zu versetzen. Stellen wir uns die Emanation stofflich, d. h. als Molekül oder Molekülkomplex einer uns bekannten oder zur Zeit noch unbekannten Substanz vor, so können wir etwa daran denken, dass erst durch den Anprall der über die mittlere Geschwindigkeit bewegten Gasmoleküle jene Lockerung eintritt; die dabei frei werdende Strahlungsenergie erzeugt dann die positiven und negativen Bestandteile, welche das Gas nicht mehr elektrisch neutral, sondern in dem für seine Leitfähigkeit charakteristischen ionisierten Zustande erscheinen lässt.

Dass die Behauptung, die Emanation verliere bei der Temperatur der flüssigen Luft nichts von ihrer Wirksamkeit, nicht im Widerspruche mit den Ergebnissen der Curieschen Arbeit steht, erkennt man jetzt sofort, denn es handelt sich augenscheinlich um zwei ganz verschiedene Phänomene. Curie untersucht die Strahlung, welche durch die Wandungen von

Glaszylinderchen und die eines Aluminiumzylinders hindurch ein Gas elektrisch leitend macht, nachdem die Innenwandungen der Glaszylinder vorher durch die Nachbarschaft eines stark wirksamen aktiven Präparates induziert worden sind. Bei den hier beschriebenen Versuchen wird ein Bestandteil dem Gase einverleibt, welcher erst in diesem selbst zur Strahlungsquelle und damit zur ionenbildenden Ursache wird.

Wie weiter unten in § 16 näher erörtert werden wird, ist das durch unsere Kurven (vergl. auch die frühere Arbeit in der phys. Zeitschrift **4**, 162, 1902) dargestellte Abklingen der Zerstreuungswerte in der Glockenluft bedingt einerseits durch die mit der Zeitkonstante λ (bei Curie $1/\Theta$) in ihrer Wirksamkeit sich vermindernde Kraft der Emanation, die im Gase formal demselben Gesetze folgt, wie es Curie aufstellt, andererseits aber auch durch die Zahl der in der Stunde stattfindenden, durch die Konstante α bedingten Wiedervereinigungen von bereits gebildeten Gasionen. Das letztere, die beobachteten Zerstreuungswerte vermindernde Glied, fällt in dem verflüssigten Zustande ganz weg oder ist hier jedenfalls nur sehr klein.

14. Wie schon oben S. 134 erwähnt, haben Sella und Pocchettino sowie J. J. Thomson fast gleichzeitig darauf aufmerksam gemacht, dass Luft, die mit Wasser intensiv geschüttelt wird, in sehr hohem Grade die Eigenschaft einer Emanation annimmt. Es war im Anschluss an die Bodenluftexperimente von Interesse zu prüfen, ob sich diese Emanation bei der Verflüssigung ähnlich verhalten würde, wie die dem Erdboden entstammende. J. J. Thomson erwähnt zwar, dass die Wasser-Luftemanation nicht durch ein Metallspiralrohr, das in Kohlensäureschnee gekühlt war, hindurchgehe, teilt aber nichts Näheres darüber mit, ob bei Temperaturerhöhung die Emanation wieder erschienen ist.

Dr. P. Ewers und ich haben die genannten Versuche in unserem Laboratorium aufgenommen, wobei wir uns sehr grosser Gefässe bedienen, um von dem Einflusse der Gefässwände nach Möglichkeit frei zu werden. Über unsere diesbezüglichen Ergebnisse werden wir gemeinsam a. a. O. eingehender berichten;

hier sei nur folgendes kurz erwähnt: Aus einem 600 Liter fassenden Kessel saugt ein kräftiges durch die Wasserleitung gespeistes Wassertrommelgebläse die Luft an und reisst sie durch ein $2^1/_2$ m hohes, 12 cm weites Rohr, in dem das verspritzende Wasser innig mit der Luft gemischt wird; unten trennen sich beide; das Wasser wird durch einen Heber kontinuierlich abgehoben und fliesst fort, die Luft tritt in den Kessel zurück, um bald aufs neue ihren Kreislauf zu beginnen.

Diese Luftzirkulation wird durch eine Körtingsche Wasserstrahlpumpe unterhalten, die bei 3 Atmosphären Wasserdruck und $8^3/_4$ Liter Wasserkonsum pro Minute $10^1/_2$ Liter Luft in der Minute stundenlang ununterbrochen fördert.

Zunächst musste durch längere Vorversuchsreihen festgestellt werden, ob nicht schon bei ruhendem Gebläse in der eingeschlossenen Luft durch in dem Material vorhandene, schwach aktivierende Substanzen eine über das normale Mass gesteigerte Ionisation wachgerufen würde. Dazu wurden von Zeit zu Zeit abgemessene Luftproben aus dem Kessel mittels eines Glockengasometers in die auch sonst benutzte Glasglocke eingesaugt und der Gang der Zerstreuung verfolgt; an Stelle der abgesaugten Luftmenge wurde Luft aus dem Freien in den Kessel gesaugt unter Passieren eines Wattestaubfilters. Die Zerstreuungen, die beim Lüften der Glocke bis auf ca. 14 herunter gingen, stiegen beim Einbringen von 30 Liter der nicht geschüttelten Luft meist nicht über 34. Dabei hatte die Luft auf dem Wege vom Kessel zur Glocke zu passieren: ein langes Bleirohr, ein Glaswollfilter, zwei Schwefelsäuretrockenflaschen, eine Spirale aus dünnwandigem Messingrohr und das Spannungsrohr, welches alle etwa in ihr vorhandenen Ionen in diesen und den folgenden Fällen aus ihr herausnahm. Wurde das Gebläse in Tätigkeit versetzt und die Luft $7^1/_2$ Stunden lang in Zirkulation erhalten, so stieg schon während des Einsaugens anderer 30 Liter die Zerstreuung in der Glocke stark an und hatte nach 4 Stunden die Werte 162 und 166 erreicht, um dann in der gewöhnlichen Weise abzuklingen.

9 Stunden nach dem Einbringen der Luft war die Zerstreuung 158 und 160, also um 144 bezw. 146 Volt höher als zu Anfang.

Nach 90 Stunden wurde diese Reihe abgebrochen und die Luft aus der Glocke ausgesaugt und dafür frische, direkt dem Freien entnommene, genau in gleicher Weise wie früher eingesaugt. Dass dabei die Zerstreuung schliesslich nur bis auf 27 bezw. 24 (und nicht auf 14 wie vorher, sank) lag daran, dass unmittelbar vorher noch sehr hohe Zerstreuung geherrscht hatte (90 bezw. 99) und die Gefässwände der Glocke daher noch schwach aktiv waren. Nun wurden abermals 30 Liter der wiederum $7^1/_2$ Stunden durch das Gebläse umgetriebenen Luft eingesaugt, dieses Mal aber war das Spiralrohr in ein mit flüssiger Luft gefülltes zylindrisches Dewargefäss eingetaucht. Unmittelbar nachdem die 30 Liter wieder eingesaugt waren, wurde die Schlauchverbindung hinter (von der Glocke aus gerechnet) dem Spiralrohr, das dauernd in der flüssigen Luft belassen wurde, durch einen Quetschhahn abgeschlossen so dass das Innere des Rohres mit dem Glockeninnern stets in Verbindung blieb, nach aussen hin aber abgeschlossen war. Nichtsdestoweniger machte sich die Emanation auch in der Folge nicht geltend. Nach drei Stunden, lange nachdem die 30 Liter sich unter der Glocke befanden, war die Zerstreuung noch immer 24 und 26: die Emanation wurde in dem stark gekühlten Rohre festgehalten, sie war hier kondensiert. Nach vier Stunden wurde 25 für +, 24 für — gemessen und so konnte das Einsetzen der aktivierenden Wirkung in der unter der Glocke befindlichen Luft so lange hintangehalten werden, als man die Spirale in der Kühlflüssigkeit beliess.

Nach 5 Stunden wurde die flüssige Luft entfernt: sofort stiegen die Zerstreuungen auf 114 bezw. 138 und hatten wiederum wie oben nach 4 Stunden die Maximalwerte von 160 und 170 erreicht. Die Emanation war also in der gekühlten Spirale angereichert und aufgespeichert worden und wurde beim Erhöhen der Temperatur sofort wieder in Freiheit

gesetzt. Dies beweist zugleich, dass die niedere Temperatur die Emanation nicht zerstört, sondern vielmehr wirklich nur zur Kondensation bringt, und dass die Verflüchtigungstemperatur auch der bei dem Schütteln von Luft mit Leitungswasser entstehenden Emanation höher als die Siedetemperatur der flüssigen Luft (— 191°) liegen muss, ähnlich wie es Rutherford-Soddy und P. Curie für die Emanationen der Thor- und Radiumverbindungen nachgewiesen haben. Da aber nach J. J. Thomson die Wasser-Luft-Emanation auch schon bei der Temperatur der Kohlensäure-Äther-Mischung (— 78°) völlig zurückgehalten wird, während nach der ausdrücklichen Versicherung der erstgenannten beiden Autoren die Thor- und Radium-Emanationen ein mit diesem Kältemittel gekühltes Kupferspiralrohr völlig unverändert passieren, so sind schon hierdurch wesentliche Unterschiede in der Natur dieser Emanationen angedeutet.

Die Anfangswerte der Zerstreuungen waren bei dieser Versuchsreihe, wie oben erwähnt, etwas höher als bei der vorigen, nämlich 24 und 26, d. h. die nach 9 Stunden erreichten Werte waren um 136 bezw. 144 Volt höher als die ohne die Emanation auftretenden. Dies sind fast die nämlichen Beträge, die bei der vorigen Reihe auftraten (vergl. S. 162), was noch deutlicher wird, wenn man gleich weit von den Anfangspunkten entfernt liegende spätere Zeitpunkte vergleicht; die Maximalwerte lassen sich nicht so genau wie die diesen letzteren entsprechenden Werte bestimmen.

15. Nachdem im vorstehenden gezeigt worden ist, wie man die verschiedenen in der Atmosphäre vorkommenden Emanationen anreichern und dadurch zu deutlicher ausgesprochener Wirkung bringen kann, erübrigt es noch, die Art kurz zu skizzieren, wie man das bei den einzelnen Beobachtungsreihen erhaltene Material dazu benutzen kann, um die Zahlenwerte der für die verschiedenen Fälle charakteristischen Konstanten daraus abzuleiten. Zunächst eine Bemerkung darüber, wie die Beobachtungen dargestellt wurden.

Wenn wie bei den letztbeschriebenen Versuchen die Verdampfungsprodukte der verflüssigten Luft von aussen her an-

gesaugt werden, braucht man die Glocke nicht abzuheben und kann mit dem Einsetzen der neuen Versuchsreihe so lange warten, bis das Maximum der spontanen Ionisierung der zum Spülen verwendeten Frischluft erreicht ist. Alsdann addieren sich die der eindringenden Emanation entsprechenden Werte direkt zu den ohne diese schliesslich zustande gekommenen Beträgen, etwa so, wie Fig. 2 zeigt, bei der angenommen ist, dass zur Zeit $t = 0$ die von allen freien Ionen unmittelbar vor dem Eintritt in den Versuchsraum befreite Emanation eingelassen wurde. Durch die Zerstreuungsmessungen wird

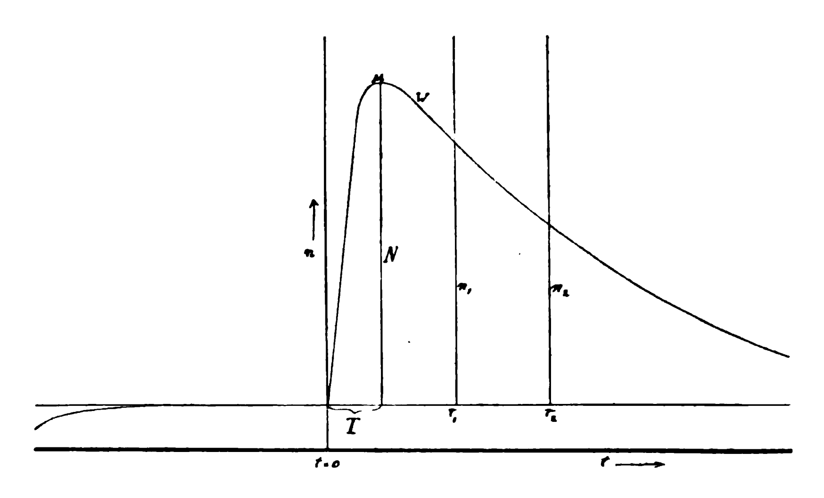


Fig. 2.

ein der augenblicklich vorhandenen freien Ionenzahl proportionaler Wert erhalten, wenn man mit so hohen Potentialen arbeitet, dass man annehmen kann, den Sättigungsstrom nahezu erreicht zu haben. Die zu den Zeiten als Abszissen aufgetragenen Zerstreuungswerte geben dann auch ein Bild von dem zeitlichen Verlaufe im Anwachsen und Abnehmen der Ionenzahl im Gase. Durch die die einzelnen Beobachtungswerte darstellenden Punkte wurden Kurven gelegt, welche für jedes Vorzeichen etwa die in Fig. 2 dargestellte Form besitzen. Dieselben steigen zunächst sehr steil, fast geradlinig

an, erreichen ein Maximum *M* und sinken allmählich wieder herab zu einem Kurvenstück, welches asymptotisch zu der als Nulllinie gewählten Parallelen zur Abszissenaxe zurückführt. Auf dem absteigenden Aste enthalten alle Kurven dicht hinter *M* einen Wendepunkt *W*. Aus den Kurven wurden die ausgeglichenen Werte für die Konstantenbestimmung entnommen.

16. Man kann die den zeitlichen Verlauf der ganzen Erscheinung darstellende Gleichung aufstellen, wenn man von dem Einflusse der Wände und damit dem der Diffusion der Ionen gegen diese absieht. Dass dies nicht ganz streng richtig ist, lehrt die in § 12 erwähnte Unipolarität der elektrischen Leitfähigkeit, welche die eingeschlossene Luft schon kurze Zeit nach dem Verdampfen der flüssigen Luft annimmt und die sich auch nach längerer Zeit nicht vollkommen ausgleicht. Der Sinn dieser Unipolarität ist, wie oben erwähnt, nach Ablauf des Anfangsstadiums der, dass — Ladungen schneller zerstreut werden als + Ladungen, dass also sehr bald ein Überschuss von + Ionen unter der Glocke vorhanden ist. Da die + Ionen unter der Wirkung eines bestimmten Potentialgefälles etwa im Verhältnisse von 4:5 langsamer wandern als die — Ionen, so muss das Überwiegen der Anzahl an + über die — Gasionen im Verhältnisse von 5:4 grösser als der Zahlenwert des Zerstreuungsverhältnisses selbst sein. Bildet man das entsprechende Verhältnis, so sieht man, dass die Unipolarität immerhin eine geringe ist, so dass man in erster Annäherung annehmen kann, dass an jeder Stelle des Gasraumes gleichviel positive und negative Ionen vorhanden sind. Dadurch, dass an den Wänden fortwährend Ionen ihre Ladungen abgeben, wird daselbst die Ionenkonzentration geringer und es tritt ein Nachwandern infolge des Konzentrationsgefälles ein, auf welches die Gesetze der freien Diffusion anwendbar sind. Sind die linearen Abmessungen der Versuchsräume aber, wie hier, gross, so treten diese Wandwirkungen mehr und mehr gegen die Vorgänge, die sich im Innern des Gasraumes abspielen, zurück. Wir können uns dann über diese letzteren, wie folgt, Rechenschaft geben:

Es sei n die Anzahl von Ionen der einen Art, welche zur Zeit t pro cbcm in der ionisierten Luft vorhanden sind. Diese Anzahl vermehrt sich fortwährend durch die Wirksamkeit der Emanation, die sich von dem Momente $t = 0$ an, in welchem sie in die Glocke eintritt, sehr rasch in dem ganzen Raume gleichmässig verbreitet haben wird. Von allen induzierenden Emanationen weiss man, dass ihre Wirkungen allmählich abklingen. Rutherford, der sich seither am meisten mit diesen Emanationen beschäftigt hat, stellte ein Abklingungsgesetz von der Form $e^{-\lambda t}$ als mit den Tatsachen am besten übereinstimmend fest, wo λ die für die einzelnen Emanationen verschiedener Herkunft charakteristische Abklingungskonstante ist. Ganz das gleiche Gesetz verifiziert P. Curie in der oben zitierten Arbeit durch seine Messungen; bei ihm ist $\lambda = \frac{1}{\Theta}$, wo Θ, die sog. Zeitkonstante des Vorganges in der Tat von der Dimension einer Zeit ist. Werden also in der ersten Sekunde bei frisch eingetretener Luftemanation Q Ionen in der Volumeneinheit erzeugt. so ist diese pro Zeit- und Raumeinheit produzierte Ionenmenge nach t Sekunden schon auf den Betrag $Q \cdot e^{-\lambda t}$ herabgesunken und nähert sich asymptotisch dem Nullwerte.

Ausser dieser ionenerzeugenden Ursache ist aber fortwährend eine andere tätig, welche auf eine fortwährende Verminderung der freien Ionen in dem abgeschlossenen Raume abzielt. Es ist dies die bei den Zusammenstössen eintretende Neutralisation durch Wiedervereinigung der durch die Emanation getrennten + und — Ladungen. J. J. Thomson war es, der zuerst die aus dieser Ursache in der Volumeneinheit pro Sekunde verschwindende Ionenzahl proportional dem Produkte der Ionenkonzentration setzte; im vorliegenden Falle, wo gleiche Anzahl + und — Ionen angenommen wird, ist diese Zahl also proportional dem Quadrate der zur Zeit t pro Volumeneinheit überhaupt vorhandenen Ionenzahl n. Dieser Ansatz hat sich seither in allen Fällen, in denen er quantitativer Prüfung zugänglich wurde, durchaus bewährt. Demnach ist die Änderung in der Ionenführung im cbcm pro Sekunde dn/dt zur Zeit t:

$$\frac{dn}{dt} = Q \cdot e^{-\lambda t} - a \cdot n^2, \tag{1}$$

wo a der Koeffizient der Wiedervereinigung der vorhandenen Ionen ist.

Durch diese Gleichung ist die Ionenzahl n als Funktion der Zeit t vollkommen bestimmt, wenn die Werte der drei Konstanten Q, λ und a gegeben sind. Ausserdem ist ohne weiteres aus dem den Vorgang kennzeichnenden Kurvenverlaufe zu ersehen, dass für $t = 0$ auch $n = 0$ sein muss und dass n abermals den Nullwert für $t = \infty$ erreicht.

Da man den Zeitpunkt T, in welchem das Maximum der Leitfähigkeit eingetreten ist, aus der Kurve mit ziemlicher Sicherheit entnehmen kann und ebenso den ihr proportionalen Höchstwert der gleichzeitig im cbcm vorhandenen Ionenzahl N, so gewinnt man das Mittel, eine der drei Konstanten durch die beiden anderen auszudrücken. Am meisten empfiehlt sich die Elimination der Konstanten Q, enthält sie doch in der Tat ein willkürliches Element. Denn der Zahlenwert von Q hängt davon ab, wie viel wir von der Emanation in die Glocke bringen. Da für das Maximum $dn/dt = 0$ ist, so folgt

$$Q = a \frac{N^2}{e^{-\lambda T}}. \tag{2}$$

Zählt man die Abszissen von der Maximumstelle aus und setzt $\tau = t - T$, so nimmt die Gleichung 1) die Gestalt an:

$$\frac{dn}{d\tau} = a\,(N^2 \cdot e^{-\lambda\tau} - n^2). \tag{3}$$

Durch Integration der einzelnen Glieder erhält man für zwei beliebige Wertpaare der abhängigen und unabhängigen Variablen n_1, τ_1 und n_2, τ_2:

$$n_1 - n_2 = -\frac{a\,N^2}{\lambda}(e^{-\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_2}) - a\int_{\tau_2}^{\tau_1} n^2 \cdot d\tau. \tag{4}$$

Zeichnet man also zu der gegebenen $n(t)$ Kurve eine zweite: $n^2(t)$, bei der alle Ordinaten quadriert sind, so kann man mittels Integraphen oder Planimeter für den zwischen den

Ordinaten n_1 und n_2 liegenden Flächenstreifen den numerischen Wert des Integrales rechts jederzeit ermitteln,[1]) und da man ebenso die Differenz $n_1 - n_2$ aus der Kurve selbst erhält, die Werte der Konstanten a und λ durch fortgesetzte Annäherungen berechnen, wenn man ein weiteres Wertepaar hinzuzieht.

Für die einzelne Emanation ist der Wert von λ charakteristisch, während die Grösse a, wie es scheint, eine Konstante für alle Beobachtungsreihen ist.[2]) Hat man dieses a also einmal hinreichend genau bestimmt, so kann man aus den mittels der Kurve leicht mit genügender Sicherheit zu bestimmenden Steigungsverhältnissen $dn/d\tau = \Phi$ die Abklingungskonstanten λ aus der Gleichung

$$\frac{1}{N^2}\left(\frac{\Phi}{a} + n^2\right) = \Gamma = e^{-\lambda\tau} \qquad 5)$$

zu

$$-\lambda = \frac{1}{\tau}\log\operatorname{nat}\Gamma \qquad 6)$$

für eine grössere Anzahl von Kurvenpunkten (τ, n) bestimmen. Dieses λ ist dann für eine jede Reihe eine Konstante.

Aus λ und a erhält man schliesslich mittels der Gleichung 2) auch den Wert von Q.

Man kann die oben S. 167 aufgestellte Differentialgleichung 1) aber auch vollkommen integrieren, da sie sich auf eine Klasse von Riccatischen Gleichungen zurückführen lässt, welche E. von Lommel bereits vollkommen durch Besselsche Funktionen gelöst hat, worauf mich aufmerksam zu machen mein Kollege Herr Professor Dr. H. von Seeliger die Güte hatte.

Führt man an Stelle der Variablen t und n die neuen Variablen x und y durch die Substitution

---

[1]) Wählt man den Flächenstreifen nicht zu breit, so ist die obere Begrenzung des in Betracht kommenden Stückes der n^2-Kurve so nahe geradlinig, dass man den Streifen als Trapez behandeln kann.

[2]) Bemerkt sei hier, dass aus unseren Messungen ein anderer, in der Grössenordnung wesentlich höherer Wert, als der von Mc. Clung bei röntgenisierten Gasen gefundene, folgt.

$$\left.\begin{aligned} e^{-\lambda \cdot t} &= \beta x \\ \frac{1}{n} &= \gamma y \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

ein, so nimmt die Gleichung 1) die Gestalt an:

$$\frac{dy}{dx} = Q \frac{\beta \gamma}{\lambda} \cdot y^2 - \frac{a}{\gamma \lambda} \cdot \frac{1}{x}. \qquad 8)$$

Setzt man

$$y = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx}, \qquad 9)$$

so geht 8) in die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{z}{x} = 0 \qquad 10)$$

über, wenn man

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\frac{\lambda^2}{a Q} \\ \gamma &= \frac{a}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

macht. Das vollständige Integral von 10) ist nach Lommel:[1])

$$z = \sqrt{x}\,[A\, J^1 (2 \sqrt{x}) + B\, Y^1 (2 \sqrt{x})], \qquad 12)$$

wo J^1 und Y^1 die Besselsche Funktion erster Ordnung erster und zweiter Art ist, und A und B Integrationskonstanten sind. Bildet man nach 9) y, so erhält man

$$y = \frac{1}{2x} + \frac{\frac{d J^1 (2\sqrt{x})}{dx} + C \frac{d Y^1 (2 \sqrt{x})}{dx}}{J^1 (2 \sqrt{x}) + C\, Y^1 (2 \sqrt{x})}, \qquad 13)$$

wenn man $C = B/A$ setzt; C ist die einzige willkürliche Integrationskonstante des Problems, die durch die Anfangs-Bedingung

$$t = 0 \qquad n = 0$$

$$x = \frac{1}{\beta} \qquad y = \infty \qquad \text{zu}$$

---

[1]) E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen, Leipzig 1868, S. 114.

$$C = -\frac{J^1\left(2\sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)}{Y^1\left(2\sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)} \tag{14}$$

bestimmt ist.

Es ist bekanntlich

$$\frac{d\,J^1(2\sqrt{x})}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,J^0(2\sqrt{x}) - \frac{1}{2\,x}\,J^1(2\sqrt{x}).$$

Für die Besselschen Funktionen J^0 und J^1 hat Lommel Tafeln berechnet; wie aus 13) und 14) ersichtlich ist, muss man aber auch die Werte von Y kennen, und wenn auch für diese Funktionen genügend rasch konvergente Reihen existieren, so gestaltet sich doch die Diskussion auf diesem Wege etwas verwickelt.

Ich habe es daher vorgezogen die Konstanten auf dem Wege der oben bezeichneten Näherungsverfahren zu ermitteln. Eine Mitteilung des umfangreichen Materiales würde an dieser Stelle zu weit führen. Beispiele derartiger Konstantenberechnung werde ich bei Gelegenheit der Diskussion ähnlicher Abklingungskurven demnächst in Gemeinschaft mit Herrn Dr. P. Ewers, der mich auch schon bei diesen Untersuchungen aufs wirksamste unterstützt hat, an anderer Stelle mitteilen. Hier sollte zunächst nur das Verfahren mitgeteilt werden, durch welches mittels flüssiger Luft die Emanationen angereichert und in ihrer Wirksamkeit erhalten werden können. —

Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern.

Von Dr. **Joseph Reindl.**

(*Eingelaufen 7. März.*)

(Mit einer Karte.)

Dass die Erdkruste im Gebiet des Königreiches Bayern heutzutage noch nicht völlig zur Ruhe gekommen ist, bewies das Erdbeben an der bayerisch-böhmischen Grenze vom 24. November 1902. Schon die ersten Zeitungsnachrichten hierüber lauteten so bestimmt, dass eine Täuschung als ganz ausgeschlossen erachtet werden durfte. Die „Münchener Neuesten Nachrichten“ schrieben nämlich am 30. November (Blatt Nr. 557):

> „In der mittleren Oberpfalz wurden am Mittwoch (26. November) zwischen 1 und 2 Uhr mehrere Erdstösse verspürt. In Waldthurn waren sie so heftig, dass sich Tische, Stühle und Bänke von ihren Plätzen bewegten; in Eslarn klirrten die Fenster und in Neudorf waren die Stösse andauernd so stark, dass die Bevölkerung voll Schrecken ins Freie flüchtete.“

Dieselbe Zeitung schrieb ferner am 3. Dezember (Blatt Nr. 561):

> „Das am 26. November in der Oberpfalz verspürte Erdbeben wurde auch in einem grossen Teil Westböhmens wahrgenommen. Am stärksten wurde dasselbe in Tachau und Rosshaupt empfunden, wo die Bevölkerung erschreckt ins Freie flüchtete.“

Der Amberger Volksbote berichtete (27. November):

„Der Erdstoss, von welchem wir gestern berichteten, wurde auch in Waldthurn verspürt. Derselbe wurde dadurch wahrgenommen, dass sich Stühle, Tische und Bänke von ihren Plätzen bewegten und ein Geräusch verursachten, als ob sich viele schwere Lastfuhrwerke auf der Strasse bewegten."

Nachdem der Verfasser von diesen Zeitungsnotizen Herrn Professor Dr. Siegm. Günther verständigt hatte, erhielt er von ihm den ehrenvollen Auftrag, die verspürte Erschütterung weiter zu verfolgen. Soweit nun diese auf bayerischem Gebiete bemerkbar war, suchte er deren Erscheinungen durch eigene Erkundigungen teils auf telegraphischem, teils auf brieflichem Wege festzustellem. Da sich aber das seismische Gebiet auch weit über die Grenzen Bayerns erstreckte und einen grossen Teil des westlichen Böhmens einnahm, war der Verfasser veranlasst, sich mit Herrn Stadtgeologen Knett aus Karlsbad, der schon seit Jahren den böhmischen Erdbeben grosse Aufmerksamkeit zuwendet, darüber ins Benehmen zu setzen, der ihm auch in der gefälligsten Weise entgegenkam und seine diesbezüglichen böhmischen Nachrichten zukommen liess. Ihm, wie Herrn Professor Dr. Siegm. Günther, verdankt der Verfasser nun das Zustandekommen dieser Arbeit, wofür er gleich hier an dieser Stelle beiden Herren verbindlichen Dank ausspricht. Zugleich danke ich auch all denen, die mir diesbezügliche Meldungen und Nachrichten schriftlich oder telegraphisch zukommen liessen, denn durch diese wertvollen Angaben wurde ich in die Lage versetzt, über das angeführte Erdbeben näheren Aufschluss zu geben.

Wir teilen nun zunächst die Resultate der eigenen Erkundigungen ohne weitere Kritik mit.

Vor allem fragten wir auf telegraphischem Wege bei den Postanstalten Hof, Bamberg, Bayreuth, Nürnberg, Regensburg, Passau, Linz, Prag und Eger an, ob das Erdbeben am erwähnten Tage verspürt worden sei. Da die

Antworten von all diesen Stationen im negativen Sinne ausfielen, so war gleich die Tatsache gegeben, dass die Flächenausdehnung des Bebens eine kleinere gewesen sein muss. Weitere Anfragen in Amberg, Pfreimd, Weiden, Plössberg ergaben, dass die Erschütterung auch dort nicht gespürt wurde, ebenso meldeten Neustadt a/Waldnaab und Cham negativ. Dagegen waren die übrigen Mitteilungen fast sämtlich bejahender Natur. In Schönsee verspürte man einige Stösse, jedoch schwach, in Tiefenbach einen Stoss, der ebenfalls nicht heftig war. In Treffelstein war die Bewegung kaum merklich, ebenso in Waldmünchen. Doch wurde die Erschütterung in Eschelkam, obwohl weiter südlich gelegen, deutlich bemerkt. Floss und Winklarn verspürten nur leichte Stösse, desgleichen Mähring, Tirschenreut und Bärnau. Alle diese Orte liegen demnach im äussersten und schwächsten Erschütterungsgebiete, was auch auf der Karte ersichtlich ist.

Heftiger trat die Bewegung schon in anderen Punkten auf: Herr Lehrer Gradl aus Waldthurn hatte die Güte, über seine Wahrnehmungen und Erkundigungen darüber folgendes zu schreiben:

„Es war am Mittwoch den 26. November um $^1/_2$ 2 Uhr während des nachmittägigen Schulunterrichts. Ich war mündlich beschäftigt in Erteilung des Sprachunterrichtes und stand vor meinen Schülern in der Nähe der Türe. Jedes besondere Geräusch, wie es z. B. beim Schreibunterrichte für 92 Schüler der Oberabteilung, oder bei Hantierung von Schiefertafeln als selbstverständlich entsteht, bleibt für jenen Zeitpunkt ausgeschlossen. Unsere beiden Schulzimmer befinden sich nicht Parterre, sondern im 1. Stock. Mein Schulzimmer liegt südwestlich, jenes des Kollegen nordöstlich. Während ich mit meinen Kindern auf einmal auf die fragliche Erschütterung aufmerksam wurde, merkte mein Kollege im anstossenden Zimmer nichts. Es mag dies liegen in der Art der Beschäftigung.

Plötzlich hatte ich den Eindruck, als würde mich Etwas

am ganzen Körper äusserst zart befühlen; ich hörte ein Rollen, ähnlich der Stärke eines in der Ferne rollenden Donners, dem Gehöre nach jedoch auf unser Haus lokalisiert. Meine Schüler merkten ein Zittern der Bänke und der Türe und riefen auch, dass jemand „draussen“ (vor der Türe) sei. Bis ich nachsah, war alles beendet. Zurücktretend sprach ich, das war nur der Wind, dachte mir aber dabei, weil an diesem Tage Windstille war, es könnte auch ein auf der 50 Schritte entfernten Strasse rasch vorüberfahrendes Fuhrwerk gewesen sein. An eine Erschütterung dachte ich nicht; denn die kleine Störung dauerte nur 8—10 Sekunden.

Die Witwe Arnold von hier erzählte mir, dass sie allein in ihrer Wohnung zu ebener Erde war und auf dem Kanapee sass. Auf einmal klirrten die Fenster, wie manchmal bei schweren Donnerschlägen, die Türe zitterte, in der anstossenden Küche klapperten die Hafendeckel auf dem Herde und sie hörte einen „Rumpler“, als wenn jemand mit einem Prügel aussen an der Stubentüre herunterführe. Im Glauben, es gäbe etwas, ging sie zum nebenanwohnenden Logieherrn, einem Schneider, der eben mit der Maschine nähte und fragte, ob er diesen „Rumpler“ auch gehört habe. Dieser hat aber nichts wahrgenommen infolge seiner Beschäftigung.

Im nächsten Hause, beim Tafernwirt Johann Müllhofer, klirrten die Fenster und das Geschirr im Schüsselrahmen; auch das Rollen wurde wahrgenommen. – Schneider Kleber war der Meinung, ein Wagen mit einer leeren Truhe komme im raschesten Tempo in der Hauergasse herauf und nehme die Richtung dem Schulhause zu (Richtung Westen—Osten). Derselbe lief ins Freie, merkte aber nichts mehr.

Wirt Bäumler war mit dem Büttner Sperl im Hofe beschäftigt mit reinigen von Fassgeschirr. Auf einmal hörten sie ein Dröhnen des Bodens, das sich dem Hausgiebel mitteilte und dort länger währte. — Schneider Führnrohr war im Walde. Dieser nahm ein schussähnliches Geräusch wahr. Zwei in der Flucht begriffene Rehe blieben bei der Erschütterung stehen. — Bei der Familie Schack hatten Kinder beim Spiel

ein Glöckchen an den Türdrücker gebunden; dieses fing zu läuten an.

In Neuenhammer, 5 km von hier gegen Böhmen, glaubten die Glasschleifer, eine Mauer am Schleifwerke sei eingefallen und liefen alle ins Freie.

In Neukirchen St. Christof, 2 Stunden von hier, hart an der böhmischen Grenze, wohin ich tags darauf kam, wurde dieser Erdstoss ebenfalls verspürt. Fuhrleute, welche aus dieser Gegend Langholz zum Sägewerk auf Station Waldthurn bringen, erzählten, dass der Erdboden zitterte, sie selbst geschüttelt wurden und dass sie ein donnerartiges Rollen hörten.

In Neulosimthal (böhmisch) an der bayerisch-böhmischen Grenze haben im Spital ganz besonders die Fenster geklirrt.

Auf der Post dahier erfuhr ich soeben die genaue Zeitbestimmung des Erdstosses: „1 Uhr 20 Minuten.“

Herr Lehrer Mahl aus Weiden schrieb: „In Neuthurn wurde das gemeldete Erdbeben so stark verspürt, dass Frauen und Kinder vor Schreck ins Freie flüchteten.“

In Reichenau, Post Waidhaus, wurde dieses Beben (26. November) gleichfalls verspürt. Herr Königer vernahm um 1 Uhr 15 Minuten nachmittags ein starkes Getöse mit dumpfem Rollen. Dabei beobachtete er eine wellenförmige Bewegung von Ost nach West, bei der die Häuser stark zitterten. Die Teller in den Geschirrkästen und die Fensterscheiben klirrten und die Blumenstöcke in den Zimmern wurden wie vom Winde bewegt. Herr Königer war Augenzeuge, wie ein neugebautes Schulhaus im nahen böhmischen Orte Neuhäusl Sprünge vom Boden bis zum Dache von ca. 5 mm bis 1 cm Breite bekam. Die Erschütterung dauerte 5—8 Sekunden. (Gütige Mitteilung der Meteorologischen Zentralstation München.)

Aus Eslarn erhielten wir von Herrn Lehrer Schmidt nachstehenden Aufschluss:

„Fragliches Erdbeben wurde in Eslarn am Mittwoch den 26. November nachmittags 1 Uhr 25 Minuten verspürt und währte 3 Sekunden. Dasselbe war von einem donnerähnlichen

Getöse begleitet. Fenster erzitterten; Gegenstände auf Tischen fingen zu wackeln an."

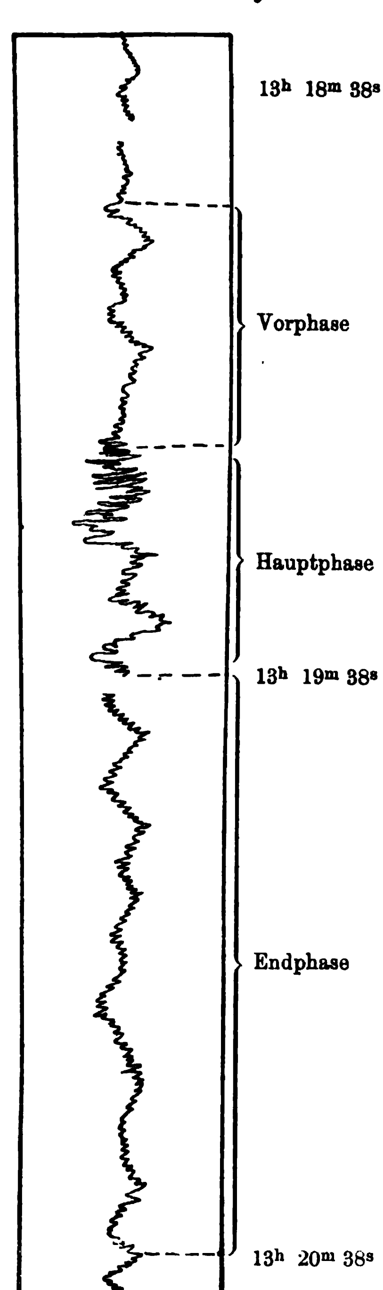
Auch die Orte: Vohenstrauss, Waidhaus, Tännesberg, Winklarn, Rötz, Langau und Weiding meldeten positiv, nachträglich auch Tirschenreuth und Waldsassen.

Die Ausdehnung des Erschütterungsgebietes in Böhmen stellte Herr Stadtgeologe Knett aus Karlsbad fest. Er war uns auch behilflich in der Anfertigung der Karte und zeichnete daselbst diejenigen böhmischen Ortschaften ein, welche von der Erschütterung betroffen wurden. Auch hatte er die Güte, uns folgendes mitzuteilen: „Tschernoschin, Michaelsberg, Dreihacken meldeten negativ, doch ist darauf nicht viel zu geben; es hängt dies ja von der Sorgfältigkeit der Umfrage des betreffenden Ortsbeobachters wesentlich ab. Weseritz und Marienbad meldeten bestimmt positiv, desgleichen Zedlisch, Haid, Neustadtl, Eisendorf und Kladrau."

Herr Geheimrat Credner aus Leipzig endlich, der das Erdbeben vom 26. November gleichfalls verfolgte, teilte Herrn Knett seine Resultate mit, wonach an folgenden Punkten die Dislokation verspürt wurde:

„Waldsassen, Mähring, Tirschenreuth, Flossenbürg, Floss, Neudorf (böhm. Grenze), Neukirchen, Georgenberg, Lesslohe, Neuenhammer, Waldthurn, Waidhaus, Frentsch, Burkhardsrieth, Eslarn, Oedmaiersrieth, Tännesberger Forst, Pullenried, Langau, Schönsee, Stadlern, Schwarzach, Waldmünchen."

Die geodätischen Institute München und Berlin konnten am genannten Tage an ihren Registrierbögen die eben erwähnte Erscheinung nicht wahrnehmen. (Gütige Mitteilung von Herrn Dr. Messerschmidt und Herrn Professor Dr. Hecker.) Dagegen hatte das Wiechertsche Seismometer in Leipzig zu der genannten Zeit das Seismogramm dieses Bebens geliefert. Dieses Seismogramm lässt in seiner 1250 fachen Vergrösserung der Bodenbewegungen (Fig. 1) 3 Abschnitte: Vorphase, Hauptphase und Endphase unterscheiden, von denen die beiden ersten unmerklich ineinander übergehen, während



Figur 1.

Das von dem Wiechertschen Pendelseismometer zu Leipzig registrierte Seismogramm des Böhmerwald-Bebens v. 26. November 1902 von $13^h\ 18^m\ 46^s$ bis $13^h\ 20^m\ 38^s$ in 1250 facher Vergrösserung der wirklichen Bodenbewegungen. — Die drei Unterbrechungen der seismogrammatischen Linie waren die Markierungen der Minuten 13^h 17, 13^h 18 und 13^h 19 durch die mit dem Seismometer verbundene Uhr, welche aber in mitteleuropäische Zeit umgerechnet worden sind. (Vergl. S. 178.)

die Endphase in die chronischen Bodenerzitterungen verläuft. In der Vorphase sind die Perioden und Amplituden der Ausschläge minimal, in der Hauptphase gewinnen beide ziemlich unvermittelt beträchtlich an Grösse, um dann bis zum Ende des Bebens ganz allmählich wieder abzunehmen.

Die Zeitpunkte des Beginnes und der Endschaft dieser 3 Phasen sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich:

	Unkorrigierte seismometrische Zeitregistrierung	Korrigiert in mitteleuropäische Zeit nach der Fraunhoferschen Normaluhr der Leipziger Sternwarte (Korrektur = + 1^m 38^s)
Erster Einsatz	13^h 17^m 8^s	13^h 18^m 46^s
Beginn der Hauptphase .	13 17 34	13 19 12
Ende der Hauptphase . .	13 18	13 19 38
Ende des Bebens	13 19	13 20 38

Danach betrug in Leipzig die Dauer der Vorphase 26 Sekunden, der Hauptphase ebenfalls 26 Sekunden und der Endphase etwa 60 Sekunden, also diejenige des ganzen Bebens ungefähr 1 Minute 52 Sekunden.

Die Schwingungsperioden. Die in dem Seismogramm Fig. 1 zum Ausdruck gelangenden Bewegungen des Untergrundes von Leipzig erfolgen während der ganzen, 26 Sekunden langen Vorphase so rasch, dass sie sich nicht scharf voneinander trennen lassen, dass also ihre Perioden unmessbar bleiben. Mit dem Beginn aber der Hauptphase verlängert sich die Periode der Einzelausschläge direkt auf 0,42 bis 0,58 Sekunden, infolgedessen sich die Einzelbewegungen bei ihrer Aufzeichnung scharf gegeneinander abheben. Im weiteren Verlaufe der Hauptphase wachsen die Perioden um noch etwas, nämlich auf 0,6 bis 0,8 Sekunden an. Bald machen sich jedoch die chronischen Tageszitterungen störend bemerkbar, indem

sie sich den allmählich schwächer werdenden seismischen Wellen überordnen und hiedurch bewirken, dass in der Endphase der Abschluss der seismischen Aufzeichnung nicht scharf zu erkennen ist.

Die Amplituden. Die Vorphase des Seismogrammes vom Böhmerwald-Beben besteht in dem 1250 fach vergrösserten Seismogramm Fig. 1 aus Erzitterungen von im Höchstfalle 2,75 mm, was einer tatsächlichen Bewegung des Untergrundes von 0,002 mm entspricht. Die Amplituden dieser minimalen Ausschläge nehmen dreimal zu und ab, ohne dass sich jedoch die letzteren scharf voneinander abheben. Mit dem vierten Anschwellen, dem Eintritt der Hauptphase, werden die Perioden länger, so dass sich die jetzt auch intensiveren Bewegungen der Schreibnadel in Einzelausschläge auflösen. Die Amplitude derselben ist im Anfangsabschnitte der Hauptphase am grössten und beträgt im Seismogramm 7 mm, in Wirklichkeit 0,0056 mm. Im nächsten Teile der Hauptphase, wo sich die längsten Perioden einstellen, haben sich die Amplituden schon auf 5—6 mm, also auf 0,004 mm wahrer Grösse verkürzt.[1])

Dies die „Einzelangaben" des Bebens. Was die allgemeinen Merkwürdigkeiten betrifft, so sei hier folgendes gesagt:

Die „Längenerstreckung" des Erschütterungsfeldes beträgt, wenn wir Marienbad ungefähr als nahe an dessen Rande liegend annehmen, bis Furth i/W. beiläufig 85 km, und die Breite von etwa Floss bis Mies 50—55 km. Dabei ist es

---

[1]) Siehe: „Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig" vom 2. Februar 1903. Hier veröffentlichte H. Credner die Abhandlung: „Die vom Wiechertschen astatischen Pendelseismometer der Erdbeben-Station Leipzig während des Jahres 1902 registrierten Nachbeben." Die dem Aufsatze beigegebene Karte des Erschütterungsgebietes stimmt mit der dieser Abhandlung beigegebenen genau überein, was seinen Grund darin hat, dass die von dem Verfasser und Herrn Knett angefertigte Karte durch letzteren Herru H. Credner übermittelt wurde. — Unsere Fig. 1 ist der Crednerschen Publikation entnommen, desgleichen die kurze Erklärung hiezu.

sehr bemerkenswert, dass innerhalb dieses Gebietes, namentlich in Böhmen, grosse Striche ganz von diesem seismischen Vorgang verschont blieben, wie z. B. Michelsberg, Ronsperg u. s. w., und dass die teils in, teils nahe dem Erschütterungsgebiete liegenden Mineralquellen von Karlsbad, Marienbad, Franzensbad u. s. w. während der Katastrophe weder quantitativ noch qualitativ irgend eine merkliche Änderung wahrnehmen liessen.

Der Flächeninhalt des makroseismischen Schütterareales unseres Bebens dürfte gegen 4000 qkm betragen.

Das Gebiet intensivster Erschütterung haben wir auf unserer Karte angegeben und zwar liegen innerhalb der Linie Bärnau, Tachau, Haid, Neudorf, Gmainried, Waldthurn, Floss. Hier dürfte die Erschütterung dem Stärkegrad V der Rossischen oder dem Stärkegrad VI der Forelschen Skala entsprechen. Häuser erzitterten, Glocken läuteten von selbst, der Mörtel fällt von den Wänden, Gegenstände auf Tischen, Bänken und Öfen fallen herab, einige Mauern bekommen Risse etc.

Das Areal der noch einigermassen von Menschen wahrgenommenen Erschütterung liegt innerhalb der Ellipse Königsmark, Marienbad, Weseritz, Mies, Furth i/W., Winklarn, Waldsassen. (Siehe Karte.)

Nach Credner soll sich das Gebiet der makroseismischen Erhebung peripherisch noch weiter ausdehnen. Er schreibt: „Nach dem Stärkegrade der Erschütterung in manchen der obige Umgrenzung markierenden Orte zu schliessen, dehnte sich das Gebiet der makroseismischen Erhebung noch weiter aus, wo aber die seismischen Schwingungen derart an Intensität verloren, dass ihr Eintritt die Aufmerksamkeit der Bewohnerschaft nur noch ausnahmsweise zu erregen vermochte, wie dies in der etwa 25 km nach NNW. vorgeschobenen Stadt Asch der Fall war, während aus den zwischenliegenden Orten, z. B. Eger und Franzensbad, trotz des erlassenen Zeitungsaufrufes und persönlicher Anfragen keine positiven Nachrichten zu erzielen waren.“ [1])

---

[1]) Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vom Jahre 1903, S. 16.

Die Angaben über die Zeit des Eintritts der Erschütterung, welche zwischen $1^1/_4$ bis kurz vor $1^1/_2$ nachmittags sich ereignete, stimmen im allgemeinen überein. Bei dem ungleichen und ungenauen Gang der verschiedenen Uhren ist jedoch eine sehr genaue Zeitbestimmung ausgeschlossen. Dies gilt auch von der Dauer des Ereignisses. Nähere Bestimmungen des Epi- und Hypozentrums sowie über die Tiefe des Erschütterungsherdes lassen sich deshalb nicht machen.

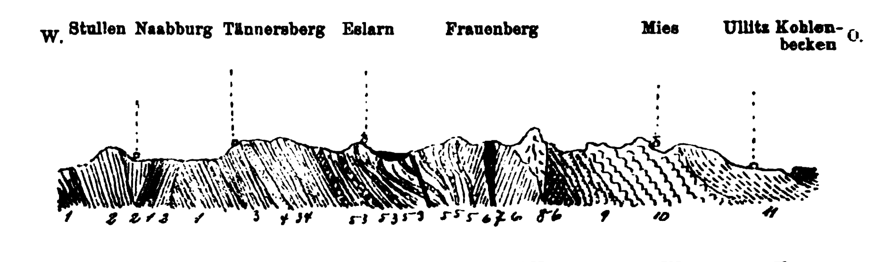
Bezüglich der Stossrichtung herrscht ziemliche Übereinstimmung von SW. nach NE. Was endlich die Ursache dieses Erdbebens anlangt, so kann gesagt werden, dass wir es hier wahrscheinlich mit einem sog. tektonischen oder Gebirgsbeben zu tun haben, wie solche in historischer Zeit schon öfters das Böhmerwaldgebiet heimgesucht haben.[1]) Die ganze geologische Konstitution des Erschütterungskomplexes ist eine solche, dass sie jenen endogenen Veränderungen einen günstigen Boden bietet. Einmal besteht das ganze Gebiet, wie der beigegebene Querschnitt am besten lehrt, aus so mannigfaltigem Gesteinsmaterial, dass Auslösungen von Spannungen, welche in der Tiefe zwischen den verschiedenen Gesteinen sich vollziehen, fast zur Regelmässigkeit werden können. Ferner durchsetzen mehrere Querspalten und -brüche den gewaltigen Gebirgsblock gerade in unserer betrachteten Gegend, so dass Stauungen, Rutschungen und Verwerfungen sich immer noch vollziehen können. Endlich liegt der nordwestliche Teil der Erschütterungsfläche in einem Gebiete, wo in der Tertiärzeit noch gewaltige Basalteruptionen stattgefunden haben (Boden, Mitterteich, Waldsassen etc.)[2]) und es ist leicht möglich, dass durch diese Basaltausbrüche in nicht sehr beträchtlicher Tiefe Zerbröckelungen des Gesteins veranlasst wurden, wodurch bei geringster Beein-

---

[1]) Siehe Sitzungsberichte der math.-physikalischen Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. Jahrg. 1889/98.

[2]) Siehe v. Gümbel: „Geognostische Karte des Königr. Bayerns;" — ferner v. Gümbel: Geologie von Bayern, II. Bd., S. 486 u. s. f. Cassel 1894. — Götz W. „Historisch-geogr. Handbuch von Bayern," I. Bd., S. 57 ff. München 1895.

flussung eine Lagerungsänderung derselben bewerkstelligt werden kann (z. B. durch Wasser).



Profil vom Westfusse des ostbayerischen Grenzgebirges bis in das Kesselland von Böhmen. (Nach W. v. Gümbel.)

I. Bojische Gneisstufe: 1. bunter Gneis; 2. bunter Granit.
II. Hercynische Gneisstufe: 3. Schuppen und Körnelgneis; 4. Lagergranit; 5. Granulit und Hornblendegneis.
III. Hercynische Glimmerschiefer: 6. Hornblendeschiefer; 7. Quarzit; 8. Stockgranit: 9. Glimmerschiefer.
IV. Hercynische Phyllit- oder Urthonschiefer-Bildung: 10. Phyllit.
V. Paläolithische Schiefer 11.
12. Carbon-Schichten.

Anknüpfend an das soeben behandelte Erdbeben vom 26. November 1902 teilen wir noch eine Reihe anderer Dislokationen mit, die als Ergänzung zu der Gümbelschen Sammlung betrachtet werden mögen. Im folgenden haben wir es jedoch meist mit Erdzitterungen zu tun, deren Zentrum und Epizentrum grösstenteils ausserhalb Bayerns lag. Bei solchen Übertragungs- oder Relaisbeben pflanzen sich die undulatorischen Bewegungen bis in Gegenden fort, welche von Hause aus nicht leicht von Erdstössen betroffen werden würden, „ähnlich wie die Meeresdünung sich auch noch in weit abliegenden, von dem sturmauslösenden Winde durchaus nicht betroffenen Teilen des Meeresbeckens bemerklich macht".[1])

---

[1]) S. Günther, „Das bayerisch-böhmische Erdbeben vom Jahre 1329." Jahresbericht der Geographischen Gesellschaft in München für 1896 und 1897."

1008.

Grosses Erdbeben in Bayern im Monat Mai 1008.[1])

1329.

Dasselbe wird bei v. Gümbel nur kurz erwähnt mit den Worten:

„Am 22. Mai 1329 Erdbeben zu Prag, in ganz Böhmen und Bayern.“ [2])

Eine mühevolle Untersuchung machte darüber Siegm. Günther, die im Jahresbericht der „Geographischen Gesellschaft in München für 1897 und 1898“ niedergelegt ist.[3])

1348.

Über dieses Erdbeben berichtet ein Benediktiner von Weihenstephan bei Freising und eine Aufschreibung in Passau. Ersterer gibt als Tag den 25. Januar an und sagt: „Es war ein heller sonniger Wintertag. Da bedekte sich nachmittags plötzlich das Firmament. Wir sahen die Kirchen und hohen gemauerten Gebäude wanken, so dass die kleineren Glocken auf den Türmen von selbst stark zu läuten anfingen. Die Fenster klirrten gewaltig, das Wasser in Bächen und Flüssen lief aufwärts und trat aus seinem Bette, die klarsten Bäche wurden aufgewühlt und trübe. Die Menschen fielen zu Boden.“

Die Passauer Nachricht sagt: „Im Jahre 1348 ward Passau von einem gewaltigen Erdbeben heimgesucht. Die Häuser und Kirchen schwankten, so dass die Glocken zu läuten anfingen. Viele Häuser und Kirchen wurden arg beschädigt. Die Leute taumelten hin und her.“ [4])

Heinrich Zschokke schreibt darüber:[5]) „Das Erdbeben von 1348 wurde gespürt in Italien, Dalmatien, Ungarn, in Süd-

[1]) Bayerland, Jahrg. 1899, S. 60.

[2]) Sitzungsber. d. Münch. Akad., math.-phys. Kl., 1889, S. 88.

[3]) Vergl. S. 182 unter 1.

[4]) Bayerland, 1891, S. 371.

[5]) Zschokke H.: „Der Bayerischen Geschichten 3. und 4. Buch.“ II. Band, Aarau 1821, S. 234.

deutschland und in den Alpen. Es begann im Jahre 1348 und dauerte noch folgendes Jahr in Italien fort. Zu Villach und in anderen kärnthenschen Orten kamen bei 5000 Menschen um."

In der „Urkundliche Chronik von München" heisst es: „Am 25. Januar 1348 wurde in ganz Ungarn, Illyrien, Dalmatien, Kärnten, Istrien, Mähren und Bayern, insbesondere auch in Oberbayern und München, ein heftiges Erdbeben gespürt. Die ersten Erschütterungen kamen am Abend des genannten Tages, darunter volle 40 Tage (mit Unterbrechungen) und bewirkten grosse Zerstörungen. Auch die Münchner Bürgerschaft war voll Angst und Schrecken." [1])

1755.

In diesem Jahre fand das furchtbare Erdbeben von Lissabon statt, das auch in Bayern, wie v. Gümbel andeutete und Wörle weiter ausführte, deutlich gespürt wurde. (Siehe: „Münchner geographische Studien," herausgegeben von Siegm. Günther, 8. Heft: „Der Erschütterungsbezirk des grossen Erdbebens zu Lissabon" von Hans Wörle.) Siehe ferner: „Bayerland," Jahrgang 1899, S. 120.

1769.

„Anno 1769, den 4. August, ist in Schöffelding bei Landsberg ein Erdbeben gewesen. Die Häuser wurden erschüttert und krachten. An einigen Orten scheinte es, als schiessete man. Einige Leute laufeten aus den Häusern. Viele verstunden nicht, was dieses wäre, die Erde thäte sich bewegen, wie ein Wiegen. Die zweyte Erschütterung, welche man beförchtete, erfolgte nicht mehr." [2])

1770.

Am 4. und 5. November 1770 war ein Erdbeben, aber ohne Schaden.[3])

---

[1]) „Urkundliche Chronik von München" von Heinrich Wolf; II. Bd., 1854, S. 249. Vergl. auch S. Günther, Münchener Erdbeben- und Prodigienliteratur, Jahrbuch für Münchener Geschichte, 4. Band.

[2]) Bayerland, 1893, S. 131.

[3]) Ebenda, 1896, S. 48.

1873.

Im März 1873 vier bis fünf heftige Stösse in der Richtung SW.—NE. zu Ries bei Passau. Auch zu Passau wurde dieses Beben noch wahrgenommen.[1])

1889.

Im April dieses Jahres wurde in Schwennenbach bei Höchstädt a/D. ein zwar kurzes, aber ziemlich heftiges Beben beobachtet. Herr Schulrat Dr. Reindl aus Kempten schrieb mir darüber: „Nachts etwa um 2 Uhr empfanden die Bewohner plötzlich einen ausserordentlich heftigen Stoss, man hörte einen donnerähnlichen Schlag, der so laut war, als hätte der Blitz in einem Nachbargebäude eingeschlagen. Am Bette bemerkte man ein deutliches Schwanken, gleich dem Schwanken einer Schaukel, die Gläser klirrten und die Bilder an der Wand wurden bewegt. Der ganze Vorgang hatte indes kaum eine halbe Sekunde gedauert, Ruhe und Stille herrschten dann wieder wie zuvor. Auch in der ganzen Umgegend, in Höchstädt a/D., in Dillingen, Lauingen, Donauwörth, Bissingen etc. wurde die erwähnte Erschütterung wahrgenommen."

1896.

Am 16. Mai abends 8 Uhr 52 Minuten heftiger Erdstoss mit starkem Getöse in senkrechter Richtung von unten nach oben in der Gegend von Hof. Seit dem Erdbeben vom 5. März 1872 war keine solch starke Erschütterung im ganzen Gebiete wahrgenommen worden. Das Epizentrum lag im Vogtlande.[2])

1902.

1. „In Partenkirchen wurden am 4. Februar drei heftige Erdstösse verspürt. Auch in Mittenwald wurde am nämlichen Tage die Erschütterung wahrgenommen." (Münchner Neueste Nachrichten vom 5. Februar.)

---

[1]) Gütige Mitteilung durch Herrn Adjunkten Rippel aus Passau.

[2]) Geographische Zeitschrift von Hettner, 1896, S. 411.

2. „Böhmerwalderdbeben“ am 26. November; siehe Eingang dieser Abhandlung.

3. Erdstösse in Weiden. Die „Münchner Zeitung“ vom 26. Dezember schrieb: „Die jüngst gemeldeten Erschütterungen mehren sich. Heute mittags konnte man an dem sog. Fischerberg eine heftige Erschütterung mit mehreren Stössen begleitet wahrnehmen.“

1903.

1. Das „Münchner Tagblatt“ vom 13. Januar schrieb (S. 7): „Asch, 9. Januar. Die Bewohner des oberen Egertales haben gestern abends zwei heftige Erdstösse verspürt. Zu gleicher Zeit wurden auch im Nordfichtelgebirge und dem Röslautale Erderschütterungen wahrgenommen.“

Diesem Bericht zufolge sah sich der Verfasser veranlasst, bei grösseren Orten des Fichtelgebirges über das Vorhandensein, eventuell über die Äeusserung dieser Erschütterung nachzufragen. Von Hof schrieb man, dass zwei deutliche Erdstösse in Göttengrün, nicht aber in Hirschberg und Gesell bemerkt worden seien. (Witzgall, Expeditor.) Auch in Bayreuth und Wunsiedel wurde die Erzitterung gespürt (Adjunkt Heysel aus Bayreuth). Selbst in Bamberg soll zur gleichen Zeit ein leichter Erdstoss wahrgenommen worden sein. (Schuster, Adjunkt; Karl Böhm, Offiziant.)

2. Am 28. Januar (Nr. 28) berichtete der „Bayerische Kurier“ von einem Erdbeben aus der gleichen Gegend:

„Im Röslautale verspürte man heute morgens (26. Januar) einen erheblichen Erdstoss.“

3. Erdbeben in der Pfalz am 25. und 26. Januar:

a) Der „Bayerische Kurier“ schrieb (Nr. 29 vom 29. Jan. 1903): „In Wörth a/Rh. wurden am Sonntag drei heftige Erdstösse verspürt. Der zweite Stoss war der kräftigste. Die Häuser zitterten und die Öfen liessen ein Klirren vernehmen.“

b) Die „Augsburger Abendzeitung“ berichtete (Nr. 28): „Aus der Pfalz, 26. Januar: Heftige Erdstösse wurden gestern und heute in vielen Orten der Vorderpfalz verspürt. Die ersten Erschütterungen wurden am Sonntag Vormittag beob-

achtet. Zwei stärkeren Erschütterungen folgte innerhalb weniger Sekunden eine dritte. In einzelnen Strassen erzitterten, wie aus Langen-Kandel berichtet wird, ganze Häuserreihen, die Stubenböden gaben die zitternde Bewegung fort, Fenster klirrten, so dass die Leute, bestürzt über die bei uns ungewöhnliche Erscheinung, auf die Strassen liefen. Den Erdstössen vom Sonntag Vormittag folgten in der Nacht und heute Nachmittag noch mehrere andere. In Pfortz, Rheinzabern, Maxau u. s. f. wurden die gleichen Erscheinungen beobachtet. Von dort wird berichtet: Der nachmittags 4 Uhr erfolgte Stoss war einer der stärksten. Die Häuser zitterten und fingen an zu schwanken, so dass der Verputz von ihnen fiel, und die Fenster klirrten, so dass die Leute bestürzt auf die Strasse liefen. Bei dem 7. Stoss, schreibt ein Korrespondent der „Pf. Pr.“, kam ich selbst, an meinem Schreibtisch sitzend, gehörig ins Schwanken. Alle Stösse waren von einem dumpfen Donner begleitet.“

c) Die „Münchener Zeitung“ schrieb (Nr. 26 vom 1. Febr.): „In den Ortschaften Kandel, Maximiliansau, Minfeld, Wörth, Jockgrün und Rheinzabern wurden am verflossenen Sonntag und Montag mehrere Erdstösse wahrgenommen, zum Teil von ziemlicher Heftigkeit. Infolge dieser Erschütterungen sind die meisten Leute aus dem Schlafe erwacht. Sämtliche Erdstösse waren von einem dumpfen Donner begleitet.“

d) Der „Pfälzische Kurier“ sagt (Nr. 22 und 23): Kandel, 25. Januar. Heute Sonntag vormittags $^3/_4$ 10 Uhr erfolgten 3 kurze Erdstösse. Die zwei ersten, von gleicher Stärke, folgten einander in einem Zeitabstand von 4 Sekunden, der dritte, der 9 Sekunden nach dem zweiten erfolgte, war schwächer. In einzelnen Strassen erzitterten ganze Häuserreihen, die Stubenböden gaben die zitternde Bewegung fort, Fenster klirrten, so dass die Leute, bestürzt über die bei uns ungewöhnliche Erscheinung, auf die Strassen liefen. Nachmittags gegen 2 und 3 Uhr erfolgten noch zwei Stösse.

Kandel, 26. Januar. Nachdem gestern früh um $^3/_4$ 10 Uhr und gestern nachmittags um 1 Uhr und $^1/_4$ 4 Uhr dahier heftige Erderschütterungen stattfanden, wiederholten sich heute nacht

um $^1/_2$ 1 Uhr, heute morgen um 7 Uhr und 7 Uhr 5 Minuten sowie heute nachmittags um 4 Uhr die furchtbaren Erscheinungen unter dumpfem Rollen.

Maximiliansau, 26. Januar. Hier wurden heute nacht 12 $^1/_4$ Uhr Erdstösse verspürt. Dieselben waren so stark, dass Türen aus dem Schloss sprangen und auf- und zuschlugen. An den Fensterscheiben und an anderen Gegenständen konnte man ein Zittern wahrnehmen. Auch im nahegelegenen Pfortz wurde dieselbe Beobachtung gemacht.

Kandel, 27. Januar. Heute wiederholten sich die gestern gemeldeten Erschütterungen dreimal und zwar heute früh $^1/_2$ 5 Uhr, heute früh $^1/_4$ 8 Uhr und heute früh $^1/_4$ 10 Uhr. Das letzte Beben war das heftigste.

e) Herr Lehrer Klippel aus Kandel hatte die Güte, auf unsere Anfrage folgendes zu schreiben:

„Die erste Erschütterung wurde wahrgenommen am Sonntag den 25. Januar vormittags um 10 $^3/_4$ Uhr. Die Fenster klirrten, der Boden wankte unter den Füssen, das Vieh in den Ställen sprang auf und geberdete sich äusserst unruhig. Ein deutlich vernehmbarer Schall, vielleicht ein dumpfer Donner oder ein lautes Rollen, begleitete die Erschütterung. Manche Leute meinten, es sei über ihnen ein Schrank oder irgend ein anderes Stück Möbel umgefallen. Andere wieder glaubten, der Nachbar müsse ein schweres Fass aus dem Keller rollen.

Durch den Erdstoss, der Montag früh 12 $^1/_4$ Uhr erfolgte, wurde mein Bett kräftig gerüttelt und ich ganz unsanft aus dem Schlafe geweckt. Weniger stark waren die Erschütterungen, die Montag früh 6 und 7 Uhr erfolgten. Es sollen deren 3 gewesen sein; ich konnte bloss eine wahrnehmen.

Diejenigen, die ich darüber befragt habe, ob sie nicht eine bestimmte Richtung angeben könnten, in welcher das Erdbeben gewirkt habe, waren übereinstimmend der Meinung, es müsse in ziemlich senkrechter Richtung aus dem Erdinnern nach der Erdoberfläche gewirkt haben. Nur einer meinte, es sei von Südwesten nach Nordosten gegangen. Bei der Er-

schütterung, die Montag mittags $11^3/_4$ Uhr erfolgte, gab ich gerade Privatunterricht. Plötzlich erfolgten schnell aufeinander zwei ziemlich kräftige Stösse. Man hatte das Gefühl, als ob unten im Keller etwas umgestürzt sei. Am Montag mittags 4 Uhr erfolgte eine neue Erschütterung. Ich ging gerade auf der Strasse spazieren und habe nichts davon bemerkt. Dagegen hat mein Bruder, der etwa 100 m von mir auf einer Wiese stand, sehr deutlich ein Zittern des Bodens verspürt. Als ich unmittelbar nach dem Beben zu ihm trat, konnte ich die Aufregung bemerken, die das Schwanken des Bodens ihm verursachte.

Auf dem Langenberg-Forsthaus, $^1/_2$ Stunde südlich von Kandel im Biemwald, wurde die Erschütterung besonders stark empfunden. Überhaupt scheint mir das Beben gegen Süden und Osten von Kandel aus zugenommen zu haben.

In einzelnen Häusern sollen Gläser, Tassen etc. heruntergefallen sein; doch wurden Risse an Gebäuden, wie bei dem Erdbeben 1880, nicht bemerkt; das letzte Erdbeben hat keinen namhaften Schaden verursacht; doch sind die Bewohner des hiesigen Ortes ziemlich unruhig geworden. Die zeitliche Aufeinanderfolge der Erschütterung war folgende:

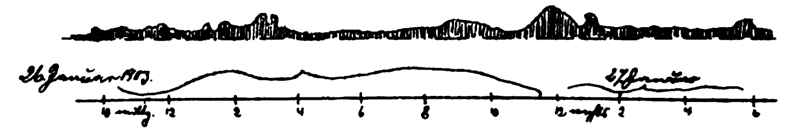
Sonntag: $10^3/_4$; $1^3/_4$; 3 Uhr.
Montag: $12^3/_4$ nachts; 6—7 Uhr früh; $11^3/_4$ vorm.; 4 Uhr nachm.
Dienstag: 5 Uhr früh."

f) Nach unseren weiteren, teils auf brieflichem, teils auf telegraphischem Wege eingezogenen Erkundigungen wurde die Erschütterung noch ferner wahrgenommen zu Neustadt a/H., Rheinzabern, Germersheim, Speyer, Ludwigshafen, Karlsruhe, Philippsburg, Durlach, Ettlingen und Bruchsal. (Letztere 5 Orte liegen in Baden.)

g) Ausser der Erdbebenstation Strassburg spürten auch die Apparate des Münchener geomagnetischen Institutes das Vorhandensein dieser seismischen Kraft, denn die magnetischen Instrumente dortselbst (ob durch die bei Erderschütterungen

sich auslösenden magnetischen Strömen beeinflusst?) zeigten einen starken Ausschlag, wie nachfolgende Kurve des Magnetometers deutlich lehrt: [1])

Fig. 2.



Richtung der Stösse: von Südwesten nach Nordosten.
Epizentrum: Gegend von Kandel.
Ursache des Erdbebens: Nähe des Rheinischen Grabenbruches und die zahlreichen Verwerfungsspalten gerade in diesem Gebiete; deshalb auch die sich wiederholenden Erschütterungen dortselbst. (Siehe v. Gümbel „Geologie von Bayern," Bd. II, 1013.)

Grosses Erdbeben am 5. und 6. März 1903 im Erz- und Fichtelgebirge und im angrenzenden Böhmerwalde.

A. Vorbeben.

Am 25. Februar schrieb man aus Prag: „In Grasslitz und Umgebung sind in den letzten 8 Tagen wiederholt Erdstösse wahrgenommen worden." (Siehe Münch. Ztg. vom 26. Febr. 1903, Nr. 47.) Zu derselben Zeit wurden auch vom anstossenden Vogtlande heftige Erschütterungen gemeldet. (Siehe Bayer. Kurier Nr. 56.) Besonders stark scheint aber das Beben in der Umgegend von Asch gewesen zu sein. Am 20. Februar abends um 10 Uhr 5 Minuten erfolgte nämlich dort ein solcher Erdstoss, dass Leute, die doch in Asch öfters Gelegenheit haben, Erdbeben wahrzunehmen und daher nicht so ängstlich sind, entsetzt auf die Strasse eilten. In den meisten Häusern wurde Licht gemacht. Der Stoss war so stark, dass es in allen Fugen knarrte und prasselte und die Fenster, wie vom Sturmwinde

[1]) Herr Dr. Messerschmidt, Observator am magnetischen Institute der K. Sternwarte, überliess dem Verfasser das dortige Material zur Einsichtnahme und gestattete die Abzeichnung vorstehender Kurve, auch hat derselbe freundlichst eine einschlägige Notiz beigefügt, die sich am Schlusse dieses Aufsatzes abgedruckt findet.

gerüttelt, klirrten. Im hochgelegenen Stadtteile Niklasberg, wo das Erdbeben am heftigsten seine Wirkung äusserte, fielen Schiefer von dem Dache eines Hauses. Die Umfriedung eines Parkes, eine Steinmauer, erhielt einen klaffenden Riss. Der Erdstoss dauerte wohl nur eine Sekunde und äusserte sich so, als ob tief unten im Keller oder unter der Erde eine grosse Mine gesprengt worden wäre. Auch der kurze dumpfe Donnerschlag, welcher mit dem ruckartigen Stosse gleichzeitig erfolgte, rief eine solche Empfindung wach. In Oberreuth, 1½ Wegstunden von Asch entfernt, wo das Erdbeben ebenfalls sehr heftig war, stürzte ein Teil einer Brunnenausmauerung ein. Selbst beim Erdbeben im Jahre 1897 in dieser Gegend soll kein Erdstoss so heftig gewesen sein wie der oben genannte. (Siehe Hofer Anzeiger; Augsburger Abendzeitung vom 25. Febr.)

Nach unseren eingezogenen Erkundigungen wurde dieser Stoss um dieselbe Zeit auch in Selb, in Marktleuthen, Hof, Schwarzenbach, Kirchenlamitz und Wunsiedel wahrgenommen. Namentlich in Selb scheint der Erdstoss auch ziemlich kräftig gewesen zu sein, denn die Erschütterung wurde dort von jedermann wahrgenommen in Form eines dröhnenden Donners. Fenster klirrten, Häuser erzitterten, Fensterläden klapperten, unverschlossene Stuben- und Schranktüren öffneten sich, leichte Gegenstände, selbst Stühle und Bänke wurden verschoben und einzelne im Bett liegende Personen wurden auf den Boden geworfen. (Gütige Mitteilungen von den dortigen Postanstalten und Lehrern.)

B. Hauptbeben.

Über dieses Beben liegt so viel Material vor, dass wir dasselbe wegen jetzigen Raummangels später an einer anderen Stelle behandeln werden. Das pleistoseiste Gebiet lag bei diesem Beben grösstenteils in Sachsen und Böhmen, dagegen wurde ein grosser Bezirk von Nordostbayern mittelstark betroffen. Die Grenze schwächster Erschütterung schliesst noch Bamberg, Erlangen, Regensburg, Straubing und Passau ein. Über dieses sowie über das nachfolgende Erdbeben in der Pfalz am 22. März

hat auch die Münchener Meteorologische Zentralstation sehr viel Nachrichten erhalten, die der derzeitige Direktor dieser Anstalt, Herr Professor Dr. Erk, in der gefälligsten Weise behufs Verarbeitung dem Verfasser zur Verfügung stellte und wofür Herrn Professor Dr. Erk der ergebenste Dank ausgesprochen sei.[1])

Diese Mitteilungen sowie die von mir eingezogenen Erkundigungen und die Nachrichten der Tagesblätter ergaben folgende Resultate:

Zum Gebiet stärkster Erschütterung gehören noch die bayerischen Ortschaften: Regnitzlosau, Rehau und Selb. Der böhmische Ort Asch, wo das Beben am heftigsten war, liegt ganz an der bayerischen Grenze, und ein Bahnhofgebäude dortselbst ist Besitztum des bayerischen Staates. In Asch wurden starke Stösse vernommen am 5. März um 9 Uhr 37 Min., 9 Uhr 52 Min., 10 Uhr 50 Min. nachts und am 6. März um 6 Uhr 8 Min. früh und 2, 3 und 4 Uhr nachmittags. Die Leute liefen entsetzt auf die Strasse, Kinder und Frauen weinten. In einigen Häusern verlöschte bei dem Stosse um 9 Uhr 52 Min. am 5. März das elektrische Licht, Häuser bekamen Risse und Schornsteine fielen ein. (Hofer Anzeiger, Augsburger Abendzeitung und Münch. Ztg.) In Regnitzlosau wurden die Erschütterungen am 5. März um $^1/_2$ 10 Uhr und am 6. März um $^3/_4$ 6 Uhr wahrgenommen, desgleichen zu Rehau und Selb. Das Beben erreichte also in diesen Orten den 6. Grad der Forelschen Skala, wonach Gegenstände umgeworfen und Risse an den Wänden und Decken der Häuser entstehen. Zu Asch erreichte die Dislokation sogar den 7. Grad genannter Skala.

Mittelstark wurde das Beben wahrgenommen in folgenden Lokalitäten: In Markt-Redwitz waren die Erdstösse derart, dass das Bahnwärterhäuschen im Frauenholze bedeutend ins Schwanken geriet. (Münch. N. Nachr. Nr. 112, S. 4.) Aus Konnersreuth wird berichtet: „Am 5. und 6. März wurden hier mehrere Stösse verspürt. Der erste Stoss (5. März), der

[1]) Wir zitieren: M. Z. St. = Meteorolog. Zentral-Station.

um $^3/_4$ 10 Uhr wahrgenommen wurde, war so heftig, dass Tische, Stühle und Bettläden emporgeschnellt wurden. Gleich eine Viertelstunde darauf erfolgte der zweite Stoss, der zwar weniger heftig war, aber länger andauerte. Am 6. März erfolgte ein dritter Stoss, der an Heftigkeit dem ersten wenig nachstand und ungefähr $^1/_2$ Minute (?) andauerte. Ein viertes Beben wurde eine Viertelstunde später vernommen. Sämtliche Erdstösse waren von einem donnerähnlichen Getöse begleitet.“ (Münch. N. Nachr. Nr. 114, S. 5.) Herr Forstamtsassessor Wünsch aus Wiesau hatte die Güte, folgendes mitzuteilen: „Am 5. März machte sich hier ein ziemlich starkes Erdbeben, welches sich von Westen nach Osten bewegte, bemerkbar. Gegen 10 Uhr nahm ich ein Schaukeln des Stuhles, auf welchem ich sass, und ein Ächzen der Zimmertüre wahr, während meine bereits im Bette sich befindende Frau deutlich ein Schwanken der Bettstätte und das Klirren der auf der Marmorplatte des Waschtisches stehenden Waschschüsseln bemerkte.“ (M. Z. St.) Herr Oberexpeditor Vogl von Wiesau spürte die Erschütterung am 5. März um $^1/_2$10 Uhr und am 6. gl. Mts. um 5 Uhr. 59 Min. und $^1/_2$10 Uhr früh. Nach dessen Erkundigung wurde auch die Dislokation zu Tirschenreuth und Fuchsmühl bemerkt. (M. Z. St.) Aus Neualbenreuth bei Waldsassen meldete man: „Wir verspürten hier am 5. März abends 9$^3/_4$ Uhr einen ziemlich heftigen Erdstoss, der die Fenster erklirren und Bilder etc. wackeln machte. Kurz nach 9 Uhr wiederholte sich derselbe in gleicher Heftigkeit. Die Dauer war ungefähr eine Sekunde. Ein ungleich stärkerer Stoss wurde am 6. März morgens 6 Uhr verpürt. Wie einwandfreie Beobachter angeben, ging das Beben in der Richtung von Südwest nach Nordost.“ (Augsb. Abdztg. Nr. 69 S. 7.) In Feilitzsch-Trogau wurden schon am 4. März früh 1 Uhr 5 Minuten deutliche Stösse verspürt, die sich am 5 gl. Mts. um 9 Uhr 34 Minuten wiederholten. Auch in Gattendorf und Unterhardmannsreut wurden am 5. März $^1/_2$10 Uhr und am 6. März früh 6 Uhr Erzitterungen wahrgenommen, indem Fenster klirrten und Gebäulichkeiten wankten. (Augsb. Abdztg. Nr. 66 S. 4.) Aus

Mitterteich kam die Meldung: „Hier wurden sowohl in der Nacht vom 4. auf 5. als auch besonders in der Nacht vom 5. auf 6. ds. wellenförmige Erschütterungen der Erde, begleitet von einem Rollen ähnlich dem eines schweren Lastwagens, wahrgenommen. Besonders heftig waren die Erschütterungen am 5. ds. abends 9 Uhr 53 Minuten, 9 Uhr 56 Minuten und am 6. ds. früh 6 Uhr. Auf den Möbeln aufgestellte Gegenstände gerieten ins Schwanken, die Fensterscheiben klirrten, im Bette liegend hatte man das Gefühl einer schaukelnden Bewegung, gerade als ob die Bettstelle von unten in die Höhe gehoben werde.' Die Dauer der Erdstösse betrug ca. 10 Sekunden und es schien die Bewegung in der Richtung von Südost nach Nordwest zu verlaufen.“ (Augsb. Abdztg. Nr. 66.) Lehrer Leichs aus Maiersreuth schrieb: „In hiesiger Gegend wurden schon seit 14 Tagen Erdstösse wahrgenommen, die letzten am 5. März früh 2 Uhr und abends 10 Uhr, am 6. März morgens 6 Uhr. Dieselben sind beim Sitzen und Liegen bemerkbar, Gegenstände im Zimmer, an den Wänden in leichte Bewegung; begleitet sind sie von einem donnerähnlichen Geräusch. Mittelstark wurde das Beben noch vernommen in den nebenstehenden in der Tabelle angeführten Orten.

Am stärksten war das Beben in Böhmen und im Vogtlande, worüber wir an einer anderen Stelle berichten werden.

Über die Ursache dieser Erschütterungen können wir mitteilen, dass das Erdbeben vom 5. und 6. März entschieden zu den tektonischen oder Gebirgsbeben gehört, welche fast jedes Jahr, nur nicht immer in dem Masse, wie diesesmal, wiederkehren und ihren Grund darin haben, dass in der apodynamischen Tiefe der Erdrinde infolge der Abkühlung Schrumpfungen der starren Gesteine, Faltungen und Verschiebungen, Stauungen und Verwerfungen nebst Spaltenbildungen stattfinden. Jede dieser Verschiebungen ist imstande, einen Stoss oder eine Anzahl von Stössen zu erzeugen, die auf der Oberfläche als Erdbeben empfunden werden. Nun ist das Gebiet des Vogtlandes, das Faltengebirge des Thüringer Waldes zwischen Fichtelgebirge und Erzgebirge so dicht von solchen Spalten und Ver-

werfungen, wie keine andere Gegend Deutschlands durchzogen und daher auch sehr häufig von Erdbeben heimgesucht, indem durch die sich unter dem gewaltigen Gebirgsdruck vollziehende Bildung neuer, sowie durch die Erweiterung alter Klüfte, ferner durch unterirdische Berstungen und Rutschungen der losgetrennten Gebirgsteile sich solche Erschütterungen häufig ereigneten.

Ort	Zeit: 5. März	Zeit: 6. März	Stossrichtung	Stärke des Bebens nach der Forelschen Skala [1])	Dauer der Stösse
Wunsiedel . .	10 Uhr abends	6 morg.	O. nach W.	Grad 4	?
Höchstädt a/Th.	4, 10 Uhr ab.	6 „	O. n. W., teils von N. n. O.	?	?
Waldsassen . .	$^3/_4$ 10 Uhr ab.	6^5 „	O. n. W.	Grad 5	4 Sek.
Vordorf . . .	2 nchm., 10 a.	6 „	?	„ 4	—
Reichenau bei Waidhaus .	9^{35} abends 10^{25} „	—	NO.—SW.	„ 5	—
Lichtenberg .	10 Uhr „	$5^1/_2$ „	O. n. W.	„ 4	—
Falkenberg . .	10 „ „	6 „	O. n. W.	„ 3	4 Sek.
Münchberg . .	10 „ „	6 „	SO. n. NW.	„ 3	8 Sek.
Dörflas . . .	$10^1/_4$, $10^1/_2$ a.	6 „	O. n. W.	„ 4	15 Sek.(?)
Schauenstein .	$9^3/_4$, 10^{20} a.	6^5 „	O. n. W.	„ 5	8 Sek.
Kirchenlamitz .	10 Uhr abends	6 „	O. n. W.	„ 5	—
Röslau . . .	4 nchm., 10 a.	6^{15} „	O. n. W.	„ 5	4 Sek.
Erbendorf . .	10 Uhr abends	6 „	SW. n. NO.	„ 4	—
Hof	9^{55}, 10^{05}, 10^{15}	6^5 „	SW. n. NO.	„ 5	8 Sek.
Naila	10 Uhr abends	7 „ (?)	S. n. N.	„ 5	—
Groschlattengrün	$^3/_4$ 10 Uhr ab.	6 „	SW. n. NO.	„ 5	—
Floss	10 Uhr abends	6 „	SW. n. NO.	„ 4	—
Kemnath . .	10 „ „	$^3/_4$ 6 „	O. n. W.	„ 4	—
Martinlamitz .	$^3/_4$ 10 Uhr ab.	5 „	SW. n. NO.	„ 4	—
Arzberg . . .	10 Uhr abends	?	N. n. S.	„ 4	—
Berneck . . .	10 „ „	6 „	SO. n. NW.	„ 4	—
Wüstenselbitz .	10 „ „	6 „	O. n. W.	„ 4	—
Steben . . .	$^3/_4$ 10 Uhr ab.	6 „	O. n. W.	„ 4	—

[1]) Grad 3 der Forelschen Skala wird von den Menschen nur unter besonders günstigen Verhältnissen, Grad 4 aber auch mitten in der Tätigkeit beobachtet. Beben von der Intensität 5 sind schon im Stande, bewegliche Gegenstände zu verschieben; der 6. Grad äussert sich im Umwerfen solcher Gegenstände und in der Erzeugung von Rissen an den Wänden und Decken der Häuser. Steigert sich die Intensität bis zum 7. Grade, so werden Gebäude schon in ernstlicher Weise beschädigt und Kamine stürzen ein.

In der Zone schwächster Erschütterung liegen die Orte:

Ort	Zeit:		Stossrichtung	Stärke des Bebens nach der Forelschen Skala	Dauer der Stösse
	5. März	6. März			
Lauenhain	1/2 10 Uhr ab.	6 morg.	?	?	?
Ludwigsstadt	9 1/2, 9 3/4 „	6 „	O. n. W.	Grad 4	—
Viechtach	—	5^{55} „	W. n. O.	„ 3 (4?)	—
Bamberg	11 Uhr abends	6 „	—	„ 3	4 Sek.
Kronach	10 „ „	6 „	W. n. O.	„ 3	—
Kulmbach	—	6 „	S. n. N.	„ 3	—
Bayreuth	—	6 „	SW. n. NO.	„ 3	5 Sek.
Staffelstein	—	6 „	O. n. W.	„ 3	—
Pegnitz	—	7 „ (?)	O. n. W.	„ 3	—
Amberg	—	6 „	O. n. W.	„ 3	—
Weiden	10 Uhr abends	6 „	O. n. W.	„ 3	8 Sek.
Vohenstrauss	10 „ „	—	S. n. N.	„ 3	—
Eslarn	—	6 „	O. n. W.	„ 3	5 Sek.
Schönsee	—	6 „	O. n. W.	„ 3	5 Sek.
Winklarn	—	6 „	O. n. W.	„ 3	—
Waldmünchen	—	6 „	O. n. W.	„ 3	—
Rötz	—	6 „	?	„ 3	—
Schwandorf	—	6 „	?	„ 3	—
Regensburg	—	6 „	?	„ 3	—
Straubing	—	6 „	wellenförmig	„ 4 (?)	—
Passau	—	6 „	?	„ 3	—

Herr Stadtgeologe Knett rechnet dies eben erwähnte Erdbeben zu den Schwarmerdbeben. Solche Erdbeben wiederholen sich nach ihm in diesem Gebiete periodisch (1552, 1627, 1701, 1770, 1824 und 1897) und lassen sich erklären durch den von Südosten her auf das böhmische Massiv wirkenden Druck der Alpen. Dem Erzgebirge im Nordwesten komme dabei die Rolle eines seismischen Akkumulators zu; es kann die fremden Druckkräfte eine Zeit lang aufspeichern und gibt nach erreichter Spannungsgrenze sodann die aufgestapelte Energie nicht als einzigen verderblichen Stoss, sondern nach und nach als Schwarmbeben von sich, worin ein glücklicher Umstand liege.

Das nächste periodische Schwarmbeben wäre erst zwischen 1950 und 1975 zu erwarten gewesen. Dass sich aber schon

1900 und 1901 neue Bebenschwärme einstellten, die Knett als „spontane“ bezeichnet, bildete die erste Komplikation. Der Intermittenzcharakter dieser Bebenschwärme war ein von 1897 und 1824 wesentlich verschiedener. Ihre Ursache muss eine territoriale sein und Knett neigt der Ansicht zu, dass sich zwischen der Zwodau- und Elsterlinie eine das Vogt- und Egerland verbindende, quer zum Streichen des Erzgebirges gerichtete Senkung vorbereitet, die sich erst nach Jahrtausenden verwirklichen werde. Ein solcher tektonischer Vorgang gehe anfangs ganz allmählich vor sich und eine Senkung von nur 1 cm müsse schon bedeutende Stösse für den Bewohner der Erdoberfläche mit sich bringen.

In dem Umstande, dass sich das Intermittieren des letzten Bebenschwarmes mit dem der bisherigen periodischen Schwarmbeben im Erzgebirge deckt, liegt die zweite Komplikation, wodurch sich nun die ganze Erscheinung zu einer gänzlich verwickelten gestaltet.[1])

Grosses Erdbeben in der Südostpfalz am 22. März 1903.[2])

An diesem Tage war eines der grössten Beben in der Pfalz. Das Material hierüber ist sehr gross und noch nicht vollständig abgeschlossen. Die bis jetzt eingetroffenen Nachrichten mögen vorerst hier eine Stelle finden.

Der Herd lag bei Kandel. Hier erfolgten Erdstösse um 6, 7, 1/2 10 früh und 1/2 2 und 2 Uhr nachmittags am 22. März, nachdem schon am 21. März um 3/4 8 abends ein Vorstoss erfolgt war. Die Stösse waren sehr heftig, denn eine Anzahl Schornsteine sind eingestürzt, Mauern und Zimmerdecken zeigten Risse, der Verputz an Wänden und auf Dächern fiel zu Boden. Die Richtung der Stösse war von O. nach

---

1) Siehe: Bohemia, Nr. 67, 76. Jahrg. Prag, 9. März.

2) Da unsere Abhandlung Ende März in der Druckerei noch nicht gedruckt war, so war uns die Möglichkeit geboten, einen kurzen Bericht über dieses Erdbeben dieser Abhandlung noch beizufügen.

W.[1]) Ebenso heftig wie in Kandel war das Beben auch in Winden.[2]) Hier folgten um 6 Uhr 8 Min. vier heftige, 6 Sekunden währende Stösse, aufeinander, welche von donnerähnlichem Getöse begleitet waren. Die Häuser zitterten und die wellenförmigen Bewegungen der Böden und Wände konnte man mit dem Auge ganz gut wahrnehmen. Einzelne Leute wurden aus den Betten geworfen, andere wieder fielen auf den Boden. Der Wasserturm und die Zentralweichenstellerbude im Bahnhofe zu Winden zitterten so heftig, dass dieselben alle Augenblicke einzustürzen drohten. Der Zentralweichensteller flüchtete sich ins Freie. In Hagenbach[3]) wurde die Erschütterung gleichfalls um 6 Uhr 8 Min. gespürt. Die Bewegung war von W. nach O. und die Häuser wurden stark erschüttert. Möbel wurden verschoben und die Fenster klirrten. Zu Insheim[4]) zitterten die Gebäude ähnlich wie sie das tun, wenn in ihrer Nähe ein schwerer Güterzug passiert und zu Billigheim[5]) waren Möbelbewegungen deutlich sichtbar. In Minfeld[6]) war die Erzitterung so stark, dass die grössten Gebäude erschüttert wurden, desgleichen zu Klingenmünster. Zu Birkweiler[7]) beobachtete man einen ungefähr 4—5 Sek. andauernden Stoss, der sich von S. nach N. bewegte. In den oberen Stockwerken der Häuser zeigte sich dieser Stoss noch deutlicher, indem Zimmermöbel stark erschüttert wurden und hin und her schwankten. In Märzheim, Walsheim, Knörringen, Ottersheim, Knittelsheim und Bellheim[8]) verspürte man gleichfalls das Beben recht deutlich und mehrmals des Tages. Andere Orte der Pfalz, die das Beben wahrnahmen, sind: Neuburg, Scheibenhardt, Schaidt, Oberotterbach, Bergzabern, Niederschletttenbach, Oberschlettenbach, Bobental, Rinntal, Waldrohrbach, Ilbesheim, Landau, Eussertal, Siebeldingen, Edenkoben, Kirrweiler, Offenbach, Germersheim, Sondernheim, Hoerdt, Leimers-

---

[1])—[8]) Siehe: Pfälzer Presse Nr. 82, S. 3 und Nr. 83, S. 3. — Münchner Neueste Nachr. Nr. 138 und 139. — Münchner Zeitung Nr. 68. — Augsburger Abendztg. Nr. 82. — Rheinisches Volksblatt Nr. 69. — Landauer Anzeiger Nr. 69, Nr. 70, Nr. 75. — Pfälzer Kurier Nr. 69 und 70.

heim, Neupfotz, Rheinzabern, Jockgrim, Wörth, Pfortz, Herxheim, Hatzenbühl, Erlenbach, Dammheim etc.[1])

In den angrenzenden elsässischen und pfälzischen Ortschaften[2]) von Lauterburg bis Weissenburg verspürte man gleichfalls um 6 Uhr einen von Westen nach Osten gehenden, 2 Sek. lang anhaltenden, heftigen Erdstoss. Öfen, Küchengeschirr und andere leicht bewegliche Gegenstände gerieten dadurch in klirrende Bewegung.

Auch in Baden wurde die Erschütterung in der Umgegend von Karlsruhe noch gespürt. Die Bewegung war dort eine wellenförmige, kurz anhaltende, wie die dortige meteorologische Station berichtet. Im benachbarten Orte Teutschenreuth wurden nach dem „Bad. Landesboten" um 6^{15} früh und um 2 Uhr nachmittags heftige Stösse verspürt. In der Kirche war gerade Konfirmandenprüfung. Die Bänke gerieten ins Schwanken und die Fenster zerbrachen, so dass die Menge auf die Strasse floh. Auch in dem benachbarten Knielingen wurden starke Stösse verspürt und spielten sich ähnliche Szenen in der Kirche ab. Nach weiteren Nachrichten sollen dort schon morgens 3 Uhr zwei kurze leichtere Erdstösse verspürt worden sein.

Dieses Beben vom 22. März hatte auch ein Nachbeben. Am 26. März wurden um 2 Uhr nachmittags in Maxau und in Kandel Erschütterungen beobachtet, auch um 10 Uhr 10 Min. morgens hat man solche beobachtet, die in Kandel und Umgebung aber nicht so heftig waren, wie am 22. März. Immerhin schlugen offene Türen zu und die Bewohner hatten die Empfindung, als ob sie gehoben würden. In Rheinzabern wurde am 24. März ein kurzer Stoss verspürt. Auch am 27. März sind in Kandel und Hagenbach weitere Beben beobachtet worden.[3])

Was die Dauer des Hauptbebens betrifft, so wird man

---

[1])—[3]) Siehe: Pfälzer Presse Nr. 82, S. 3 und Nr. 83, S. 3. — Münchner Neueste Nachr. Nr. 138 und 139. — Münchner Zeitung Nr. 68. — Augsburger Abendztg. Nr. 82. — Rheinisches Volksblatt Nr. 69. — Landauer Anzeiger Nr. 69, Nr. 70, Nr. 75. — Pfälzer Kurier Nr. 69 und 70.

im allgemeinen bis 4 Sekunden als richtig annehmen können; in einzelnen Fällen mögen es auch mehr gewesen sein. Von mehreren Orten wurden 8 Sekunden gemeldet. Das Beben am Nachmittag war bedeutend kürzer als am Vormittag. Die Dauer der Stösse wird meist überschätzt. Die Art der Stösse war zum Teil aufeinanderfolgend, an anderen Orten mehr eine schüttelnde. An verschiedenen Orten der Pfalz wurde ein donnerähnliches Rollen wahrgenommen, in der Rheingegend wird von einem Vorhergehen des Donners mit nachfolgendem Stoss gemeldet. In Karlsruhe wurde das Beben wie ein Windstoss wahrgenommen. Ziemlich gross ist die Zahl der Berichte, in denen von einem unterirdischen Geräusch gesprochen wird, an anderen Orten von einem bebenden Geräusch.

Das Verhalten der Tiere war das bei Erdbeben gewöhnliche: sie zeigten grosse Furcht. Die Haustiere wurden allenthalben unruhig, Kühe suchten sich loszureissen, Hunde heulten und Hühner versteckten sich.

Wichtig ist, dass etwa zu gleicher Zeit in Italien, Südfrankreich und Südengland Erderschütterungen stattfanden und dass auch die Soufriére wieder in vulkanischer Tätigkeit war.[1]) Ich schliesse daraus, dass es sich hier um sog. Simultanbeben handelte, die sich dadurch erklären, dass die verschiedenen Gebiete alle bebenreif, dass Spannungen im höchsten Grade vorhanden waren, die nur irgend eines Anstosses bedurften, um eine Auslösung herbeizuführen. Ist meine Annahme richtig, so ist wahrscheinlich, dass, da der Zeit nach das Beben in der Pfalz zuerst auftrat, dieses die andern Beben hervorgerufen hat.

Aus unseren Angaben erhellt, dass bei genaueren Erkundigungen doch auch in dem fast als erdbeben-immun geltenden Bayern seismische Ereignisse nicht eigentlich zu den Seltenheiten gehören. Hoffentlich gewährt die Aufstellung seismometrischer Apparate in nicht zu ferner Zeit die Möglichkeit, jede auch schwächere Zuckung des Bodens innerhalb der Grenzen des Königreiches schärfer verfolgen zu können.

---

[1]) Münchner Neueste Nachr. Nr. 139 u. s. f.

Einige Bemerkungen über beobachtete Erdbeben am erdmagnetischen Observatorium in München.

(Gütige Mitteilung von Herrn Observator Dr. J. B. Messerschmitt.)

„Die Erdbeben können sich auf zweierlei Art an den erdmagnetischen Instrumenten bemerkbar machen, nämlich durch rein mechanische Wirkung (Erschütterung) oder durch Induktionswirkung (magnetische Störung). Im ersteren Falle wird die aufgehängte Magnetnadel aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und nimmt durch allmählich wieder abnehmende, regelmässige Schwingungen, ähnlich einem Pendel, diese Lage bald wieder ein. Bei den photographisch registrierenden Apparaten zeigt dann die photographische Kurve eine verwaschene Stelle. Die allgemeine Lage und Richtung der Kurve wird aber dadurch nicht berührt, die beiden Kurvenstücke nach und vor der Erschütterung bilden die Fortsetzung von einander.

Anders verhält es sich bei den magnetischen Störungen, welche durch Erdbeben erzeugt werden. Hier wird der Magnet plötzlich in eine andere Lage versetzt; die Kurve zeigt einen Absatz und bleibt stets scharf und deutlich. Dann bewegt sich die Nadel unregelmässig hin und her, mit oft stärkeren Ausschlägen und erreicht ihre Ruhe oft erst nach vielen Stunden oder mehreren Tagen wieder. Diese Bewegungen können am besten auf Erdströme zurückgeführt werden, welche durch das betreffende Beben ausgelöst werden, wodurch der Erdmagnetismus auf kürzere oder längere Zeit beeinflusst wird. Manchmal lassen sich auch die sog. Vorbeben und Nachbeben deutlich unterscheiden, wie überhaupt eine genaue Analyse solcher Aufzeichnungen nicht ganz unwichtig sein dürfte. Diese letzteren Störungen finden auf der ganzen Erde gleichzeitig statt, während die mechanische Erschütterung nur lokal auftritt.

In München werden mechanische Erschütterungen nur selten beobachtet; so ist seit dem Bestehen des neuen Observatoriums von Ende 1898 an nur einmal eine solche Störung aufgezeichnet worden. Die zweite Art hingegen tritt ziemlich

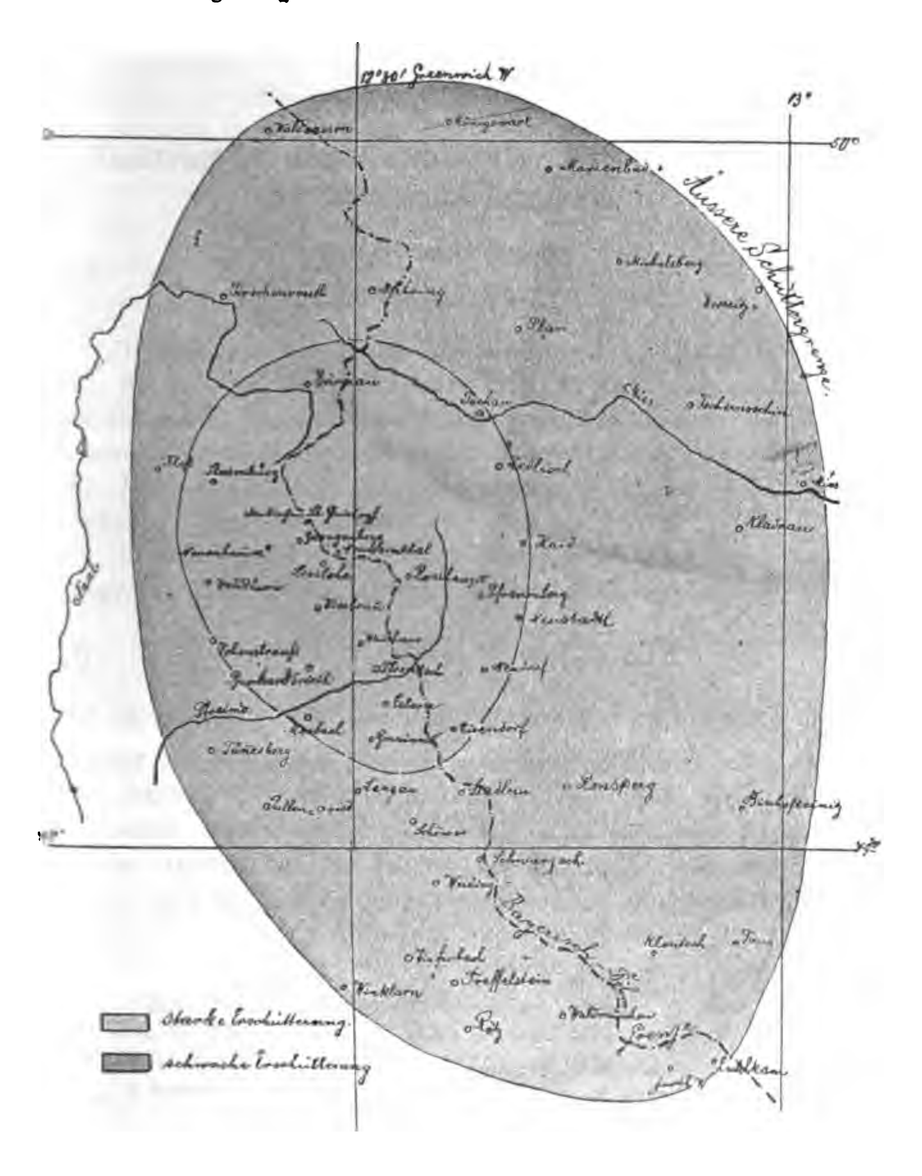
häufig auf. Besonders in den Zeiten des ungestörten Magnetismus, welche mit der Zeit geringer Sonnenfleckentätigkeit und geringer Häufigkeit der Polarlichterscheinungen zusammenfällt, sind sie deutlich zu erkennen.

Von den in letzter Zeit bemerkten Störungen mögen nur einige angeführt werden. So liefert die am 8. Mai 1902 auf der Insel Martinique eingetretene Katastrophe ein charakteristisches Beispiel. Während die magnetischen Kurven an den vorhergehenden Tagen völlig ruhig verlaufen, zeigen sie am 8. Mai Mittag 12 Uhr 44 Min. (Mittl. Münchener Ortszeit) einen plötzlichen Ausschlag, womit eine etwa zwei Tage andauernde Störungsperiode beginnt. Die Zeit dieses Ausschlages berechnet sich auf 7 Uhr 53 Min. Vormittag der Ortszeit von St. Pierre auf Martinique. Nach den Berichten blieb die Uhr des Hospitals der zerstörten Stadt 10 Minuten vor 8 Uhr Vormittag stehen, welche Zeit sehr gut mit der hier beobachteten übereinstimmt.

Eine ähnliche Störung fand am 26. Januar 1903 statt, welche in Zusammenhang mit dem Erdbeben der Rheinpfalz zu bringen ist. Die erste Störung wurde um 9 Uhr 57 Min. Vormittag M. E. Z. bemerkt, dabei nahm die Horizontalintensität um 8 γ zu, die Deklinationsnadel machte einen kleinen Ausschlag nach Westen von 0,1′. Sehr starke Ausschläge sind dann abends nach 8 und nach 11 Uhr und am 27. Januar früh gegen 1 Uhr aufgezeichnet, wobei die Deklination Schwankungen bis zu 10′, die Horizontalintensität bis 50 γ machte.“

Karte des „Bayerisch-Böhmischen Erdbeben-Erschütterungsgebietes vom 26. November 1902.“

Angefertigt von J. Knett und Dr. Jos. Reindl.



Nachtrag zu dem Aufsatz über Mittelwertssätze für bestimmte Integrale.

Von Hermann Brunn.

(Eingelaufen 7. März.)

1. Der Satz des ersten Kapitels meiner vorigen Arbeit[1]) ist, wie ich von Herrn Hurwitz erfahre, nicht neu, sondern bereits von F. Franklin aufgestellt worden[2]) als Verallgemeinerung eines Tschebyschewschen Satzes,[3]) der sich nur durch das Beschränktbleiben der Integralgrenzen auf die Werte 0 und 1 von ihm unterscheidet.

2. Der kurze Franklinsche Beweis durch Ausführung des Doppelintegrals in der leicht zu erhärtenden Ungleichung

$$\text{I)} \qquad \int_a^b \int_a^b [f(x) - f(y)]\,[g(x) - g(y)]\, dx\, dy \gtrless 0$$

($>$ für isotone, $<$ für anisotone Funktionen $f(x)$, $g(x)$; $b > a$) scheint auf den ersten Blick meinen umständlicheren völlig in den Schatten zu stellen. Er trägt indessen doch mehr den Charakter eines zufällig glückenden, sehr eleganten Kunstgriffes, versagt bei den Sätzen des dritten Kapitels meiner Arbeit und beweist bei genauerem Zusehen weniger als der meinige.

---

1) Neue Mittelwertssätze für bestimmte Integrale s. diese Sitz.-Berichte, Bd. XXXII, 1902, pag. 91 ff., fernerhin zitiert mit N. M.

2) Americ. Journ. of Math. Vol. VII, pag. 377.

3) Hermite, Cours litographié.

3. Zur Bündigkeit des Franklinschen Beweises ist das Erfülltsein einer der beiden Gleichungen:

$$\text{II)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{sgn}[f(x)-f(y)] &= \operatorname{sgn}[g(x)-g(y)] \\ \operatorname{sgn}[f(x)-f(y)] &= -\operatorname{sgn}[g(x)-g(y)] \end{aligned}$$

erforderlich für das ganze zweidimensionale Wertgebiet

$$a \leqq x \leqq b, \quad a \leqq y \leqq b,$$

zur Bündigkeit des meinigen hingegen nur das Bestehen einer der beiden Gleichungen

$$\text{III)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{sgn}[f(x)-f_m] &= \operatorname{sgn}[g(x)-g(x_m)] \\ \operatorname{sgn}[f(x)-f_m] &= -\operatorname{sgn}[g(x)-g(x_m)] \end{aligned}$$

für die einfache Wertmannigfaltigkeit

$$a \leqq x \leqq b.$$

In diese Form lassen sich die in meinem Aufsatz bei III) angegebenen und die für das Zustandekommen von V) dort erforderlichen Bedingungen, und zwar gleich für all die verschiedenen Verlaufsmöglichkeiten bei $f(x)$ und $g(x)$, zusammenfassen.

Dabei bedeutet f_m den Mittelwert der $f(x)$

$$\text{IV)}\qquad f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

x_m den (später jeden) Wert, welcher $f(x_m) = f_m$ macht oder wenigstens eine der beiden Ungleichungen

$$\text{V)}\qquad \begin{aligned} f(x_m-\varepsilon) \geqq f_m \geqq f(x_m+\delta) \\ f(x_m-\varepsilon) \leqq f_m \leqq f(x_m+\delta) \end{aligned}$$

erfüllt für beliebige positive ε und δ, welche $x_m - \varepsilon$ und $x_m + \delta$ innerhalb des Integrationsintervalls belassen.

Mit andern Worten:

4. Die durchgehende Monotonie der Funktionen ist eine hinreichende, aber, worauf ich im vorigen Aufsatz noch nicht hingewiesen habe, durchaus nicht notwendige Bedingung für die Giltigkeit des Satzes

$$\text{VI)} \qquad \int_a^b f(x)\, g(x)\, d\,x \gtrless \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, d\,x \int_a^b g(x)\, d\,x.$$

Es kommt vielmehr, geometrisch gesprochen, allein auf das Verhalten der Kurven F und G:

$$y = f(x) \qquad \text{und} \qquad y = g(x)$$

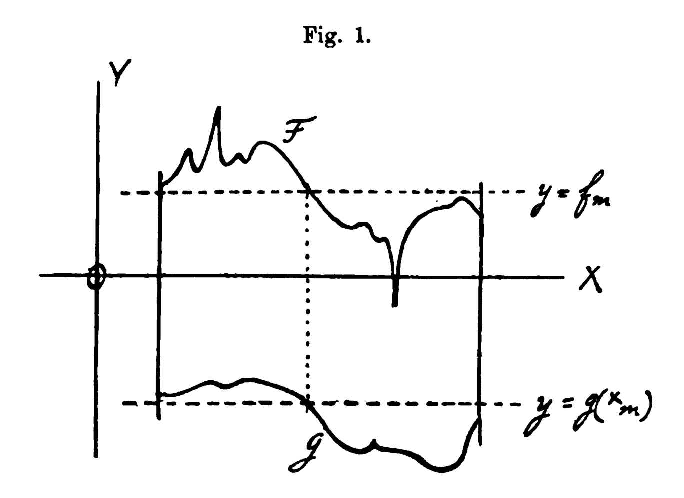
gegenüber den zwei Geraden

$$y = f_m \qquad \text{und} \qquad y = g(x_m)$$

an.

5. Wenn G die Gerade $y = g(x_m)$ nur an der (später werden wir sagen: an den) Stelle(n) überschreitet oder überspringt, wo F die Gerade $y = f_m$ überschreitet oder überspringt, so ist die Geltung des Satzes schon gewährleistet. Also beispielsweise dürften die Kurven folgende Gestaltung haben:

Fig. 1.



6. Auch **Franklin** bemerkt, dass **Tschebyschews** Satz einen etwas weitern Anwendungsbereich habe, als die monotonen Funktionen, insofern es nur auf die Erfüllung der Ungleichung I) ankommt. Aber seine Verallgemeinerung hat mit der soeben angedeuteten nichts zu tun, welche vielmehr eine Verallgemeinerung sowohl des enger als des weiter gefassten **Tschebyschew-Franklin**schen Satzes mit sich bringt.

7. Um dies völlig klar zu stellen, müssen wir genauer darlegen, welcherlei Beschränkung die Franklinsche Bedingung den Gestalten von F und G auferlegt. Die Kurven brauchen nicht monoton zu sein, können auf- und absteigen und ein und dieselbe X-Parallele an mehr als einer Stelle überschreiten. Aber:

Wenn von der Kurve F beliebige Punkte $a_1, a_2, a_3 \ldots$ auf der einen, beliebige andere $b_1, b_2, b_3 \ldots$ auf der andern Seite einer X-Parallelen P liegen, so existiert auch immer (mindestens) eine X-Parallele P', welche die entsprechenden G-Punkte $a'_1, a'_2, a'_3 \ldots$ auf der einen, $b'_1, b'_2, b'_3 \ldots$ auf der andern Seite[1]) liegen hat.

Beweis:

8. Wenn auf P ein F-Punkt p liegt, so ist die gewünschte Gerade P' die durch den entsprechenden G-Punkt p' gehende X-Parallele.

Bezeichnet man die Ordinaten von Punkten einen Augenblick durch den Punktbuchstaben selbst, so gilt nach Franklins Voraussetzung:

VII) $\operatorname{sgn}(a_i - p)(a'_i - p') = \operatorname{sgn}(b_k - p)(b'_k - p')$, ev. ambig;

da aber nach einer unserer Vorannahmen

VIII) $$\operatorname{sgn}(a_i - p) = -\operatorname{sgn}(b_k - p),$$

so muss auch

IX) $$\operatorname{sgn}(a'_i - p') = -\operatorname{sgn}(b'_k - p'), \text{ ev. ambig}$$

sein, d. h. a'_i und b'_k liegen zu verschiedenen Seiten von P'.[1])

Ganz ähnlich schliesst man aus VII) und

X) $$\operatorname{sgn}(a_i - p) = \operatorname{sgn}(a_k - p), \quad \text{dass}$$

XI) $$\operatorname{sgn}(a'_i - p') = \operatorname{sgn}(a'_k - p'), \text{ ev. ambig}$$

ist, dass also a'_i und a'_k auf der nämlichen Seite von P' liegen[1]) etc.

P' trennt also, wie verlangt, die beiden Punktgruppen $a'_1, a'_2, a'_3 \ldots$ und $b'_1, b'_2, b'_3 \ldots$. [1])

---

[1]) Wobei die Lage auf P' selbst noch für zulässig gilt.

9. Wenn auf P kein F-Punkt liegt, was bei den für die Kurve F zulässigen Unstetigkeiten möglich ist, so müssen zwei X-Parallele Q und R existieren, welche P, aber keinen F-Punkt zwischen sich einschliessen, und welche die der Geraden P beiderseits zunächst liegenden F-Punkte enthalten, oder wenigstens je einen Grenzpunkt, dem sich die Kurve F annähert.

10. Auf jeden Fall lassen sich denselben zwei X-Parallele Q' und R' mittels G zuordnen. Die Zuordnung ist klar, sobald Q und R nur je einen einzigen Punkt von F enthalten; enthalten sie mehr, so wählt man von den durch die entsprechenden G-Punkte gezogenen Q' und R' die „innersten", ev. die Grenzgeraden, welchen diese Q' und R' nach innen zu sich nähern. Im Falle aber eine der Geraden, etwa Q, nur einen Grenzpunkt enthält, lässt sich auf F — das sich dem Q möglicherweise nicht monoton annähert — eine ins Unendliche laufende Reihe von Punkten $l_1, l_2, l_3 \ldots$ angeben, deren Ordinaten monoton sich der Ordinate von Q annähern, und denen auf G Punkte $l'_1, l'_2, l'_3 \ldots$ mit ebenfalls monoton sich ändernden Ordinaten entsprechen. Bei einem zwischen endlichen Grenzen vorausgesetzten Verlauf der eindeutig auf einander bezogenen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ müssen die Ordinaten l' sich ebenfalls einem bestimmten Grenzwert, die Punkte l' also sich einer bestimmten X-Parallele Q' annähern.

Ebenso würde man, wenn R eine Grenzgerade wäre, zwei zu den l und l' analoge Punktreihen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ und $m'_1, m'_2, m'_3 \ldots$ finden, durch deren zweite ein R' bestimmt wird.

11. Zunächst sei gezeigt, dass zwischen Q' und R' kein G-Punkt n' liegen kann. Liegen auf Q' und R' G-Punkte, so würde n' einen F-Punkt n zwischen Q und R, oder auf Q oder R fordern, was auf Widersprüche gegen Annahmen bei 9. oder 10. führt. Sind Q' und R' als Grenzlinien bestimmt, so schliesst man:

12. Da n' sowohl von Q' als R' eine endliche Entfernung haben würde, so müsste es sicher zwischen den durch l'_λ und m'_μ gezogenen X-Parallelen liegen für jedes λ, bezw. μ, das grösser als eine hinlänglich gross gewählte Zahl λ_0, bezw. μ_0,

ist. Dann müsste aber auch n zwischen den entsprechenden Parallelen durch l_λ und m_μ oder auf denselben liegen. Hieraus folgt, dass n nicht ausserhalb des Streifens QR liegen kann, sondern nur innerhalb desselben oder auf einem Rande, was aber beides gegen zu Grunde gelegte Annahmen verstösst; ein n' kann somit zwischen Q' und R' nicht existieren.

13. Wenn Q' einen G-Punkt enthält, R' keinen, so ergibt sich durch die nämlichen Schlüsse, dass ein F-Punkt zwischen Q und R oder auf R selbst liegen müsste, was wieder gegen die Vorannahmen verstösst.

Es kann also in keinem Falle ein G-Punkt zwischen Q' und R' liegen.

14. Mit genau den nämlichen Beweismaterialien, was auszuführen wohl mehr ermüdend als nötig sein dürfte, zeigt man nun weiter, dass F-Punkten zu verschiedenen oder zu gleichen Seiten des Bandes QR stets G-Punkte zu verschiedenen, bezw. gleichen Seiten des Bandes $Q'R'$ entsprechen.

15. Ordnet man nun der Geraden P, die innerhalb des Bandes QR liegt, irgend eine in das Band $Q'R'$ hineinfallende X-Parallele P' willkürlich zu, so ist auch klar, dass F-Punkten zu verschiedenen oder gleichen Seiten von P immer Q-Punkte zu verschiedenen resp. gleichen Seiten von P' entsprechen.

Es ist also, auch wenn P die Kurve F nicht schneidet, die Auffindung einer unsern Wünschen entsprechenden Geraden P' gelungen. Bemerkt sei noch, dass Q mit R, Q' mit R' zusammenfallen kann und zwar eins unabhängig vom andern.

16. Somit ist durch die Franklinsche Bedingung für jede zu X parallele Transversale von F diejenige Eigenschaft nachgewiesen, welche mein Beweis — wie man sich bei genauer Nachkontrole überzeugen mag — nur von einer einzigen Geraden $P\,(y = f_m)$ fordert.

17. Es genügt zur Geltung des Satzes

$$\text{XII)} \quad \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx \quad [1]$$

[1]) N. M. XVII).

vollkommen, dass sämtlichen $f(x) > f_m$ lauter Werte $g(x) \geq \gamma$ (oder lauter Werte $g(x) \leq \gamma$), sämtlichen Werten $f(x) < f_m$ lauter Werte $g(x) \leq \gamma$ (bezw. lauter Werte $g(x) \geq \gamma$) entsprechen.[1])

18. γ ist geometrisch gedeutet die Ordinate von P', p ist jetzt zu definieren durch

XIII) $$p = (b - a)(f(a) - f_m)(g(a) - \gamma)$$

oder, falls $f(a) - f_m$ oder $g(a) - \gamma$ zufällig Null sein sollten, durch

XIV) $$p = (b - a)(f(x) - f_m)(g(x) - \gamma),$$

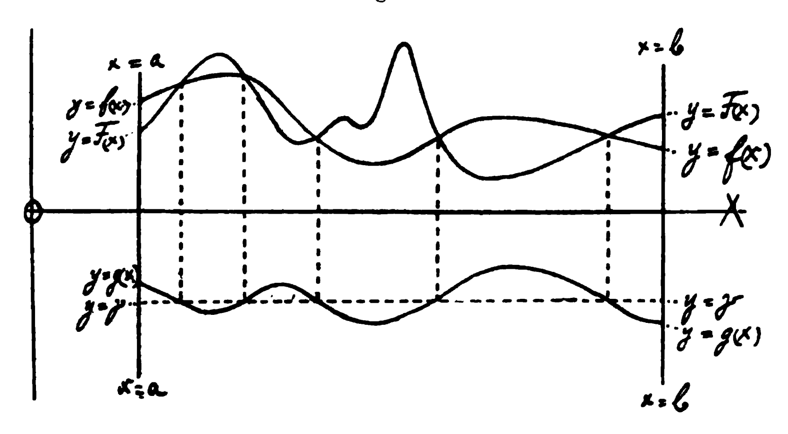
wo x ein beliebiger Wert im Intervall sein darf.

19. Ähnlich lassen sich die Bedingungen für die Geltung des Hauptsatzes im 3. Kapitel meiner Arbeit:

XV) $$\operatorname{sgn} p \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$ [2])

in folgender Weise erweitern:

Fig. 2.



[1]) $f(x)$ und $g(x)$ sollen nicht völlig konstant, genauer: es soll nicht im ganzen Intervall

$$\int_a^x f(x)\, dx = \int_a^x c \cdot dx, \quad \int_a^x g(x)\, dx = \int_a^x c'\, dx \quad \text{sein.}$$

[2]) N. M. XL).

Wenn $F(x)$, $f(x)$, $g(x)$ eindeutige, endliche Funktionen sind, wenn ferner $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ist und schliesslich für alle Werte x, wo die Kurve $y = F(x)$ die Seite der Kurve $y = f(x)$ wechselt, und nur für diese Werte x auch die Kurve $y = g(x)$ die Seite einer bestimmten Geraden $y = \gamma$ wechselt, so gilt der Satz (Beispiel siehe in Fig. 2).[1])

Unter p ist zu verstehen:

XVI) $$p = (b - a)\,(F(x) - f(x))\,(g(x) - \gamma),$$

wo für x irgend ein Wert, der keinen der Faktoren zu Null macht, etwa auch eine der Grenzen a und b eingesetzt werden darf.

20. Obwohl die Beweise nicht auf den Fall zugespitzt sind, dass $y = f(x)$ und $y = f_m$, $y = F(x)$ und $y = f(x)$ unendlich viele gegenseitige Schnitte oder Ueberschreitungen aufweisen, so dürften sich die Sätze doch auch für diese Annahme aufrecht erhalten lassen, worauf wir nicht näher eingehen.

---

[1]) Die ambigen Fälle, wo $y = g(x)$ die Gerade nur erreicht und an ihr eine Strecke entlang läuft, sind in dem für die Geltung des Satzes günstigen Sinne auszulegen. — $F(x)$ und $f(x)$ sollen nicht völlig identisch, genauer: es soll nicht im ganzen Intervall $\int_a^x F(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$ sein.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

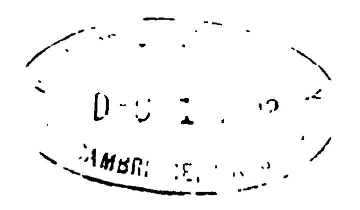
K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1903. Heft II.

München.
Verlag der K. Akademie.
1903.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 2. Mai 1903.

1. Herr Richard Hertwig legt eine Abhandlung des korrespondierenden Mitgliedes, Herrn Professor Dr. Otto Bütschli in Heidelberg: „Interessante Schaumstrukturen von Dextrin- und Gummi-Lösungen“ vor.

2. Herr Paul v. Groth überreicht eine Abhandlung des Herrn Professor Dr. Ernst Weinschenk: „Beiträge zur Petrographie der östlichen Zentralalpen, speziell des Gross-Venedigerstockes (Abteilung III).“ Dieselbe wird in den Denkschriften erscheinen.

Interessante Schaumstrukturen von Dextrin- und Gummilösungen.

Von **O. Bütschli.**

(*Eingelaufen 8. Mai.*)

Die Bildung mikroskopisch-feiner Schaumstrukturen bei einfachem Eintrocknen gewisser Lösungen habe ich schon 1898 in meinem Werk „Über Strukturen“ beschrieben. Grade diese Entstehung solcher Mikrostrukturen schien mir von besonderer Wichtigkeit, sowohl für die Beurteilung der Bildung derartiger Strukturen in Produkten des Organismus als auch für das Auftreten ähnlicher Mikrostrukturen in der anorganischen Natur. 1898 konnte ich als Beispiele für das Entstehen schaumiger Mikrostrukturen durch einfaches Eintrocknen nur aufführen: einmal Kollodiumlösung, also Kollodium gelöst in einem Gemisch von Alkohol und Äther (s. p. 59. 1898) und alkoholische Schellacklösung (s. p. 78 ff.). In beiden Fällen werden dünne Schichten dieser Lösungen, die auf den Objektträger gestrichen sind, beim Eintrocknen in ihrer ganzen Masse oder in einzelnen Partien äusserst feinschaumig. — Wie gesagt, scheint mir diese höchst einfache und direkte Entstehung einer solchen Mikrostruktur für die allgemeine Beurteilung derartiger Strukturen sehr wichtig. Deshalb war es mir auch besonders interessant, in letzterer Zeit bei Gelegenheit von Untersuchungen über stärke- und dextrinartige Körper ein weiteres Beispiel zu finden, gleichzeitig ein solches, das sich sehr leicht und bequem vorführen lässt. Bei Untersuchungen über gewisse käufliche Dextrine (Dextrin. purissim. alcohol

praecipit. und Gommelin von Merck) fiel mir auf, dass dieselben sowohl bei Behandlung mit heissem wie kaltem 65% bis 75% Alkohol grösstenteils in eine sehr zähflüssige schmierige Masse verwandelt werden, d. h. in eine sehr zähflüssige dicke Lösung von Dextrin in Wasser und Alkohol. An dieser Lösung beobachtete ich nun, wie zu erwarten, erstens, dass sie bei Behandlung mit sehr starkem Alkohol (95—100%) sofort unter Entmischung feinschaumig erstarrt (gerinnt), ganz in derselben Weise, wie ich dies schon 1898 für viele konzentrierte kolloidale Lösungen nachgewiesen habe; zweitens jedoch, dass auch in Tropfen dieser zähen Dextrinlösung, die auf dem Objektträger eintrocknen, eine prächtige feine Schaumstruktur auftritt. Die Tropfen werden erst trüb, dann schliesslich kreideweiss, indem sie zu einem gaserfüllten feinen Schaum eintrocknen.

Fällt man wässrige Dextrinlösungen mit Alkohol, so scheidet sich das Dextrin bekanntlich ebenfalls in Form sehr zähflüssiger wasserarmer Tröpfchen aus, die sich an den Glaswänden festsetzen. Diese Tröpfchen sind eine entsprechende wasserarme und alkoholhaltige, zähe Dextrinlösung und zeigen deshalb auch im allgemeinen die gleiche Schaumbildung bei der Behandlung mit starkem Alkohol und beim Eintrocknen.

Eine zu Versuchen geeignete solche Lösung erhält man am einfachsten, wenn man reines Dextrin mit 70% Alkohol in einem Röhrchen überschichtet. In etwa 24 Stunden ist es durch Wasser- und Alkoholaufnahme zu der zähflüssigen Lösung unter dem Alkohol zerflossen. Ganz ebenso verhält sich jedoch auch Gummi arabicum. Schon 1898 (p. 50) beobachtete ich, dass man bei vorsichtigem Zusatz von Alkohol zu einer wässrigen Gummilösung nach längerem Stehen einen zähflüssigen tropfigen Bodensatz erhält, d. h. eine Lösung von viel Gummi mit wenig Wasser und Alkohol, die bei Zusatz von starkem Alkohol sofort prachtvoll schaumig gerinnt. Ob diese Lösung, wie sehr wahrscheinlich, auch schaumig eintrocknet, wurde damals nicht geprüft.

Wenn man aber, wie ich im Anschluss an die Befunde

an der Dextrinlösung prüfte, einige Gummistückchen mit 65—70% Alkohol behandelt, so zerfliessen auch sie in etwa 24 Stunden zu einer solch dicken Lösung, die sich ganz ebenso verhält wie die Dextrinlösung und noch geeigneter für die Versuche ist, da sie feinere und schönere Strukturen ergibt als jene.

Das Trübwerden der eintrocknenden Tropfen beginnt fast augenblicklich nach dem Herausnehmen auf dem Objektträger; bei grösseren Tropfen dauert es aber etwas längere Zeit, bis sie durch und durch schaumig und kreideweiss geworden sind. Bei feinen Fäden dagegen, wie man sie aus den zähen Lösungen leicht mit der Nadel ausziehen kann, ist die Schaumstruktur in sehr kurzer Zeit völlig entwickelt. Grade das Studium solcher Fäden ist von grossem Interesse.

Wie gesagt, werden die Dextrinschäume in der Regel etwas gröber als diejenigen des Gummi; besonders im Inneren grösserer Tropfen oder dickerer Fäden wird die Struktur der ersteren etwas gröber als oberflächlich, was leicht erklärlich, da die minutiös kleinen Schaumbläschen, welche schon zu einer Zeit auftreten, wenn die Lösung noch sehr zähflüssig ist, im Inneren Zeit haben mehr oder weniger zu gröberen zusammenzufliessen, indem das Innere grösserer Tropfen oder dickerer Fäden langsamer erstarrt. Bei der Bildung dieser Eintrocknungsschäume ist es fast allgemeine Regel, dass sehr dünne Schichten der Lösung oder besonders fein ausgezogene Fäden homogen glasartig eintrocknen, d. h. ohne eine wahrnehmbare Struktur. Diese Eigentümlichkeit zeigt sich entsprechend auch beim Eintrocknen dickerer Schichten, Tropfen und Fäden darin, dass eine oberflächliche Schichte oder eine Randzone nicht schaumig, sondern homogen erstarrt. — Dieselbe Erscheinung tritt jedoch, wie ich schon 1898 mehrfach erörterte, auch bei schaumiger Gerinnung dicker kolloidaler Lösungen meist hervor und wiederholt sich ebenso bei den hier besprochenen Lösungen gewöhnlich, wenn sie durch starken Alkohol zu schaumiger Gerinnung gebracht werden. In solchen Fällen ist jedoch, was ich auch schon früher erörterte, fast stets zu beobachten, dass die innere deutliche Schaumstruktur gegen die homogene Aussenzone

feiner und feiner wird und schliesslich die Grenze der Sichtbarkeit erreicht. Aus diesem Grunde bleibt daher die Möglichkeit, ja Wahrscheinlichkeit bestehen, dass auch die anscheinend homogene Aussenregion schaumig strukturiert ist, jedoch so fein, dass die Struktur unter die Grenze des mikroskopisch Wahrnehmbaren herabgeht. Bevor ich auf die Einzelheiten, namentlich der Struktur der Fäden ein wenig eingehe, möge das Entstehen der Struktur unter den angegebenen Verhältnissen kurz erörtert werden, soweit dies zur Zeit möglich erscheint.[1]) Die nächstliegende Vorstellung, welche auch mir anfänglich zweifellos erschien, wäre die, dass beim Eintrocknen ein Entmischungsprozess der Lösung auftritt, ähnlich wie bei der Gerinnung kolloidaler Lösungen durch Alkohol oder sonstige Gerinnungsmittel, dass also diese Schaumstrukturen ganz ebenso zu beurteilen seien wie jene echter Gerinnungsschäume. Bei näherer Überlegung aber scheint eine solche Deutung kaum durchführbar. — Auch ohne genauere quantitative Untersuchung[2]) unterliegt es keinem Zweifel, dass die eintrocknende Lösung aus Gummi (resp. Dextrin), Wasser und Alkohol zusammengesetzt ist. Bei der Verdunstung muss doch sicherlich der Alkohol am schnellsten entweichen, die Lösung also wasserreicher werden. Unter diesen Umständen wäre jedoch kein Grund für das Eintreten eines gewöhnlichen Entmischungsprozesses einzusehen. Gegen einen solchen spricht aber auch folgender Umstand. Die mikroskopische und makroskopische

[1]) Ich möchte hervorheben, dass ich diese Mitteilung als eine vorläufige anzusehen bitte, da es mir vorerst nicht möglich war, die fraglichen Vorgänge so eingehend wie notwendig zu untersuchen. Die genaue Beurteilung derselben erfordert eine systematischere Erforschung, zu der ich die Zeit bis jetzt noch nicht gefunden habe. Da der Gegenstand jedoch viel Interesse besitzt und namentlich ein prachtvolles Beispiel für feinste Schaumstrukturen bietet, das sehr leicht zu beschaffen ist, glaubte ich auch jetzt schon eine Mitteilung darüber veröffentlichen zu sollen.

[2]) Dieselbe wäre jedenfalls auszuführen um festzustellen, wieviel Wasser und Alkohol diese zähen Lösungen enthalten, was für ihre Beurteilung sehr wichtig erscheint.

Erscheinung der Schaumstruktur lässt nicht den geringsten Zweifel darüber, dass die Schaumbläschen oder -Waben mit Gas angefüllt, resp. leer sind. Sind in dem Schaum Luftblasen eingeschlossen, so stimmen diese in ihren Brechungsverhältnissen so genau mit dem Inhalt der Schaumbläschen überein, dass derselbe ebenfalls nur Gas sein kann. Es treten ferner die Schaumbläschen beim Eintrocknen der Dextrinlösung sofort in dieser Beschaffenheit hervor, d. h. als ganz schwach lichtbrechende Gebilde, nicht anfänglich stärker lichtbrechend und erst bei weiterer Eintrocknung schwach lichtbrechend werdend, wie etwa bei Gerinnungsschäumen. Es ist daher auch wenig wahrscheinlich, dass die Bläschen der Dextrinlösung ursprünglich mit Flüssigkeit gefüllt sind und erst durch deren Verdunsten nachträglich gas- oder lufthaltig werden. Untersucht man die schön strukturierten eingetrockneten Fäden von Dextrin oder Gummi bei vorsichtigem Zusatz von Wasser, das stark mit Luft geschüttelt worden war, so beobachtet man, dass die Fäden quellen und sich schliesslich lösen, wobei die Struktur, unter Verkleinerung und Schwinden der Bläschen, völlig erlischt ohne Bestehenbleiben von Luftbläschen. Hieraus folgt also, dass die Wabenräume von Gas (Wasserdampf, Alkoholdampf) erfüllt sind.

Das Bemerkte spricht nun dafür, dass das Entstehen dieser Schaumstruktur nicht auf einem Entmischungsprozess im gewöhnlichen Sinne beruht, sondern dass es in prinzipiell anderer Weise verläuft, worüber ich mir zur Zeit etwa folgendes denke.

Beim Eintrocknen erstarrt zuerst und sehr rasch eine äussere dünne Schicht der Tropfen oder Fäden und zwar, soweit sichtbar, homogen, was jedenfalls eine Folge der Schnelligkeit des Verdunstens und Erstarrens ist. Dass tatsächlich eine rasche äussere Erstarrung eintritt, kann man daraus entnehmen, dass bei der Untersuchung eines halberstarrten Tröpfchens der Dextrinlösung die äussere Zone schon fest und brüchig ist, während das Innere noch zähflüssig weich erscheint. Wenn nun die äussere erstarrte Zone genügende Starrheit und Festig-

keit erlangt hat, so setzt sie der Volumverminderung des Tropfens, die bei weiterem Verdunsten eintreten muss, einen kräftigen Widerstand entgegen. Infolge dessen vermag sich der Tropfen nicht mehr als Ganzes zusammenzuziehen, vielmehr treten mit der Volumverkleinerung seiner inneren Masse zahlreiche kleine, mit Dampf gefüllte Bläschen auf, der Tropfen wird durch und durch feinschaumig. Man wird nun aber, und wie ich glaube mit Recht, gegen diese Deutung des Vorgangs einwenden, dass, wenn auch die Bedingungen als richtig zugegeben werden, daraus doch nicht folge, dass sich eine Unmasse kleinster dampfgefüllter Hohlräumchen entwickeln, sondern dass wahrscheinlicher wenige oder ein ansehnlicher derartiger Hohlraum entstehen müssten. Dergleichen habe ich ja auch früher beim Eintrocknen grösserer Gelatinekugeln tatsächlich beobachtet (s. 96, p. 4, 98, p. 175). Es erhebt sich daher die Frage, ob die Ausbildung einer solchen Schaumstruktur nicht darauf hinweise, dass schon in der zähen Lösung eine solche vorhanden ist, nur zu fein, um optisch sichtbar zu werden, und ob die dampfgefüllten Schaumbläschen, die beim Eintrocknen entstehen, sich von jenen mit Flüssigkeit erfüllten Schaumbläschen herleiten, deren Flüssigkeit beim Eintrocknen verdunstet, während gleichzeitig beim Erstarren der Wände die Hohlräumchen sich erweitern und unsichtbar werden.

Man ist bekanntlich geneigt, die kolloidalen Lösungen als sehr feine Emulsionen aufzufassen, und ich stimme dieser Ansicht durchaus zu, nur mit der Erweiterung, dass ich in dieser Beschaffenheit der kolloidalen Lösungen keinen prinzipiellen Gegensatz zu den gewöhnlichen Lösungen finden möchte, vielmehr der Meinung bin, dass auch letztere äusserst feine Emulsionen des gelösten Körpers in dem Lösungsmittel sind. Hierzu bestimmt mich die Erfahrung, dass zwischen den kolloidalen und den gewöhnlichen Lösungen keine scharfe Grenze besteht, sondern ein allmählicher Übergang. Wenn diese Auffassung zutrifft, so muss bei jeder Auflösung eine äusserst feine emulsive Verteilung des sich lösenden Körpers in dem Lösungsmittel eintreten, und dies setzt voraus, dass das Lösungsmittel die

Eigenschaft hat, den sich lösenden Körper zu verflüssigen. Dass der gelöste Körper in der Lösung im flüssigen Zustand vorhanden ist, dafür spricht die Erfahrung, dass es vielfach gelingt, sowohl bei Verdunsten oder Fällen der Lösung den gelösten Körper in Form überschmolzener flüssiger feinster Tröpfchen zu erhalten, die früher oder später als sog. Globuliten erstarren. Alle Gerinnselbildungen bauen sich aus der Verwachsung oder teilweisen Verschmelzung derartiger feinster, anfänglich flüssig abgeschiedener Tröpfchen auf, gleichviel ob es sich um anorganische oder organische Körper handelt.

Wenn nun eine kolloidale Lösung eine Emulsion ist, so muss auch die zähe dickflüssige Dextrin- oder Gummilösung eine Emulsion sein, aber im Gegensatz zu der wässrigen Lösung eine Emulsion alkoholischer Tröpfchen[1]) in einer flüssigen Dextrin- oder Gummimasse, nicht eine Emulsion flüssiger Dextrin- oder Gummitröpfchen in Wasser. Ich lasse dabei dahingestellt, ob die flüssige Dextrin- oder Gummimasse als reines verflüssigtes Dextrin oder Gummi anzusehen ist, oder ob man an eine Hydratbildung oder dergl. denken kann. Dextrin ist sehr hygroskopisch, zerfliesst über Wasser zu einer zähen Lösung und ganz ebenso verhält sich das von mir untersuchte Gummi arabicum.

Auf grund dieser Betrachtung würden wir also ebenfalls zu der Anschauung geführt, dass die zähe Dextrin- oder Gummilösung einen äusserst feinschaumigen Bau besitzen muss und dass dieser die Bedingung für die Bildung der gaserfüllten Schaumstruktur beim Eintrocknen sein kann.

Die alkoholische Dextrinlösung erscheint nun vor der Erstarrung bei Untersuchung mit starken Systemen ganz homogen und strukturlos. Verfolgt man ihr Schaumigwerden beim Eintrocknen unter dem Mikroskop, so macht der Vorgang, wie schon bemerkt, ganz den Eindruck eines Entmischungsprozesses. Zunächst tritt ein Nebel feinster Tröpf-

---

[1]) Resp. von Alkohol- und Wassertröpfchen, oder Tröpfchen feinster Wasseralkoholemulsion.

chen oder Bläschen auf (die Entscheidung, ob es sich um Flüssigkeitströpfchen oder Gasbläschen handelt, ist auf diesem Stadium wegen der Kleinheit der Elemente nicht wohl zu geben). Diese Tröpfchen oder Bläschen vergrössern sich durch Anwachsen und auch Zusammenfliessen und gehen endlich in die definitive Struktur über. Wie betont, konnte ich bei der Bildung der Dextrinschäume nichts davon wahrnehmen, dass die Struktur zuerst von Flüssigkeit erfüllt sei und erst nachträglich in den gaserfüllten Zustand übergehe.

Ganz anders verhält sich nun die zähflüssige alkoholische Gummilösung. Die Untersuchung dieser etwas trüben Lösung zeigte auf das Schönste, dass die Struktur schon völlig vorgebildet vorhanden ist, dass die Lösung also ein äusserst feiner und sehr zähflüssiger Schaum ist, dessen Waben von alkoholischer Flüssigkeit erfüllt sind. Bei dem Gummi lässt sich denn auch deutlichst verfolgen, wie die ursprünglich blässere, jedoch recht deutliche Struktur plötzlich viel schärfer und dunkler wird, indem der flüssige Wabeninhalt verdunstet und durch Gas ersetzt wird. Dieser feine Gummischaum ist höchst interessant, namentlich auch deshalb, weil seine Zähigkeit bewirkt, dass bei Zugwirkungen längs- und verworren-fibrilläre Strukturen in gradezu vorzüglichster Ausprägung sich entwickeln und erhalten. Dieser leicht beschaffbare Schaum ist daher als schönes Beispiel allen Denen zu empfehlen, welche das Bedürfnis empfinden sollten, sich eine solche Schaumstruktur einmal selbst zu betrachten.

Eine, wenn auch nur vorläufige, etwas genauere Verfolgung der näheren Bedingungen, unter welchen diese Gummischäume entstehen, ergab etwa folgendes. Wenn man einige Stückchen Gummi arabicum in dampfgesättigter Atmosphäre zerfliessen lässt, so erhält man eine zähe ganz klare Lösung, die sich auf dem Objektträger zu sehr schönen feinen Fäden ausziehen lässt, welche ganz homogen, ohne jede Andeutung von Struktur, erstarren. Behandelt man solche Fäden, die bei 55° einige Zeit getrocknet waren, mit 96% Alkohol, so schrumpfen sie ersichtlich und zerspringen vielfach; der 96%

Alkohol entzieht ihnen also noch Wasser unter Schrumpfung. Auch 90 % Alkohol wirkt ähnlich. 86 % Alkohol dagegen bewirkt schon ganz geringe Aufquellung; 80 % iger noch mehr und jetzt tritt in den Fäden schon eine äusserst feine und blasse Längsstreifung auf, sie werden längsfibrillär; doch sind zwischen den Fibrillen noch keine Querverbindungen zu erkennen. 77 % Alkohol lässt diese längsfibrilläre Struktur viel deutlicher hervortreten und 75 % iger zeigt die Struktur prachtvoll als längsfibrilläres feines Schaumwerk.

Im 75 % Alkohol tritt Verflüssigung des Gummis ein, was sich sowohl im Äusseren der Fäden vielfach klar zeigt, namentlich aber darin, dass das ursprünglich äusserst feine Schaumwerk, namentlich in sehr feinen Fäden, sich rasch vergröbert durch Zusammenfliessen der Schaumbläschen. Bei den dickeren Fäden oder grösseren Gummimassen tritt diese Vergröberung viel langsamer ein; doch hat sich auch ihre Struktur in 24 Stunden sehr vergröbert, so dass sie vielfach ganz grobvakuolär geworden sind. — Obgleich nun, wie gesagt, der 75 % Alkohol den Gummi verflüssigt, so wirkt er doch nicht eigentlich lösend auf ihn ein; die Konturen der verflüssigten Gummischäume bleiben immer ganz scharf. — Ich schalte hier ein, dass man ganz die gleichen feinstrukturierten Gummischäume erhält, wenn man kleine Partikelchen des natürlichen Gummi in 75 % Alkohol unter dem Deckglas aufstellt. Sorgfältiger Paraffinverschluss des Deckglases ist natürlich notwendig, damit der Alkohol nicht schwächer wird, was zu rascher Zerstörung der Schäume führt. — Bringt man nämlich zu fein strukturierten, in 75 % Alkohol befindlichen solchen Gummischäumen vorsichtig schwächeren Alkohol, so ruft schon 70 % iger, deutlicher 65 % iger, eine Zerstörung des Konturs der Schäume und der unterliegenden Schaumpartieen hervor. Der Schaum zerfällt in netzige Massen; wenn er schön fibrillär war, sogar in büschelig hervorstehende Fibrillenmassen, ja es können sich sogar Fibrillen isolieren und frei umherschwimmen. Massenhaft treten ferner feinste bis etwas gröbere Tröpfchen auf, die, wenn nicht allzufein, deutlich hohl, bläschenförmig

sind. Die ganze Erscheinung dürfte sich aus zwei zusammenwirkenden Einflüssen erklären lassen. Einmal dadurch, dass der 65 % Alkohol auflösend wirkt, d. h. die feinsten Schaumlamellen zerstört, namentlich die viel feineren Querlamellen zwischen den längsfibrillären Schaumkanten und -Lamellen, wodurch die letzteren isoliert werden und der Schaum überhaupt, unter Übergang in eine netzig-maschige spongiöse Struktur, in Bruchstücke zerfällt. Dazu trägt zweitens bei, dass der 65 % Alkohol stärker verflüssigend auf das Gummigerüst des Schaumwerks wirkt, was dessen Zerfall befördert.

Wenn wir uns der Ansicht anschliessen, dass die Lösung des Gummi überhaupt nur in einer feinsten Emulsionierung besteht, so fallen eigentlich die beiden angegebenen Wirkungen des 65 % Alkohols in eine zusammen, d. h. die von demselben hervorgerufene Verflüssigung ist der Grund, weshalb die feineren Lamellen zu feinsten Tröpfchen zerfallen, sich emulsionieren oder auflösen und die schwächeren Partieen des Schaums auf solche Weise allmählich vollständig zerstört werden. Die Flüssigkeit der Fragmente des Schaumwerks verrät sich dadurch, dass sie sich alle, wenn auch sehr langsam, zusammenziehen, sich tropfenartig abkugeln. Alle diese Tröpfchen sind, wenn sie nicht gradezu punktförmig klein erscheinen, deutlich hohl bläschenförmig, wenn grösser deutlich schaumig. Es scheint dies darauf zu beruhen, dass einerseits bei dem Zerfall des ursprünglichen Schaumes einzelne Waben isoliert werden können, andrerseits jedoch auch darauf, dass feinste Schaumbläschen des Gerüstwerks unter dem Einfluss des 65 % oder 50 % Alkohols anschwellen. Schliesslich zerfällt der Gummischaum endlich in eine Unsumme feinster bis gröberer solcher Tröpfchen, namentlich auch dann, wenn man durch Drücken auf das Deckglas den Schaum etwas misshandelt.

An derartig zerfallenem Schaum kann man gelegentlich noch weitere interessante Beobachtungen machen. Zuweilen haben die durch Zerfall entstandenen zähflüssigen, mehr oder minder schaumigen Tröpfchen selbst wieder grosse Neigung zusammenzufliessen. Bei ihrer grossen Zähflüssigkeit geschieht

dies jedoch sehr langsam. Sie legen sich zuerst zu globulitischen Aggregaten zusammen, die hierauf sehr langsam verschmelzen, wobei die Lückenräume zwischen den verschmelzenden Tröpfchen in die entstehende Gesamtmasse als von Flüssigkeit erfüllte Hohlräumchen eingeschlossen werden, wodurch von neuem ein wabig-schaumiger Bau entsteht. Da die Tröpfchen sich sehr gewöhnlich nicht direkt und dicht zusammenlegen, sondern zu netzig-maschigen Gerüsten, so gehen aus diesen durch successiven Zusammenfluss der Tröpfchen auch ganz schaumige Massen hervor. — Der geschilderte Vorgang erscheint insofern wichtig, als er das, was ich 1898 p. 141 ff. über die wahrscheinliche Entstehung sog. globulitisch-wabiger Strukturen bei der Fällung verdünnter oder auch konzentrierter Kolloidlösungen als wahrscheinlich vermutete, direkt erläutert. Die in verdünnten Lösungen durch die Wirkung des Fällungsmittels ausgeschiedenen feinsten flüssigen Tröpfchen (Globuliten) aggregieren sich langsamer oder rascher zu netzig-maschigen Gerinnselbildungen, die sich zu Boden senken. Bleiben die einzelnen Tröpfchen längere Zeit zähflüssig, so verschmelzen sie allmählich zu wabig-schaumig gebauten Massen; erstarren sie jedoch frühzeitig, so bleibt der Strukturcharakter maschig-spongiös. Dextrin- und andere Kolloidlösungen bleiben auch bei Zusatz von viel Alkohol häufig lange Zeit milchig getrübt ohne Neigung zu gerinnseliger Abscheidung und Klärung. In den meisten Fällen genügt es jedoch, die Flüssigkeit heftig zu schütteln oder umzurühren, um rasche flockige Abscheidung und Klärung hervorzurufen. Ich vermute, dass das Schütteln dabei einfach dadurch wirkt, dass die sehr zähflüssigen Tröpfchen mechanisch gegen einander geschleudert werden, unter teilweiser Verschmelzung zusammenkleben und sich so schliesslich grosse Flocken bilden.

Noch ein anderer Punkt scheint mir durch diese Erfahrungen über die Gummischäume eine gewisse Aufklärung zu erfahren. 1898 (p. 44 und p. 150) erörterte ich, dass bei der Gerinnung konzentrierter Kolloidlösungen durch verschiedene

Gerinnungsmittel sich in der Regel beobachten lässt, dass auch in der Gerinnungsflüssigkeit, in der Umgebung des gerinnenden Kolloids ein Nebel feiner bis feinster Tröpfchen (Globuliten) des Kolloids auftritt. Ich suchte dies damals so zu erklären, dass wahrscheinlich auch aus der Kolloidlösung eine schwache Lösung in die umgebende Flüssigkeit diffundiere und hier globulitisch ausgefällt werde. Jetzt scheint mir eine etwas andere Erklärung wahrscheinlicher.

Wenn z. B. starker Alkohol auf eine dicke Gummilösung wirkt, so wird er dieser Wasser entziehen und sich in der nächsten Umgebung des Gummi verdünnen. Hier werden also zunächst die Bedingungen gegeben sein, unter welchen die oberflächliche, schaumig gewordene Gummimasse in feinste Tröpfchen zerfällt. Erst allmählich wird die Gummilösung unter Wasserentziehung in einen Zustand übergehen, in dem der Gerinnungsschaum in dem nicht unter ca. 75—80 % verdünnten Alkohol ohne Zerfallserscheinungen sich sofort erhält. Auch bei der Gerinnung von Gelatinegallerten in 0,3 % Chromsäure dürfte Ähnliches im Spiele sein, also ein oberflächlicher Zerfall des Schaumwerks unter der Wirkung verdünnterer Chromsäure; doch bedarf grade dieser Vorgang erneuter Untersuchung unter dem veränderten Gesichtspunkt.

Auf Grundlage der im Vorstehenden mitgeteilten Erfahrungen beurteile ich nun zur Zeit das feinschaumige Eintrocknen der zähen alkoholhaltigen Dextrin- und Gummilösung in folgender Weise.

In der Gummilösung ist die Schaumstruktur schon vorgebildet vorhanden; es handelt sich demnach beim Eintrocknen nur um eine Gaserfüllung derselben. Vermutlich findet jedoch auch eine teilweise Vergröberung der Struktur, besonders im Innern dickerer Fäden oder Massen statt, indem der Alkohol etwas rascher verdunstet und deshalb eine stärkere Verflüssigung auftritt, welche das Zusammenfliessen der Schaumbläschen befördert. Wie aber entsteht die feinschaumige Struktur bei der Behandlung trockenen Gummis mit 75 % Alkohol? Wir sehen sie schon in 80 % Alkohol andeutungs-

weise hervortreten und in den Fäden stets in prächtig längsfibrillärer Ausbildung. Der letztere Umstand nun, sowie das erste Auftreten der Struktur als feine längsfibrilläre Streifung, ohne Andeutung von Schaumwaben, beweist meiner Meinung nach ganz bestimmt, dass die Struktur auch schon in den getrockneten Gummifäden vorhanden sein muss, nur so fein, dass sie sich der mikroskopischen Wahrnehmung entzieht. Denn Erklärungen wie die, dass die längsfibrilläre Schaumstruktur eine Folge der Spannung sei, welche in den getrockneten Fäden bestehe, sind unklare Vorstellungen, welche in keiner Weise das Entstehen der exquisit längsfibrillären Struktur begreifen lassen. Dagegen begreifen wir sie vollkommen unter der Voraussetzung, dass schon die klare dicke Gummilösung äusserst feinschaumig gebaut ist und daher notwendig bei dem Ausziehen fein längsfibrillär strukturierte Fäden liefern muss. Die Deutlichkeit, mit der schliesslich in dem 75 % Alkohol die Schaumstruktur, wenn auch äusserst fein, hervortritt, beruht jedoch aller Wahrscheinlichkeit nach noch auf einem besonderen Grund. Wir fanden, dass in dem 75 % Alkohol die ursprünglich ungemein feine Struktur sich durch Zusammenfliessen der Schaumbläschen allmählich vergröbert. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass auch schon die feine Schaumstruktur, wie sie in 75 % Alkohol hervortritt, eine Folge der beginnenden Vergröberung der ursprünglich unsichtbar feinen Struktur unter Verflüssigung der Gummimasse ist. Zur Vergröberung trägt ja auch, aber jedenfalls in geringem Grade, die Erweiterung der Hohlräumchen durch Aufquellen bei und ihr ist wohl sicher allein das erste Hervortreten der feinen längsfibrillären Struktur in den anfänglich ganz homogenen Fäden zuzuschreiben. Da jedoch, wie gesagt, die fortschreitende Vergröberung des Schaumwerks in 75 % Alkohol zu verfolgen ist, so macht dies die vorgetragene Vermutung sehr wahrscheinlich.

Was die Dextrinlösung angeht, so stelle ich mir den Vorgang des Eintrocknens für sie ähnlich vor. Auch sie ist wahrscheinlich von äusserst fein emulsiv-schaumigem Bau,

jedoch bedeutend flüssiger als die Gummilösung. Die Sichtbarkeit des emulsiven Baues tritt bei ihr erst auf, wenn unter dem oben erwähnten Einfluss äusserer Erstarrung Gasanfüllung der Bläschen, verbunden mit Vergröberung derselben durch Zusammenfliessen eintritt. Der Zusammenfluss rührt wohl auch hier von vorübergehender Vergrösserung des Wassergehalts bei dem Eintrocknen her. Immerhin bedarf grade die Dextrinlösung noch genauerer Erforschung, bevor ein bestimmtes Urteil über die Vorgänge in ihr gefällt werden kann.

Wie hervorgehoben, sind die Strukturen der eingetrockneten Gummilösung ganz besonders fein und schön, vor allem die der ausgezogenen Fäden. In diesen tritt die längsfibrilläre Anordnung der Schaumwaben so prachtvoll hervor, wie ich sie bis jetzt bei künstlich hergestellten, schaumig-strukturierten Fadengebilden noch nie beobachtete. Wie es in derartigen längsfibrillären Schaumstrukturen regelmässig der Fall ist, sind die Längsfibrillen, d. h. die längsgereihten Wabenwände viel dicker als die sie verbindenden Querwände; erstere treten deshalb viel schärfer und stärker hervor. Wird die Struktur daher sehr fein, so sind die Querwände äusserst blass und schwierig zu sehen. Man glaubt Fibrillen vor sich zu haben und nur eine sehr genaue Untersuchung lehrt deren Querverbindungen kennen. Gleichzeitig mit der längsfibrillären Struktur macht sich häufig noch eine feine Querstreifung bemerkbar. welche von mehr oder minder regelmässiger Querordnung der Wabenräume herrührt.

Ich betonte oben, dass in der Regel eine oberflächliche homogene Rinde der Fäden vorhanden ist. Eigentümlicher Weise kann diese jedoch einzelnen Fäden ganz fehlen und die Schaumstruktur bis zur Oberfläche reichen. Es ist dies besonders bei den Dextrinfäden häufiger der Fall. Bei den aus Gummi hergestellten scheint es bei der Untersuchung in Luft auch nicht selten so zu sein; beobachtet man aber die Fäden in Öl, das in das Schaumwerk nicht eindringt, so ergibt sich, dass auch diese Fäden eine dünne homogene Rinde besitzen, welche wegen des starken Randschattens in Luft nicht wahr-

nehmbar war. Bei den bis zur Oberfläche schaumigen Dextrinfäden ist einmal die Existenz eines schönen Alveolarsaumes der Oberfläche gelegentlich gut zu erkennen und zweitens, wenigstens zuweilen, auch eine kreuzstreifige Anordnung des Wabenwerks an der Oberfläche zu beobachten. Auch an den Gummifäden tritt Kreuzstreifung manchmal deutlich hervor. Im Innern der Fäden habe ich dagegen eine Kreuzstreifung nie gesehen. (Über kreuzstreifige Strukturen ausgezogener Fäden s. bei mir 98, p. 176 ff.)

Es ist überraschend, wie gross die Ahnlichkeit solcher Gummifäden mit gewissen Erzeugnissen des Organismus ist. Ich habe in neuerer Zeit, gemeinsam mit einem meiner Schüler, Herrn Schepotieff, die Mikrostruktur der Annelidenborsten untersucht. Die Strukturen dieser Kutikulargebilde sind denen der Gummifäden auffallend ähnlich; Kreuzstreifung, längsfibrilläre Bildung, Querstreifung, die äussere homogene Rinde wiederholen sich. Dass es sich jedoch nicht um Fibrillen handelt, wie dies seither allgemein angenommen wurde, zeigt vor allem das Querschnittsbild, auf dem ein sehr schönes Wabenwerk hervortritt. Jedoch lassen auch die Längsschnitte hie und da die sehr feinen Querwände zwischen den anscheinenden Fibrillen genügend deutlich erkennen. Dass die Borsten wie ähnliche Cuticularprodukte bei energischer Maceration in Fibrillen zerfallen, erklärt sich aus der Feinheit der Querwände, die deshalb von dem Macerationsmittel zuerst zerstört werden, was es überhaupt bedingt, dass ein Zerfall der Gebilde unter der lösenden Wirkung des Macerationsmittels stattfindet.

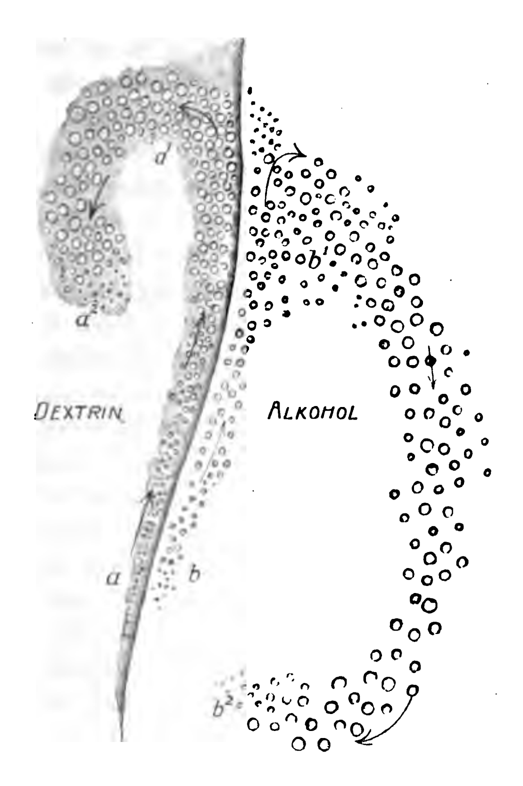
Bei Untersuchungen über die japanische Klebreisstärke und die Dextrine (s. 1903) machte ich noch eine weitere interessante Beobachtung, welche zur Erläuterung gewisser früherer Wahrnehmungen beitragen kann. Es betrifft dies die von Lehmann (88, I, p. 270) als sog. „halbe Tropfen" bezeichneten Gebilde. — Ich konnte schon 1898 in der durch Alkohol ausgefüllten zähflüssigen Gummilösung solch' halbe

Tropfen beobachten (98, p. 53); später sah ich beim Verdunsten einer Lösung von Schwefel im Schwefelkohlenstoff solch' halbe, aus flüssigem Schwefel bestehende Tropfen (1900, p. 38). Eine wässerige Lösung der sog. japanischen Klebreisstärke gibt bei vorsichtigem Zusatz von Alkohol eine mässige Trübung, die sich wie bei Dextrin in zähflüssigen Tröpfchen absetzt. Es handelt sich um eine wasser- und alkoholhaltige Lösung, analog den oben von Gummi und Dextrin beschriebenen, die denn auch durch Zufügen von äusserst wenig stärkerem Alkohol sofort schaumig entmischt wird. Werden nun solch' zähflüssige Tröpfchen in der alkoholischen Flüssigkeit, aus der sie gefällt wurden, aufgestellt und dann am Rande des Deckglases ein klein wenig Wasser zugegeben, so dass dies, vordringend, die alkoholische Zusatzflüssigkeit langsam verdünnt, so beobachtet man folgendes.

Der dem vordringenden Wasser zugewendete Kontur der zähflüssigen Tröpfchen der Klebreislösung wird allmählich verschwommener und schwindet schliesslich ganz, so dass halbe oder unvollständig begrenzte Tropfengebilde entstehen. Die Deutung dieser Erscheinung ist ja nicht schwer und auch von Lehmann an dem citierten Ort ganz richtig gegeben worden. Es handelt sich um in einseitiger Auflösung begriffene Tropfen; da, wo die wasserreichere Flüssigkeit den Tropfen berührt, geht er in Lösung über, sein Kontur schwindet; da jedoch der Alkoholgehalt der Flüssigkeit von dieser Stelle aus gegen das andere Tropfenende zunimmt, so ist dieses noch ganz intakt. — Ich hob schon 1900 (p. 38) hervor, dass, wenn diese Erklärung richtig ist, doch wegen der inhomogenen Oberflächenspannung solcher halber Tropfen Strömungserscheinungen an ihnen auftreten müssten, von denen ich aber damals gar nichts beobachtete.

Diese damals vermissten, von der Theorie geforderten Strömungen der halben Tropfen waren nun an den Klebreiströpfchen sehr schön zu beobachten. Da, wo der Kontur des Tropfens geschwunden ist, also Auflösung stattfindet, muss nach der Theorie die Oberflächenspannung gleich Null oder

doch am minimalsten sein; von hier aus wächst sie mit zuzunehmendem Alkoholgehalt der umgebenden Flüssigkeit und erreicht ihr Maximum am entgegengesetzten Ende des Tropfens. Am Rande (resp. d. ges. Oberfläche) des unvollständigen Tropfens muss daher eine Strömung von der in Auflösung begriffenen Region gegen die entgegengesetzte stattfinden und dies ist auch deutlichst zu beobachten. Die untenstehende Figur zeigt die Randpartie eines solchen unvollständigen Trop-



fens und die Pfeile geben die Richtung der Randströmung in dem angegebenen Sinne an. An ausgedehnteren solchen Tropfenrändern hört die Strömung, nachdem sie eine gewisse Strecke durchlaufen, auf, d. h. sobald wir in die Region gleichmässiger Oberflächentension gelangen. An dieser Stelle biegt

der Strom nach dem Tropfeninnern, sowie nach vorn um und bildet einen Wirbel. Obgleich die Tropfen kein suspendiertes Material enthalten, durch welches diese Strömungserscheinungen verdeutlicht werden könnten, tritt der Vorgang doch sehr klar hervor, da mit ihm noch Prozesse in dem Tropfen verlaufen, welche dies bewirken. — Indem nämlich die Tropfensubstanz aus der an die Lösungsregion grenzenden Zone abströmt, kommt sie in eine alkoholreichere. Nun hat aber die Tropfensubstanz in der wasserreicheren Region schon ihre ursprüngliche Beschaffenheit verändert, d. h. sie ist durch Aufnahme von Wasser wasserreicher geworden. In dem Masse, als sie in die alkoholreichere Region gelangt, kann sie in diesem wasserreichen Zustand nicht mehr bestehen, sondern erfährt eine Entmischung. Wir finden daher, dass da, wo die Rückströmung in der Tropfensubstanz deutlich wird (bei *a*), feinste, schwächer lichtbrechende Tröpfchen in ihr auftreten, die bis zur Umbiegungsstelle der Strömung ins Innere (a^1) allmählich anwachsen. Sie werden dann durch die vorwärtsgehende Wirbelströmung wieder nach vorne geführt, dabei allmählich von der Tropfensubstanz aufgezehrt und schwinden bei *c* vollständig.[1]) Auf diese Weise findet also bei der Strömung ein fortdauernder Entmischungsprozess und Wiederauflösungsprozess statt, welcher die Strömung selbst sichtbar macht. Da in der umgebenden Flüssigkeit ein ganz analoger Vorgang stattfindet, so wird auch in ihr die gleichzeitig und gleichartig verlaufende Strömung deutlich gemacht. — In der Lösungszone des Tropfens hat die umgebende alkoholische Flüssigkeit etwas mehr von der Klebreisstärke gelöst; indem diese Lösung nun längs des rückströmenden Tropfenrandes gleichfalls rückwärts geführt wird, kommt sie in die alkoholreichere Region und scheidet hier (*b*) den Mehrgehalt an gelöstem Material in Form

---

[1]) Doch kann dieses Schwinden, ebenso wie das der im Nachfolgenden zu schildernden Tröpfchen der Klebreissubstanz auch bei erheblicherem Umfang der Tröpfchen ganz plötzlich geschehen, indem ihr Kontur momentan verschwimmt und das Tröpfchen nicht mehr von der Umgebung zu unterscheiden ist.

feinster Tröpfchen aus. Diese wachsen ebenfalls bis zu der Umbiegungsstelle des Stromes im Wirbel nach vorn (b^1) und nehmen dann wieder an Grösse allmählich ab, um sich aufzulösen, wenn sie in die vordere wasserreichere Region gelangen.

Diese Vorgänge bestätigen also die Richtigkeit der Auffassung der unvollständigen Tropfen und geben gleichzeitig ein hübsches Beispiel für die unter geeigneten Bedingungen durch ganz minimale Veränderungen entstandenen und wieder schwindenden Entmischungs- und Strömungsvorgänge.

Bei der geschilderten Sachlage muss man erwarten, dass es auch bei sehr vorsichtiger Wasserzugabe gelingen werde, solche Klebreiströpfchen in Vorwärtsbewegung zu sehen ähnlich Öltröpfchen, die einseitig von Seifenlösung berührt werden.[1] — Dies ist nun auch wirklich der Fall. Wenn man sehr vorsichtig Wasser zufügt, so dass kleinere Tröpfchen einseitig von der wasserreicheren Lösung berührt, jedoch noch nicht gelöst werden, so geraten sie in Vorwärtsbewegung unter Wirbelströmung des Inneren. Dabei wird diese Strömung auch wieder durch die oben geschilderten Entmischungs- und Lösungsvorgänge sichtbar.

Auch an der oben erwähnten zähflüssigen Dextrinlösung konnten diese halben Tropfenbildungen, sowie die geschilderten Strömungserscheinungen samt den damit verbundenen Prozessen beobachtet werden. Man kann diese Vorgänge natürlich noch besser studieren, wenn man nicht Wasser, sondern nur schwächeren Alkohol zusetzt. — Dagegen ist seltsamer Weise bei der zähflüssigen alkoholischen Gummilösung, resp. den Gummischäumen davon gar nichts zu beobachten. Werden diese in 75 % Alkohol vorsichtig und einseitig mit schwächerem Alkohol behandelt, so tritt stets die oben p. 223 geschilderte Zerstörung des Schaumes auf, die jedoch nie von Strömungserscheinungen begleitet ist.

---

[1]) Vergl. hierüber mein Werk von 1892 „Über mikroskopische Schäume und die Struktur des Protoplasmas“.

Literatur.

1896. Bütschli, O., Über den Bau quellbarer Körper und die Bedingungen der Quellung. Abhandl. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Bd. 40.

1898. Bütschli, O., Untersuchungen über Strukturen. Mit Atlas. Leipzig.

1900. Bütschli, O., Untersuchungen über die Erstarrung des Schwefels aus dem Schmelzfluss etc. Leipzig.

1903. Bütschli, O., Untersuchungen über Amylose und amyloseartige Körper. Verh. d. naturhist.-med. Ver. Heidelberg. N. F. Bd. 7.

1888. Lehmann, O., Molekularphysik. Leipzig.

Sitzung vom 13. Juni 1903.

1. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Max Schmidt, Professor der Geodäsie an der technischen Hochschule dahier, vor: „Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel.“

2. Herr Richard Hertwig überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien: „Über Reptilien und Batrachier aus Guatemala und Chile in der zoologischen Staatssammlung in München.“ Die Abhandlung wird in den Denkschriften der Akademie erscheinen.

3. Am 5. und 6. Juni tagte dahier die Konferenz des Kartells der deutschen Akademien. Als einer der Beratungsgegenstände lagen wie im vorigen Jahre zu Göttingen die luftelektrischen Forschungen vor. Die zu diesem Zweck niedergesetzte Kommission hat, wie im vorigen Jahre in Göttingen, eine Denkschrift ausgearbeitet, an welcher sich die Herren Eduard Riecke in Göttingen, Franz Exner in Wien und die Herren J. Elster und H. Geitel in Wolfenbüttel mit Beiträgen beteiligten. Ausserdem hat Herr Franz Exner einen Bericht über die Tätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre vorgelegt; ferner wurden der Kommission von Herrn Wilhelm v. Bezold in Berlin drei Berichte übersandt, welche einen Überblick über die von den

Beamten des K. preussischen meteorologischen Institutes in den Jahren 1902 und 1903 ausgeführten luftelektrischen Arbeiten geben; und endlich wurden von Herrn E. Wichert in Göttingen: „Untersuchungen über die Niederschlagselektrizität, ausgeführt auf dem geophysikalischen Observatorium zu Göttingen in den Jahren 1902 und 1903“ übermittelt.

Die Denkschrift und die Berichte werden in Folgendem in den Sitzungsberichten veröffentlicht.

Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel.

Von Dr. M. Schmidt.

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

Wassergeschwindigkeitsmessungen mit dem hydrometrischen Flügel werden bekanntlich in der Art ausgeführt, dass man die sekundlichen Umlaufzahlen n des an der Messungsstelle in das Wasser eingesetzten Flügels beobachtet und die Wassergeschwindigkeit v aus einer zwischen den Grössen n und v bestehenden mathematischen Beziehung, der sogenannten „Flügelgleichung“ berechnet.

Wie Verfasser in einem im Jahre 1895 in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure veröffentlichten Aufsatz „die Gleichung des Woltmannschen Flügels und die Ermittelung ihrer Koeffizienten“ gezeigt hat, kann dieser Gleichung die Form gegeben werden

$$v = K \cdot n (1 - \beta) + \sqrt{(K \cdot n \beta)^2 + v_0^2}. \qquad (1)$$

Der Koeffizient β dieser Formel, dessen Wert zwischen 0 und 1 liegt, ist von den inneren Widerständen im Laufwerk des Flügels abhängig; v_0 ist die sogenannte „Anlaufgeschwindigkeit“ des Flügels und K jene Wegstrecke, welche bei einer vollen Umdrehung des Flügelrades von den über die Schaufelflächen des Flügels hingleitenden Wasserteilchen zurückgelegt wird. Die Grösse derselben entspricht bei Flügelrädern mit

nach Schraubenflächen gekrümmten Schaufeln der Ganghöhe dieser Schraubenfläche.

Die Ermittelung der Zahlenwerte von K, v_0 und β erfolgt zumeist auf Grund von Versuchen, bei welchen der auf einem Fahrzeug befestigte Flügel mit verschiedenen, durch gleichzeitige Messungen festgestellten Geschwindigkeiten durch stillstehendes Wasser fortbewegt wird.

Die sorgfältige Ausführung dieser, für jeden Flügel in grosser Zahl nötigen Versuche, erfordert mancherlei Einrichtungen und Hilfsmittel, die nur in ständigen, für diesen Zweck besonders eingerichteten Flügelprüfungsstationen verfügbar zu sein pflegen und verlangt einen ziemlichen Aufwand von Beobachtungs- und Rechnungsarbeit.

Da die Ergebnisse solcher Versuche von der Eigenart der Versuchsanordnung beeinflusst zu sein pflegen, so erscheint es wünschenswert, die aus den Versuchsmessungen abgeleiteten Zahlenkoeffizienten auch noch in anderer Weise auf ihre Richtigkeit zu prüfen und zu untersuchen, ob das angewendete Verfahren der Koeffizientenbestimmung auch der Theorie genügend entsprechende Koeffizientenwerte liefert. Zu diesem Zweck soll hier zunächst ein theoretisches Verfahren der Koeffizientenbestimmung angegeben und für einige Flügel von verschiedener Art und Grösse ein Vergleich der auf theoretischem und hydrometrischem Wege bestimmten Koeffizientenwerte vorgenommen werden.

I. Theoretische Bestimmung des Hauptkoeffizienten K.

Was in erster Linie den Hauptkoeffizienten K der Flügelgleichung anlangt, so lässt sich der theoretische Wert desselben für Flügelräder mit schraubenförmig gekrümmten Schaufelflächen, welche geradlinige, die Achse senkrecht schneidende Erzeugende besitzen und nach einem Kreiszylinder begrenzt sind, leicht ermitteln.

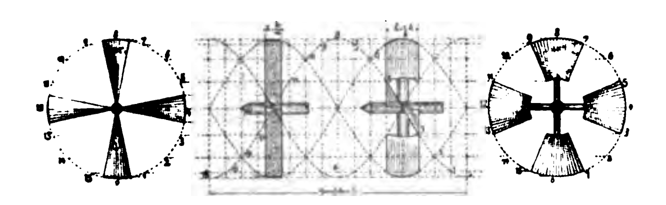
Es genügt hiefür eine scharfe Projektionszeichnung des Schaufelrades in natürlicher Grösse auf einer zur Rotationsachse des Flügels senkrecht stehenden Bildebene anzufertigen, die Sektorwinkel, welche die Kantenlinien der Flügelschaufeln bilden, unter Verwendung eines guten Transporteurs oder Sehnenmassstabes abzugreifen und die Höhe des das Schaufelrad umhüllenden Kreiszylinders mittelst einer Nonienschublehre zu messen.

Bezeichnet a den mittleren Sektorwinkel der Schaufelblätter in Sexagesimalgraden und h die mittlere Höhe des Begrenzungszylinders in Metermass, so findet sich, wie ein Blick auf Fig. 1 lehrt, die Ganghöhe der Schraubenfläche und damit der theoretische Wert des Koeffizienten K der Flügelgleichung aus der Beziehung

$$K = \frac{360}{a} h. \qquad (2)$$

Fig. 1.

Schraubenlinien eines Flügels mit 4 Blättern.



Wie leicht erklärlich, stimmen die nach der vorstehenden Gleichung aus den Ausmassen der Flügelräder berechneten Koeffizienten wegen der unvermeidlichen, in Mängeln der mechanischen Ausführung begründeten Form- und Stellungsfehler der Schaufelflächen und wegen der durch das Flügelgehäuse und die Befestigungsvorrichtung des Flügels veranlassten Umlaufstörungen des Flügelrades mit den aus hydrometrischen Versuchen hervorgehenden Koeffizientenwerten nicht völlig überein. Beide Werte unterscheiden sich jedoch bei richtig konstruierten Flügelrädern von guter Form und Ausführung verhältnismässig nur wenig.

Da alle hier in Frage kommenden Störungsursachen die Umlaufbewegung des Flügelrades verzögern, so wird der Koeffizient K bei der hydrometrischen Prüfung zumeist grösser als die aus den Schaufelabmessungen berechnete Schraubenganghöhe gefunden.

Eine Ausnahme von dieser Regel bilden indessen die mit engen Schutzringen umgebenen Schaufelräder, die infolge der Kontraktion des den Schutzring durchlaufenden Wasserstromes bei der hydrometrischen Prüfung etwas zu kleine Koeffizientenwerte liefern.

Nach zahlreichen durch die Flügelprüfungsanstalt der Technischen Hochschule in München ausgeführten Versuchen, deren Ergebnisse in den vom Verein deutscher Ingenieure herausgegebenen „Mitteilungen über Forschungsarbeiten" Heft 11 ausführlich mitgeteilt sind, beträgt der Unterschied der in beiderlei Weise bestimmten Hauptkoeffizienten bei gutem Zustand der benützten Flügel + 2⁰/₀ für die Flügelbefestigung am Seil oder an der Schwimmstange, und + 4⁰/₀ bei der Verwendung einer lotrecht stehenden Flügelstange.

Man hat demnach die nach Gleichung (2) bestimmte Schraubenganghöhe um 2⁰/₀ bezw. 4⁰/₀ zu vergrössern, um mit den hydrometrischen Versuchen gut übereinstimmende Werte der Hauptkoeffizienten K der Flügelgleichung zu erhalten.

Zeigen sich grössere Abweichungen, so ist Anlass gegeben die Störungsursachen zu ermitteln und zu versuchen, ob nicht

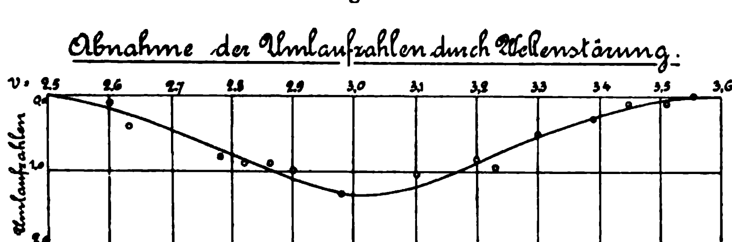
durch Verbesserungen in der Versuchsanordnung oder auch in der mechanischen Einrichtung der Flügel theoretisch richtigere Koeffizientenwerte zu erlangen sind.

Vergleichende Koeffizientenbestimmungen dieser Art haben dazu geführt, Störungserscheinungen verschiedener Art in der Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel zu erkennen und als Ursachen derselben insbesondere eine fehlerhafte Stellung und Befestigung der Flügelschaufeln an der Flügelwelle, sowie auch einen schädlichen Einfluss der Befestigungsvorrichtung des Flügels nachzuweisen.

Eine der auffälligsten Störungen in der Flügelbewegung zeigt sich bei der Vornahme von Flügelprüfungen in Versuchskanälen mit geringer Wassertiefe besonders bei der Durchfahrung längerer Versuchsstrecken, wenn lotrecht stehende, über 3 cm starke Flügelstangen verwendet wurden. Es macht sich hiebei eine regelmässige Abnahme der sonst konstanten Umlaufzahlen des Flügelrades innerhalb einer bestimmten Wegstrecke bemerkbar, die ihren Maximalwert erreicht, wenn die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Flügels der der Wassertiefe h im Kanal entsprechenden Wellengeschwindigkeit $v = \sqrt{g h}$ gleich kommt.

Wie die in Fig. 2 dargestellte Abnahme der Umlaufzahlen eines bei den Versuchen an einer lotrechten Stange von 4,5 cm Stärke befestigten Flügels erkennen lässt, beginnt dieselbe für 1 m Wassertiefe bei etwa 2,5 m Fortbewegungsgeschwindigkeit, erreicht bei etwas über 3 m ihr Maximum und verliert sich wieder bei 3,5 m Geschwindigkeit.

Fig. 2.



Bei Messungen in Wasserbecken von grösserer Tiefe, bei welchen die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Flügels die Wellengeschwindigkeit $\sqrt{g\,h}$ nicht erreicht, kommt eine derartige Störung der Umlaufbewegung des Flügels nicht zum Vorschein, wie einige im Starnberger See bei 5 bis 7 m Wassertiefe mit dem gleichen Flügel und derselben Befestigungsvorrichtung ausgeführte Versuchsreihen bewiesen haben.

Die Ursache dieser Störungserscheinung kann nicht wohl in einer einfachen, von ungenügender Profilbreite des Prüfungskanales herrührenden Stauwirkung des Flügels gefunden werden, da diese nicht an eine bestimmte Geschwindigkeit gebunden ist, dieselbe liegt vielmehr in der Wirkung einer Grundwelle, welche durch die Befestigungsvorrichtung des Flügels hervorgebracht wird und diesen bei einer der Wellengeschwindigkeit im Kanal gleichkommenden Fortbewegung ständig begleitet.

Die bezüglich der Entstehungsbedingungen dieser Erscheinung angestellten Versuche lehren, dass bei der Verwendung lotrechter Flügelstangen von 3 cm Durchmesser und darunter, oder solcher mit ovalem Querschnitt, sowie bei der Flügelbefestigung am Seil und an der Schwimmstange die Umlaufzahlen des Flügels von dieser Störung nur in wenig merklicher Weise beeinflusst werden. Ebenso bleibt eine Störung dieser Art ohne schädlichen Einfluss, wenn bei den Flügelprüfungen in Versuchskanälen nur kurze Wegstrecken von etwa 20 m Länge durchfahren werden; während anderseits die Verwendung stärkerer Flügelstangen, von 4,5 cm an, bei der Durchfahrung von Versuchsstrecken von 60 und 80 m Länge eine bis auf 10 % des normalen Wertes anwachsende Abnahme der Umlaufzahlen ergeben hat.

II. Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit v_0 und des Widerstandskoeffizienten β.

Unter „Anlaufgeschwindigkeit" des Flügels soll diejenige Wassergeschwindigkeit verstanden werden, bei welcher die Stosskraft der die Flügelschaufeln treffenden Wasserfäden gerade hinreicht, um die Widerstände im Flügelmechanismus zu überwinden und eine stetige Umlaufbewegung des Flügelrades hervorzurufen.

Da sich die Grösse des Widerstandsmoments des Flügelrades durch einen einfachen Versuch feststellen lässt, so hat man nur das Angriffsmoment der auf Drehung des Flügelrades wirkenden Komponente des Wasserstosses, die sogenannte „Triebkraft", als Funktion der Wassergeschwindigkeit auszudrücken und beide Momente einander gleich zu setzen, um eine Gleichung zur Berechnung der gesuchten Anlaufgeschwindigkeit zu erhalten.

Zur Berechnung der „Triebkraft" für die nach Schraubenflächen gekrümmten Flügelschaufeln gelangt man auf folgende Weise:

Der Wert des Widerstandes einer ebenen Fläche F bei senkrechtem Stoss ist von Euler[1]) klar und überzeugend entwickelt zu

$$W = \frac{F \cdot \gamma \cdot v^2}{2g}, \tag{3}$$

wenn mit γ das Gewicht der Volumeinheit Wasser, mit g die Schwerebeschleunigung und mit v die Wassergeschwindigkeit bezeichnet wird. Wählt man Centimeter und Gramm als Einheiten, so ist in unseren Formeln $\gamma = 1$ zu setzen.

Die einzelnen schraubenförmig gekrümmten Elementarstreifen der Flügelschaufeln werden jedoch nicht senkrecht,

---

[1]) Euler, Théorie complette de la construction et de la maneuvre des voisseaux, Cap. 1, § 1—4.

sondern je nach ihrem Abstand von der Flügelachse von den parallel zu derselben laufenden Wasserfäden unter verschiedenen Stosswinkeln δ getroffen, deren Grösse sich aus den Abwickelungsdreiecken der den Elementarstreifen entsprechenden Schraubenlinien berechnen lässt.

Ist r der Abstand einer dieser Schraubenlinien von der Achse und K die Ganghöhe der Schraube, so hat man

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2 r \pi}{K}. \tag{4}$$

Die Tangenten der Stosswinkel nehmen also im gleichen Verhältnis wie die Halbmesser r der Elementarstreifen ab.

Statt mit diesen verschieden grossen Stosswinkeln zu rechnen, führen wir einen mittleren Winkelwert ein und wählen als solchen den Stosswinkel im Druckmittelpunkt der senkrechten Projektionen der Schaufelflächen auf die Rotationsebene.

Da diese Projektionen Ausschnitte aus Kreisringen darstellen mit dem Sektorwinkel a und den beiden Halbmessern r_0 und r_1, so ist der Schwerpunktshalbmesser der erwähnten Schaufelprojektion

$$r = \frac{2}{3} \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}}{\frac{a^0}{2}} \cdot \frac{180}{\pi}. \tag{5}$$

Die in dieser Gleichung eingehenden Zahlenwerte können aus der zur Ermittelung der Ganghöhe K der Schraubenfläche des Flügelrades bereits angefertigten Projektionszeichnung entnommen werden.

Die Mehrzahl der Theoretiker findet für das Verhältnis des senkrechten zum schiefen Wasserstoss auf die Vorderseite einer ebenen Platte von gleichbleibender Grösse den Wert $1 : \sin^2 \delta$.

Dieser Wert ist richtig, wie die Versuche von Fink[1]) für

[1]) Zivilingenieur, 1892, S. 539 und S. 653 etc. etc.

die Grösse des Parallelstosses von im Wasser bewegten ebenen Platten mit sich gleichbleibender Grösse ergeben haben, wenn die Wirkung des Wassers auf die Rückseite der Flächen nicht in Betracht kommt; letztere kann aber im vorliegenden Fall, in welchem es sich nur um verhältnismässig kleine Geschwindigkeiten handelt, jedenfalls unberücksichtigt bleiben.

Übrigens haben die von Fink in fliessendem Wasser ausgeführten Versuche auch bewiesen, dass die Stosskraft von fliessendem Wasser gegen einen in demselben ruhenden Körper identisch ist mit dem Widerstand, welchen ein in stillstehendem Wasser fortbewegter Körper erfährt. Darin liegt offenbar ein Beweis für die Zulässigkeit des üblichen Verfahrens der Flügeltarierung in stillstehendem Wasser mit bewegtem Flügel.

Führt man das erwähnte Verhältnis ein, so erhält man für die gesamte Stosskraft des Wassers parallel zur Flügelachse auf die unter dem mittleren Winkel δ getroffenen Flächenelemente der Flügelschaufeln

$$D = W \sin^2 \delta = \frac{F \cdot v^2}{2g} \sin^2 \delta \tag{6}$$

und wenn man unter $Q = F \cdot \sin \delta$ die Projektion der Schaufelfläche senkrecht zur Flügelachse versteht, deren Grösse sich aus dem Ausdruck findet

$$Q = \frac{a}{2} (r_1^2 - r_0^2) \frac{\pi}{180}, \tag{7}$$

so hat man zunächst

$$D = \frac{Q v^2 \sin \delta}{2g} \tag{8}$$

und hieraus den Normaldruck N senkrecht zur Schaufelfläche

$$N = \frac{D}{\sin \delta} = \frac{Q v^2}{2g}. \tag{9}$$

Wird dieser Normaldruck in seine beiden Komponenten parallel zur Rotationsachse und senkrecht zu derselben zerlegt,

so erhält man für die in der Rotationsebene des Flügelrades liegende Komponente, welche wir die „Triebkraft“ nennen,

$$P = \frac{Q v^2 \cos \delta}{2 g}. \tag{10}$$

Wie Weisbach (Theoretische Mechanik I, S. 451) angibt, ist nach den Versuchen von du Buat und Thibault dieser Wert noch mit einem Widerstandskoeffizienten η zu multiplizieren, der gleich 1,86 $F^{0,1}$ für Quadratfuss gesetzt werden kann; für F in Quadratcentimeter erhält man $\eta = 0{,}932 \cdot F_{qcm}^{0,1}$ und somit

$$P = \eta \cdot \frac{Q v^2 \cos \delta}{2 g}. \tag{11}$$

Den zur Berechnung von η erforderlichen Flächeninhalt F einer Schaufel findet man als Produkt der Kantenlänge $s = r_1 - r_0$ der Schaufel und der Länge l_m des durch die beiden Schaufelkanten begrenzten Abschnitts der durch die Schaufelmitte laufenden Schraubenlinie $F = s \cdot l$, wobei

$$l = \sqrt{\left(\frac{r \pi a}{180}\right)^2 + h^2}$$

zu setzen ist, $r = \frac{r_0 + r_1}{2}$ und h die Höhe des das Schaufelrad begrenzenden Zylinders bezeichnet.

Der Angriffspunkt der Kraft P ist im Druckmittelpunkte, bezw. im Schwerpunkte der Projektion der Schaufelfläche, anzunehmen, welcher in dem in Gl. (5) angegebenen Abstand r von der Flügelachse gelegen ist. Das Angriffsmoment des Wasserstosses auf eine Schaufel ist somit

$$M = P \cdot r \tag{12}$$

und wenn z die Zahl der Schaufeln bezeichnet, so hat man das gesamte Drehmoment

$$M_a = z \cdot P \cdot r. \tag{13}$$

Die diesem Angriffsmoment entgegenwirkenden Widerstände

bestehen aus der Zapfenlagerreibung der Flügelwelle; aus den Widerständen der Räder und Kontaktfedern des mit der Flügelwelle in Berührung stehenden Zählwerkes, sowie aus der an den Schaufelflächen wirksamen sogenannten „Wasserreibung".

Die Grösse dieser verschiedenartigen Widerstände kann zwar nicht im Einzelnen, wohl aber in ihrer Gesamtwirkung durch einen sehr einfachen Versuch festgestellt werden.

Schlingt man nämlich um eine freiliegende Stelle der Flügelwelle, oder, wenn sich eine solche nicht vorfindet, um eine zu diesem Zweck vorübergehend angebrachte Verlängerung der Welle einen ungezwirnten Seidenfaden in einer grösseren Anzahl von Windungen, legt diesen über eine in Spitzen laufende, sehr leicht bewegliche Rolle — etwa eine Planimeterrolle — und befestigt man am freien Ende des Fadens eine kleine Schale, so kann man, nachdem der Flügel in ein Gefäss mit Wasser eingesetzt ist, die Schale durch Einlegen kleiner Gewichte soweit belasten, bis der Flügel im Wasser eine ganz langsame, gleichförmige Umlaufbewegung annimmt.

Das Gewicht G der Schale mit ihrer Belastung in Gramm mal dem halben Durchmesser d der Welle an der Umschlingungsstelle des Fadens in Centimetern, gibt das Widerstandsmoment des Flügels

$$M_w = G \cdot \frac{d}{2}. \tag{14}$$

Setzt man dieses dem Angriffsmomente M_a des Wasserstosses gleich, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit v_0 des Flügels, in welcher alle übrigen Grössen bekannt sind.

Da bei der Ableitung der vorstehenden Formeln mit Rücksicht auf eine möglichst einfache Berechnung des Endergebnisses auf mathematische Strenge teilweise verzichtet werden musste, sowie auch gewisse Erfahrungskoeffizienten eingeführt wurden, die unter äusseren Verhältnissen festgestellt sind, welche von den hier vorliegenden verschieden sind, so erschien es wünschenswert den Grad der Zuverlässigkeit der aus den

aufgestellten Formeln zu gewinnenden Rechnungsergebnisse noch zu prüfen.

Zu diesem Zwecke sind für acht in der nachstehenden Zahlentafel näher bezeichnete Flügel von sehr verschiedener Art und Grösse die Anlaufgeschwindigkeiten nach den vorstehend entwickelten Formeln berechnet und mit den entsprechenden aus der hydrometrischen Prüfung gewonnenen Werten verglichen worden. Es fand sich für die in der Tafel für $n = 0$ angegebenen beiden Werte v_0 ein mittlerer Unterschied von rund 1 cm; ein Ergebnis, das umsomehr befriedigen dürfte, als auch die hydrometrische Bestimmung auf einen höheren Genauigkeitsgrad als diesen keinen Anspruch machen kann.

Um endlich auf kurzem Wege zu einer Wertermittelung für den Widerstandskoeffizienten β zu gelangen, kann zwischen der vorstehend berechneten Anlaufgeschwindigkeit v_0 und dem in der Flügelgleichung (1) auftretenden Koeffizienten β, dessen Grösse von den inneren Widerständen im Flügelmechanismus abhängt und sich zwischen den Grenzwerten 0 und 1 bewegt, die einfache, durch die Gleichung einer Geraden darstellbare Beziehung angenommen werden

$$\beta = a + b \cdot v_0, \tag{15}$$

in welcher a und b Zahlenkoeffizienten bezeichnen, die sich aus Versuchsergebnissen berechnen lassen.

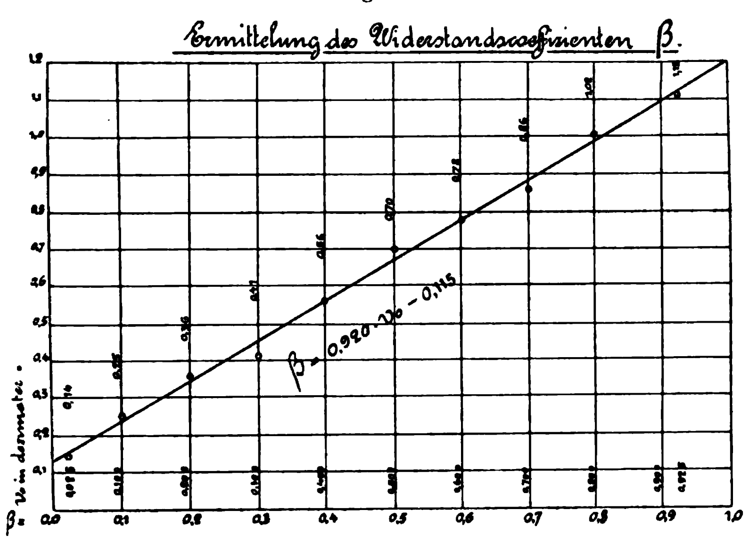
Eine in graphischer Form ausgeführte Zusammenstellung einer grösseren Anzahl einander entsprechender Werte von β und v_0, Fig. 3, lässt die Richtigkeit dieser Beziehung klar hervortreten.

Um zu einer zuverlässigen, rechnerischen Feststellung der Koeffizientenwerte a und b zu gelangen, sind aus 100 durch die Münchener Flügelprüfungsanstalt in den letzten Jahren ermittelten Flügelgleichungen eine gleiche Anzahl zusammengehöriger Einzelwerte von v_0 und β entnommen, ihrer Grösse nach geordnet und dann in zehn Gruppenwerte zusammengefasst

worden. Die aus diesen zehn Gruppen berechneten Mittelwerte finden sich in Fig. 3 eingeschrieben.

Um einfache Zahlen zu erhalten, ist für v_0 das Dezimeter als Einheit gewählt. Da ferner grössere Werte von v_0, als solche von 1,2 dm nur selten vorkommen, so ist die vorliegende Untersuchung auf Werte von v_0 unter 1,2 dm beschränkt worden. Für Werte von v_0, welche diese Grenze überschreiten, kann $\beta = 1$ gesetzt werden.

Fig. 3.



Die Berechnung der wahrscheinlichsten Koeffizientenwerte a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt

$$a = -0{,}115 \pm 0{,}043 \quad \text{und} \quad b = +0{,}920 \pm 0{,}023.$$

Die Bestimmungsgleichung für β ist somit

$$\beta = -0{,}115 + 0{,}920 \cdot v_0. \tag{16}$$

Die Ausgleichung ergab ferner als mittleren Fehler der in die Rechnung eingeführten Gruppenmittel von β 22 Einheiten

der dritten Dezimale. Da diesen Gruppenmitteln das Gewicht 10 zukommt, so ergibt sich der mittlere Fehler m_0 der Gewichtseinheit der zur Berechnung der Koeffizienten a und b benützten Einzelwerte von β zu

$$m_0 = \pm 0{,}07.$$

Berechnet man endlich aus den angegebenen durch die Ausgleichung gefundenen mittleren Fehlern der Koeffizientenwerte a und b die mittlere Unsicherheit des als Funktion von a und b sich darstellenden Wertes β und berücksichtigt, dass v_0 nach unseren Voraussetzungen im ungünstigsten Falle 1,2 werden kann, so findet sich die Unsicherheit des aus der angegebenen Gleichung ermittelten Wertes β im ungünstigsten Falle bei $v_0 = 1{,}2$, zu

$$m_\beta = \pm 0{,}12$$

und für einen mittleren Wert $v_0 = 0{,}6$ zu

$$m_\beta = \pm 0{,}10.$$

Dieser Genauigkeitsgrad dürfte den für die Berechnung von β zu stellenden Anforderungen um so mehr genügen, als kleine Änderungen von β, wie eine Differenzierung der Flügelgleichung erkennen lässt, lediglich bei der Berechnung sehr kleiner Wassergeschwindigkeiten in Betracht kommen und für diese nur im ungünstigsten Falle, das ist, wenn sich die sekundlichen Umlaufzahlen des Flügels dem Wert Null nähern, einen dem Werte m_β relativ gleichen Fehler bedingen.

Die Zuverlässigkeit des im Vorstehenden entwickelten Verfahrens der theoretischen Koeffizientenbestimmung soll schliesslich an einigen Rechnungsbeispielen gezeigt werden, die sich auf die in der nachstehenden Zahlentafel (S. 254/255) aufgeführten Flügel beziehen, welche, wie oben bereits erwähnt, auch zur Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit gedient haben.

Als Hauptkoeffizienten der Gleichungen dieser Flügel sind zunächst die aus den Abmessungen der Schaufeln berechneten und um 4°/o erhöhten Werte der Ganghöhe der Schrauben-

flächen der Schaufelräder dieser Flügel angenommen worden. Ferner wurden die aus 13 und 14 berechneten Anlaufgeschwindigkeiten v_0 in Gleichung 16 eingesetzt und die Werte der Widerstandskoeffizienten β berechnet. Diese Koeffizienten, in die allgemeine Flügelgleichung (1) eingesetzt, ergeben die am Kopf der Zahlentafel bei den Flügeln 1), 2) und 3) in zweiter Linie aufgeführten Ausdrücke zur Berechnung der Wassergeschwindigkeit v_2, während die in erster Linie stehenden Gleichungen für v_1 durch Einsetzen der aus der hydrometrischen Flügelprüfung gewonnenen Koeffizientenwerte erhalten worden sind.

Führt man nach beiden Gleichungen für dieselben sekundlichen Umlaufzahlen n die Geschwindigkeitsberechnung durch, so findet man, dass bei den grösseren Flügelrädern von mehr als 0,5 m Schraubenganghöhe, wie sie die Flügel 1) bis 3) der Tabelle besitzen, die Unterschiede der Geschwindigkeitswerte v_1 und v_2 wenige Centimeter nicht überschreiten.

Weniger befriedigend ist diese Übereinstimmung bei den kleineren Flügelrädern unter 0,5 m Schraubenganghöhe, bei welchen die vorerwähnten Unterschiede mit wachsenden Werten von n bis zu 5 und 6 cm zunehmen.

Die Ursache dieser Abweichungen lässt sich in der zu geringen Genauigkeit der Bestimmung der Hauptkoeffizientenwerte K erkennen, deren Grösse für kleine Schaufelräder von wenigen Centimetern Durchmesser aus einer Projektionszeichnung offenbar nicht mit gleicher relativer Schärfe ermittelt werden kann, wie bei grossen Schaufelrädern.

Diesem Missstande ist jedoch dadurch in einfacher Weise abzuhelfen, dass für kleine Schaufelräder, oder auch für solche, deren mechanische Ausführung den theoretischen Voraussetzungen bezüglich der geometrisch richtigen Form der Schaufelflächen nicht genügend entspricht, der Wert von K mittelst einiger einander entsprechender Werte von v und n abgeleitet wird, die durch Beobachtungen in fliessendem Wasser, etwa unter Zuhilfenahme von Oberflächenschwimmern, oder durch ver-

gleichende Messungen mit einem anderen hydrometrisch geprüften Flügel, ermittelt worden sind.

In diesem Falle erhält man genügend zuverlässige Hauptkoeffizientenwerte aus der Beziehung:

$$K = \frac{\Sigma v}{\Sigma n}.$$

Der in dieser Weise bestimmte Koeffizient K wird sodann mit den nach dem oben angegebenen theoretischen Verfahren abgeleiteten Werten v_0 und β in die Flügelgleichung eingeführt, deren Koeffizienten somit bestimmt sind.

Dieses Verfahren kann in zutreffender Weise als „halbtheoretische Koeffizientenbestimmung“ bezeichnet werden und liefert, wie die unter Nr. 4 bis 8 in der Zahlentafel mitgeteilten Berechnungsbeispiele zeigen, Geschwindigkeitswerte (v_2), welche sich nur sehr wenig von jenen Werten (v_1) unterscheiden, die sich mit Hilfe der auf hydrometrischem Wege bestimmten Koeffizienten ergeben.

Dieses letztere Verfahren der Koeffizientenbestimmung lässt sich mit demselben guten Erfolg, wie bei kleinen Flügeln, auch für grosse Schaufelräder und insbesondere auch für solche mit ebenen Schaufelflächen in Anwendung bringen, wenn für die Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit v_0 die durch die ebene Schaufelform bedingten Abänderungen in den Berechnungsformeln getroffen werden. Dieselben betreffen namentlich die Ausdrücke für den Abstand r des Druckmittelpunktes der Schaufelfläche von der Flügelachse und für die Ermittelung des Winkels δ, unter welchem die ebenen Schaufelflächen von den parallel zur Flügelachse laufenden Stromfäden getroffen werden.

Für diesen Winkel hat man bei ebenen Schaufeln:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{h},$$

oder wenn statt h die mittlere Breite l der Schaufeln, gemessen im Druckmittelpunkt, eingeführt wird:

$$\sin \delta = \frac{b}{l}.$$

Im übrigen wird in den Berechnungsformeln für v_0 und β keine weitere Abänderung erforderlich; indessen kann man die Projektionsfläche Q der Schaufeln auch aus der Beziehung $Q = F \sin \delta$ berechnen, nachdem der mittlere Flächeninhalt F der Schaufeln aus den Abmessungen bestimmt worden ist.

Dass sich mit diesem Verfahren auch bei ganz kleinen Flügeln mit ebenen Schaufeln eben so gute Ergebnisse, wie bei schraubenförmigen Schaufelflächen erzielen lassen, zeigt das in der Zahlentafel unter Nr. 8 mitgeteilte Beispiel eines von Kern in Aarau gefertigten Flügels mit vier ebenen Schaufelflächen.

Zahlen-

1) Flügel von Ott Nr. 237/IV

$v_1 = 0{,}9064 \cdot n + \sqrt{0{,}18195 \cdot n^2 + 0{,}00142}$
$v_2 = 0{,}8215 \cdot n + \sqrt{0{,}25351 \cdot n^2 + 0{,}00286}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 1{,}333$	$K_2 = 1{,}325$	8
.	$\beta_1 = 0{,}32$	$\beta_2 = 0{,}38$	
0,0	0,038	0,053	− 15
0,1	0,147	0,156	− 9
0,2	0,275	0,278	− 3
0,3	0,405	0,407	− 2
0,4	0,537	0,537	0
0,5	0,670	0,668	+ 2
1,0	1,335	1,328	+ 7
1,5	2,001	1,989	+ 12
2,0	2,667	2,651	+ 16
2,5	3,333	3,314	+ 19
Planimetr. Mittel: $\Delta m =$			11

2) Flügel von Ott Nr. 237/I

$v_1 = 0{,}7593 \cdot n + \sqrt{0{,}1161 \cdot n^2 + 0{,}0010}$
$v_2 = 0{,}8983 \cdot n + \sqrt{0{,}04413 \cdot n^2 + 0{,}00112}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 1{,}100$	$K_2 = 1{,}109$	9
.	$\beta_1 = 0{,}31$	$\beta_2 = 0{,}19$	
0,0	0,032	0,033	− 1
0,1	0,122	0,129	− 7
0,25	0,281	0,287	− 6
0,50	0,553	0,559	− 6
0,75	0,827	0,835	− 8
1,0	1,101	1,113	− 12
1,5	1,651	1,664	− 13
2,0	2,201	2,218	− 17
2,5	2,751	2,772	− 21
3,0	3,301	3,326	− 25
		$\Delta m =$	13

5) Flügel von Ott und Coradi [1]

$v_1 = \sqrt{0{,}02958 \cdot n^2 + 0{,}02434}$
$v_2 = \sqrt{0{,}02982 \cdot n^2 + 0{,}02993}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}1720$	$K_2 = 0{,}1727$	0,7
.	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	
0,0	0,156	0,173	− 17
0,2	0,160	0,176	− 16
0,6	0,187	0,202	− 15
1,0	0,232	0,244	− 12
2,0	0,378	0,386	− 8
4,0	0,705	0,712	− 7
6,0	1,044	1,051	− 7
10,0	1,727	1,736	− 9
13,0	2,244	2,252	− 8
17,0	2,925	2,941	− 16
Planimetr. Mittel: $\Delta m =$			10

6) Flügel von Ott Nr. 206/I [1]

$v_1 = 0{,}0583 \cdot n + \sqrt{0{,}01074 \cdot n^2 + 0{,}00416}$
$v_2 = 0{,}0808 \cdot n + \sqrt{0{,}00654 \cdot n^2 + 0{,}0045}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}1619$	$K_2 = 0{,}1617$	0,2
.	$\beta_1 = 0{,}64$	$\beta_2 = 0{,}50$	
0,0	0,065	0,067	− 2
0,25	0,084	0,090	− 6
0,50	0,112	0,119	− 7
1,0	0,180	0,186	− 6
2,0	0,334	0,337	− 3
5,0	0,814	0,814	0
7,0	1,136	1,136	0
10,0	1,621	1,620	+ 1
15,0	2,430	2,428	+ 2
20,0	3,239	3,236	+ 3
		$\Delta m =$	3

[1]) Die Gleichungskoeffizienten der Flügel unter Nr. 4 bis 7 sind

tafel.

3) Flügel von Ott Nr. 237/II

$v_1 = \sqrt{0{,}29214 \cdot n^2}$

$v_2 = 0{,}4072 \cdot n^2 + \sqrt{0{,}01843 \cdot n^2 + 0{,}00155}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}540$	$K_2 = 0{,}543$	3
.	$\beta_1 = 1{,}00$	$\beta_2 = 0{,}25$	
0,0	0,040	0,039	+ 1
0,1	0,067	0,082	— 15
0,2	0,115	0,129	— 14
0,5	0,273	0,282	— 9
1,0	0,542	0,549	— 7
1,5	0,812	0,818	— 6
2,0	1,082	1,089	— 7
3,0	1,622	1,631	— 9
4,0	2,162	2,172	— 10
5,0	2,703	2,716	— 13
		Δ m =	9

4) Flügel von Ott Nr. 5/II[1])

$v_1 = 0{,}1111 \cdot n + \sqrt{0{,}04256 \cdot n^2 + 0{,}0100}$

$v_2 = 0{,}0889 \cdot n + \sqrt{0{,}05221 \cdot n^2 + 0{,}00815}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}3174$	$K_2 = 0{,}3170$	0,4
.	$\beta_1 = 0{,}65$	$\beta_2 = 0{,}72$	
0,0	0,100	0,090	+ 10
0,2	0,130	0,119	+ 11
0,6	0,226	0,217	+ 9
1,0	0,340	0,335	+ 5
1,5	0,492	0,488	+ 4
2,0	0,647	0,644	+ 3
4,0	1,276	1,274	+ 2
6,0	1,909	1,907	+ 2
8,0	2,542	2,541	+ 1
10,0	3,176	3,176	0
		Δ m =	5

7) Flügel von Ott Nr. 199/I[1])

$v_1 = 0{,}0240 \cdot n + \sqrt{0{,}00182 \cdot n^2 + 0{,}0081}$

$v_2 = 0{,}0206 \cdot n + \sqrt{0{,}00210 \cdot n^2 + 0{,}00766}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}0667$	$K_2 = 0{,}0664$	0,3
.	$\beta_1 = 0{,}64$	$\beta_2 = 0{,}69$	
0,0	0,090	0,087	+ 3
0,5	0,104	0,101	+ 3
1,0	0,123	0,119	+ 4
2,0	0,172	0,168	+ 4
4,0	0,289	0,285	+ 4
7,0	0,480	0,476	+ 4
10,0	0,676	0,672	+ 4
20,0	1,338	1,332	+ 6
30,0	2,004	1,995	+ 9
40,0	2,672	2,655	+ 15
		Δ m =	7

8) Flügel von Kern Nr. 2

$v_1 = \sqrt{0{,}03516 \cdot n^2 + 0{,}01234}$

$v_2 = \sqrt{0{,}03508 \cdot n^2 + 0{,}01392}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}1875$	$K_2 = 0{,}1873$	2
.	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	
0,0	0,111	0,118	— 7
0,2	0,117	0,124	— 7
0,4	0,134	0,140	— 6
0,7	0,172	0,176	— 4
1,0	0,218	0,221	— 3
2,0	0,391	0,393	— 2
3,0	0,573	0,574	— 1
5,0	0,944	0,944	0
10,0	1,878	1,877	+ 1
15,0	2,815	2,812	+ 3
		Δ m =	3

Hauptmittel Δ v = 7,6 mm

auf halbtheoretischem Wege bestimmt.

Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre
mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität.

Von **Eduard Riecke.**

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts haben die Anschauungen, die man sich von der Natur der elektrischen Erscheinungen gebildet hat, eine sehr merkwürdige Entwickelung durchgemacht. Der Anfang des Jahrhunderts stand unter dem Einflusse der Arbeiten von Coulomb, Ampère und Gauss, in welchen die Vorstellungen von der Existenz elektrischer und magnetischer Fluida ihre exakte Begründung fanden. Einen gewissen Abschluss und eine einheitliche Zusammenfassung fand die ganze Gedankenreihe in der Mitte des Jahrhunderts durch Wilhelm Weber. Das ganze Gebiet der elektrischen und magnetischen Erscheinungen schien auf der Existenz der elektrischen Fluida zu beruhen; diese dachte sich Weber atomistisch konstituiert und mit Masse begabt, wie die ponderabeln Teilchen. Zwischen den elektrischen Atomen wirkten Fernkräfte, die ausser von der Entfernung selber noch von ihrer zeitlichen

Anderung abhängig gemacht wurden. Zur selben Zeit, als Weber mit dem Ausbau der atomistischen Fernwirkungstheorie beschäftigt war, ging von Faraday eine Anregung ganz anderer Art aus. Der eigentliche Erreger der elektromagnetischen Erscheinungen ist darnach der Äther. Jene Erscheinungen sind verbunden mit Druck und Spannung im Inneren des Athers; die Folge davon sind die scheinbaren Fernwirkungen, die wir im elektromagnetischen Felde beobachten. An Stelle von atomistischer Konstitution und von Fernwirkung traten Kontinuum und durch Druck und Spannung vermittelte Wirkung. Einen glänzenden Erfolg errang die Faradaysche Anschauung mit der Begründung der elektromagnetischen Lichttheorie durch Maxwell und mit ihrer Bestätigung durch Hertz; aber es blieben doch Gebiete, die sich den Zauberformeln der Maxwell-Hertzschen Theorie nicht erschliessen wollten, Erscheinungen, die nur durch die Wechselbeziehung zwischen ihren ponderabeln Trägern und zwischen dem Träger der elektrischen Wirkungen zu erklären waren. Wir erinnern an die Erscheinungen der Dispersion und Absorption des Lichtes, an die elektrische Leitung der Flüssigkeiten und der Gase. Von hier aus vollzog sich gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts eine Wandlung der Anschauungen, durch welche zwischen den Anschauungen von Weber und von Maxwell eine Brücke geschlagen wurde. Aus dem Äther scheiden sich Elementarquanta der positiven und der negativen Elektrizität aus, deren Ladungen entsprechend der atomistischen Auffassung alle dieselbe Grösse haben. Negative Elementarquanta kennen wir im freien Zustande und bezeichnen sie dann als Elektronen; ausserdem kennen wir Verbindungen negativer Elementarquanta mit ponderabeln Molekülen; wir bezeichnen sie als negative Ionen. Zwischen der negativen und der positiven Elektrizität besteht der wesentliche Unterschied, dass positive Elementarquanta in freiem Zustande bisher nicht gefunden sind; wir kennen nur positive Ionen, untrennbare Verbindungen des darin angenommenen positiven Elementarquantums mit ponderabeln Molekülen. Auf der Existenz positiver und negativer Ionen beruhen

die Erscheinungen der elektrischen Leitung in Flüssigkeiten und Gasen, im wesentlichen also auch die Erscheinungen der Luftelektrizität. In der Tat hat die Theorie der Ionen der luftelektrischen Forschung neue Anschauungen, neue Ziele und Methoden zugeführt; daher ist es vielleicht nicht überflüssig, wenn den spezielleren Berichten über verschiedene Gebiete der luftelektrischen Forschung, welche für die Jahresversammlung der kartellierten Akademien erstattet werden sollen, eine allgemeine Orientierung über jene Theorie vorangeschickt wird.

1. Die elektrische Leitung der Flammen.

Die Tatsache, dass Flammen Leiter der Elektrizität sind, ist eine altbekannte. Genauer wurden die Verhältnisse dieser Leitfähigkeit von Giese untersucht; er zeigte, dass die Flammen nicht nach der Art metallischer Konduktoren leiten, dass ihr Leitvermögen vielmehr auf ähnlichen Verhältnissen beruht wie das der elektrolytischen Leiter. Die Flammengase enthalten, wenn auch in geringer Menge, positive und negative elektrische Teilchen; man kann annehmen, dass sie sich ähnlich wie die elektrolytischen Ionen durch Dissoziation neutraler Gasmoleküle bilden. Man hat diese Teilchen gleichfalls Ionen genannt; sie sind aber im allgemeinen nicht identisch mit den Ionen der elektrolytischen Leiter. Giese hat die Richtigkeit seiner Anschauung durch eine Reihe von Experimenten bewiesen. Eine genaue quantitative Prüfung konnte aber erst ausgeführt werden, nachdem auf grund der Gieseschen Vorstellung eine exakte Theorie der Flammenleitung ausgearbeitet war. Als das Ziel der Messungen erscheint dann eine Grösse, die wir als die Beweglichkeit der Ionen bezeichnen und die bei all unseren Betrachtungen eine fundamentale Rolle spielt. Um von ihrer Bedeutung eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, halten wir uns an den folgenden Versuch. Die Flamme brennt in breiter Fläche aus einem schnittförmigen Metallbrenner. Der Brenner sei isoliert und positiv geladen. Die in der Flamme enthaltenen negativen Ionen werden dann von dem Metalle des Brenners angezogen und die Flamme enthält einen Überschuss

positiver Ionen. Durch ihre wechselseitige Abstossung werden die positiven Ionen aus der Flamme in den umgebenden Raum hineingetrieben. Stellt man parallel mit der Flamme eine zu der Erde abgeleitete Metallplatte auf, so entsteht in dem Zwischenraum ein Strom positiver Elektrizität, der von der Flamme zu der Platte und von dieser zur Erde geht. Dabei ist die Bewegung der Ionen in dem zwischen Flamme und Platte befindlichen elektrischen Felde keine beschleunigte. Denn die Ionen bewegen sich mit einer gewissen Reibung zwischen den Molekülen der Luft und sie erlangen daher eine konstante Endgeschwindigkeit, bei der die beschleunigende elektrische Kraft durch die ihr entgegengesetzte Reibung gerade aufgehoben wird. Die Endgeschwindigkeit ist daher der auf die Ionen wirkenden elektrischen Kraft direkt proportional. Als Mass der elektrischen Kraft benützen wir die elektromagnetisch gemessene elektromotorische Kraft e, welche auf die Längeneinheit des von der Flamme bis zu der Platte sich erstreckenden elektrischen Feldes ausgeübt wird. Die konstante Endgeschwindigkeit der positiven Ionen, $\mathfrak{g}$, ist dann gleich der elektromotorischen Kraft e multipliziert mit einem konstanten Faktor U; $\mathfrak{g} = Ue$. Den Faktor U bezeichnen wir als die absolute Beweglichkeit der positiven Ionen. Sie kann berechnet werden, wenn der von der Metallplatte zur Erde fliessende Strom, das Potential der Flamme und die Distanz zwischen Flamme und Platte gemessen sind. Aus derartigen Messungen ergab sich $U = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm sec^{-1}. Die praktische Einheit von 1 Volt ist gleich 10^8 unserer elektromagnetischen Einheiten der elektromotorischen Kraft. Wenn also das Potential der Flamme so hoch gemacht wird, dass auf ein cm des von der Flamme zu der Metallplatte reichenden elektrischen Feldes eine Spannungsabnahme von 1 Volt kommt, so erlangen die positiven Ionen in diesem Felde eine Geschwindigkeit von 2,2 cm sec^{-1}. Nach derselben Methode ergab sich für die absolute Beweglichkeit negativer Flammenionen der Wert $V = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm sec^{-1}.[1]

[1] Child, Beiblätter zu den Ann. d. Phys. 1901. S. 554.

2. Ionisierung der Luft durch Röntgenstrahlen; die absoluten Beweglichkeiten der Luftionen.

Schon Röntgen selbst hatte die Beobachtung gemacht, dass Luft, durch welche die von ihm entdeckten Strahlen hindurchgingen, geladene Konduktoren, positive so gut wie negative, ihrer Elektrizität zu berauben vermag. Es lag nahe, auch in unserm Falle die Leitfähigkeit der Luft durch die Gegenwart von positiven und von negativen Ionen zu erklären, welche durch Röntgenstrahlen aus den neutralen Molekülen der Luft erzeugt werden. Die ersteren bedingen die Zerstreuung der negativen, die letzteren die der positiven Elektrizität. In der Tat gelingt es auf grund dieser Vorstellung von allen Einzelheiten der Beobachtungen Rechenschaft zu geben. Über diese selbst und über die zum Teil sehr eigentümlichen Erscheinungen, auf welche sie sich beziehen, möge folgendes berichtet werden.

Wir stellen zwei Metallplatten einander parallel gegenüber, so dass die eine mit dem positiven, die andere mit dem negativen Pol einer galvanischen Säule verbunden werden kann. Der Zwischenraum der Platten werde mit Röntgenstrahlen durchleuchtet. Unter ihrer Wirkung entstehen fortwährend Ionen in der zwischen den Platten befindlichen Luft. Sind die Metallplatten nicht geladen, so unterliegen die Ionen lediglich den anziehenden und abstossenden Kräften, die sie wechselseitig auf einander ausüben. Wir nehmen an, dass die Ionen in dem von Luft erfüllten Raume sich so bewegen wie Moleküle eines fremden Gases, das in geringer Menge der Luft beigemischt ist. Die ungeordnete Bewegung der Ionen wird in jedem Augenblicke eine gewisse Zahl von positiven und von negativen Ionen in unmittelbare Nachbarschaft bringen. Die anziehenden Kräfte, mit denen ungleichnamige Ionen auf einander wirken, werden dann zu ihrer Vereinigung zur Bildung neutraler Moleküle führen. Wir haben darnach in dem durchstrahlten Raume mit zwei verschiedenen, einander entgegen wirkenden Prozessen zu tun. Einerseits werden fortwährend Ionen erzeugt, vermutlich

infolge von Dissoziation neutraler Gasmoleküle; andererseits werden durch die elektrische Anziehung entgegengesetzte Ionen immer wieder zu neutralen Molekülen vereinigt. Beide Prozesse müssen sich mit einander ins Gleichgewicht setzen, so dass die Zahl der in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, erzeugten Ionen gerade so gross ist wie die Zahl der in derselben Zeit verschwindenden.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Platten, die den Gasraum begrenzen, mit den Polen einer galvanischen Batterie verbunden werden, wenn also die Ionenbildung in einem elektrischen Felde vor sich geht. Nun kommt noch eine elektrische Kraft hinzu, welche alle positiven Ionen nach der Kathode, alle negativen nach der Anode treibt. Die durch Röntgenstrahlen erzeugten Ionen verschwinden also in diesem Falle aus zwei Gründen; einmal durch Wiedervereinigung entgegengesetzter Ionen, sodann durch Fortführung und Ausscheidung infolge der elektromotorischen Kraft im Zwischenraume der Platten. Die Zahl der Ionen, die in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sek., entstehen, ist gleich der Summe der wieder vereinigten und der an den Elektroden abgeschiedenen. Das Verhältnis dieser beiden Teile kann je nach den Umständen des Versuches ein sehr verschiedenes sein. Wir wollen zwei extreme Fälle betrachten.

Wir nehmen zuerst an, die elektromotorische Kraft sei von vornherein verhältnismässig gross und werde im Verlaufe des Versuches noch mehr gesteigert. Die Zahl der durch den Strom ausgeschiedenen Ionen wird dann in entsprechender Weise zunehmen; dagegen wird die Zahl der wieder vereinigten abnehmen, da die Summe der beiden Teile dieselbe bleiben muss. Durch Steigerung der elektromotorischen Kraft können wir es schliesslich dahin bringen, dass alle Ionen, die in einer Sekunde entstehen, in derselben Zeit durch den Strom an den Elektroden ausgeschieden werden. Wenn einmal dieser Punkt erreicht ist, so kann eine weitere Steigerung der elektromotorischen Kraft keine Steigerung des Stromes mehr zur Folge haben; denn auch die stärkere Kraft kann nicht mehr bewirken, als dass alle in einer bestimmten Zeit erzeugten Ionen zur

Unterhaltung des Stromes während dieser Zeit verbraucht werden. Man hat dann den eigentümlichen Fall eines von der elektromotorischen Kraft unabhängigen Stromes, den man als den Sättigungsstrom bezeichnet.

Die Zahl der positiven oder der negativen Ionen, welche in 1 sec in einem ccm entstehen, die Ionisirungsstärke,[1]) möge durch q bezeichnet werden; Ω sei das Volumen des durch die Elektrodenplatten begrenzten Luftraumes. Dann ist $q\,\Omega$ die Zahl der positiven Ionen, die in 1 sec an der Kathode, die Zahl der negativen, die gleichzeitig an der Anode durch den Sättigungsstrom abgeschieden werden. Wir machen die schon in der Einleitung erwähnte, später ausführlicher zu begründende Annahme, dass die elektrostatische Ladung aller Ionen ihrem absoluten Betrag ε nach dieselbe sei; dann sind die Mengen von positiver und von negativer Elektrizität, die in einer Sekunde an der Kathode bezw. an der Anode abgeschieden werden, gleich $\varepsilon\, q\, \Omega$. Gerade so gross ist die Menge von positiver und von negativer Elektrizität, welche in einer Sekunde durch den Querschnitt der die Metallplatten mit den Polen der Säule verbindenden Drähte fliesst, d. h. die Stärke des Sättigungsstromes in elektrostatischem Masse. Bezeichnen wir diese durch $\mathfrak{C}$, so ist: $\mathfrak{C} = \varepsilon\, q\, \Omega$.

Den anderen extremen Fall erhält man, wenn die elektromotorische Kraft klein ist, so dass die Zahl der im Strome fortgeführten Ionen der Zahl der überhaupt vorhandenen gegenüber verschwindet. In diesem Falle sind die Verhältnisse bei dem durchstrahlen Gase ganz analog denen eines elektrolytischen Leiters. Der Strom ist der elektromotorischen Kraft proportional; das Verhältnis beider Grössen stellt das elektrische Leitvermögen dar, ganz wie bei einem Elektrolyten.

Wir müssen uns darauf beschränken, in diesem Falle die Resultate der theoretischen Untersuchung anzuführen. Das Leitvermögen der ionisierten Luft ist darnach, wie man übrigens von vornherein vermuten kann, proportional der Summe $U + V$

---

[1]) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen. S. 43.

der absoluten Beweglichkeiten der positiven und der negativen Ionen, ausserdem proportional der Zahl und der elektrischen Ladung der in der Volumeinheit enthaltenen positiven oder negativen Ionen. Die elektromotorische Kraft der Säule, deren Pole mit den beiden Metallplatten verbunden sind, kann leicht gemessen werden, ebenso die Stärke des durch sie erzeugten Stromes; das Verhältnis beider Grössen gibt das Leitvermögen der ionisierten Luft. Bestimmt man ausserdem direkt die Gesamtladung aller zwischen den Elektrodenplatten vorhandenen Ionen, so lässt sich aus dem Leitvermögen die Summe $U+V$ der Ionenbeweglichkeiten berechnen.

Das Verhältnis der Beweglichkeiten, der Wert von V/U, kann aus einer Beobachtung über den Sättigungsstrom abgeleitet werden. Bei diesem häufen sich die negativen Ionen gegen die Anode, die positiven gegen die Kathode hin an. Es gibt aber in dem Zwischenraum eine Stelle, an welcher die Dichte der beiden Ionenarten gleich ist, an der sich keine räumliche elektrische Ladung findet. Diese Stelle verschiebt sich um so weiter nach der Anode, je grösser die Beweglichkeit der negativen Ionen im Vergleich mit der der positiven wird. Das Verhältnis der Abstände jener neutralen Stelle von den beiden Elektroden ist gleich dem Verhältnis der Beweglichkeiten. Ausser auf dem hierdurch gegebenen Wege hat man das Verhältnis der Beweglichkeiten noch auf andere Weisen bestimmt; doch würde es zu weit führen darauf einzugehen.

Aus den Werten von $U+V$ und V/U kann man dann die Zahlen U und V selber berechnen, die wir als Beweglichkeiten der Ionen bezeichnet haben. So ergab sich in trockener Luft für die absolute Beweglichkeit der positiven Ionen eine Zahl von $1{,}34 \cdot 10^{-8}$ cm in der Sekunde, für die der negativen die etwa $1^1/_2$ mal grössere Zahl von $1{,}93 \cdot 10^{-8}$ cm in der Sekunde. Diese Beweglichkeiten sind von derselben Ordnung wie bei den Flammenionen; sie sind etwa 500 mal grösser als die Beweglichkeit des Wasserstoffions in elektrolytischer Lösung. Der Grund des grossen Unterschiedes liegt nicht in der Natur der Ionen selber, sondern in der Verschieden-

heit der Reibungswiderstände, welche Luft und Wasser ihrer Bewegung entgegensetzen.[1])

In der Tat werden wir in den folgenden Abschnitten zeigen, dass zwischen den Ionen der Elektrolyte und den Ionen der Gase in einem Punkte vollkommene Übereinstimmung herrscht. Die Ladung elektrolytischer Ionen ist dieselbe wie die der Gasionen.

3. Die Ladung elektrolytischer Ionen.

Bei elektrolytischen Ionen lässt sich die Ladung leicht berechnen. Der Strom von 1 Ampère entwickelt in einer Sekunde 0,116 ccm Wasserstoff unter Atmosphärendruck und bei einer Temperatur von 0°. Denken wir uns die Wasserstoffmoleküle in Wasserstoffionen zerlegt, so ergeben sich 0,232 ccm erfüllt von Wasserstoffionen. Der Strom von 1 Ampère führt aber in einer Sekunde 3 Milliarden elektrostatische Einheiten durch den Querschnitt des Leiters. Ebenso gross muss die Gesamtladung der Wasserstoffionen sein, die von dem Strome von 1 Ampère in einer Sekunde ausgeschieden werden. Daraus folgt für die Ladung eines ccm, das bei Atmosphärendruck und bei einer Temperatur von 0° mit Wasserstoffionen gefüllt ist, ein Betrag von 13 Milliarden elektrostatischer Einheiten. Um einen Anhaltspunkt für die Beurteilung dieser enormen Ladung zu geben, bemerke ich, dass man auf einer Siegellackschicht von 1 qcm Inhalt durch starke Reibung eine Ladung von etwa 6 Einheiten erzeugen kann.

Bei den Ionen der Luft oder anderen Gasen kann die Bestimmung der Ladung nur auf einem schwierigen Umwege erreicht werden, der uns zuerst zu der Untersuchung einer neuen Eigenschaft der Ionen, ihrer Diffusion, führt.

---

[1]) Wegen ausführlicher Nachweise der zu diesen und zu den folgenden Abschnitten gehörenden Litteratur sei verwiesen auf: Riecke, Lehrbuch der Physik. II. Aufl. 1902. II. Bd. S. 346. Stark, Elektrizität in Gasen. S. 243 ff.

4. Die Diffusion der Ionen.

Um zu verstehen, um was es sich dabei handelt, betrachten wir den folgenden Versuch. Zwischen zwei einander in kleinem Abstande gegenüberstehenden Platten lassen wir einen Strom ionisierter Luft durchstreichen; die Platten seien beide mit der Erde in leitender Verbindung; in ihrem Zwischenraume finde keine Neubildung von Ionen statt. Aus den Beobachtungen folgt, dass die Zahl der Ionen in dem Luftstrome um so kleiner wird, je weiter er in dem Zwischenraume der Platten vorrückt. Dabei wirken im allgemeinen drei verschiedene Ursachen zusammen. Einmal werden fortdauernd entgegengesetzt elektrische Ionen zu neutralen Molekülen sich verbinden. Zweitens können Ionen durch elektrische Kräfte gegen die Metallplatten getrieben werden; wenn sie mit ihnen zur Berührung kommen, verlieren sie ihre elektrische Ladung und verschwinden als Ionen. Die dritte und hauptsächlichste Ursache besteht in dem, was wir als Diffusion der Ionen bezeichnen. Zunächst werden Ionen, die sich in unmittelbarer Nähe der Platten befinden, einfach infolge ihrer molekularen Bewegung gegen die Platten stossen und verschwinden, ein Vorgang, den man als Adsorption[1]) der Ionen bezeichnet. Es bildet sich so eine Ungleichförmigkeit der Ionendichte in dem Zwischenraum der Platten aus; die Dichte wird an der Oberfläche der Platten sehr klein im Vergleiche mit der Dichte, wie sie in der Mitte zwischen den Platten vorhanden ist. Diese Unterschiede suchen sich auszugleichen; die Ionen wandern von der Mitte nach den Platten, wo sie bei der Berührung mit den Metallflächen verschwinden. Der Vorgang ist ganz ähnlich der Diffusion eines gelösten Stoffes in reinem Wasser. Wir bezeichnen daher auch die durch Konzentrationsunterschiede bedingte Bewegung der Ionen als Diffusion. Ihr Gesetz ist dasselbe wie das der Diffusion in einer Lösung. Es wird dadurch die Menge der Ionen bestimmt, die in einer Sekunde durch eine Fläche von einem qcm hindurchgehen, wenn diese senkrecht zu der Richtung des Diffu-

[1]) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen. S. 373.

sionsstromes gestellt wird. Jene Menge ist nun nach dem Diffusionsgesetze gleich der Abnahme der Konzentration auf der Länge von 1 cm multipliziert mit einer konstanten Zahl, die man als den Diffusionskoëffizienten bezeichnet. Will man diesen Koëffizienten durch Beobachtungen an dem zwischen den Platten durchgehenden Luftstrome bestimmen, so muss man dafür sorgen, dass der Ionenverlust durch Wiedervereinigung und durch elektrische Feldwirkung verschwindet. Diess ist in der Tat der Fall, wenn man den Zwischenraum zwischen den Platten sehr eng macht. Man kann nun das elektrische Leitvermögen der durch den Zwischenraum der Platten streichenden Luft bestimmen, ehe sie in den Raum eintritt und nachdem sie ihn verlassen hat. Die Abnahme des Leitvermögens gibt Aufschluss über die Abnahme des Ionengehaltes. Diese aber ist eine Folge der Diffusion und man übersieht daher die Möglichkeit, den Diffusionskoëffizienten der Ionen aus den Beobachtungen zu berechnen. Auf diesem Wege ergibt sich, dass der Diffusionskoëffizient der positiven Ionen in trockener Luft 0,028, der der negativen 0,043 beträgt. Man kann dieses Ergebnis der Beobachtungen in folgender Weise ausdrücken: Wäre das Konzentrationsgefälle, die Abnahme der Ionendichte auf der Strecke von 1 cm gleich 1000, so würden in einer Sekunde 28 positive und 43 negative Ionen durch eine Fläche von 1 qcm in der Richtung des Gefälles hindurchgehen. Diese Beträge sind millionenmal grösser als die bei der Diffusion von Salzlösungen beobachteten, dagegen kleiner als die bei der gewöhnlichen Gasdiffusion vorkommenden.

5. Die Ladung der Gasionen.

Von dieser nicht zu vermeidenden Zwischenbetrachtung kehren wir nun zu der ursprünglichen Aufgabe, der Berechnung der Ionenladung zurück. Die Möglichkeit ihrer Lösung beruht auf einem Zusammenhange, der zwischen den Beweglichkeiten der Ionen und zwischen ihren Diffusionskoëffizienten besteht. Man kann nämlich die Gleichungen für die Bewegung der Ionen in einem elektrischen Felde und für ihre Diffusion

auf eine gemeinsame Form bringen. Bei beiden Vorgängen handelt es sich schliesslich um Geschwindigkeiten, die den Ionen durch auf sie wirkende Kräfte erteilt werden. Diese Kräfte sind das eine Mal elektrischer Natur, das andere Mal entspringen sie der Ungleichförmigkeit der Ionendichte. In beiden Fällen kann man die Gleichungen so schreiben, dass sie die Geschwindigkeit angeben, welche durch die Krafteinheit erzeugt wird. Der hiefür geltende Ausdruck hängt dann das eine Mal von den Beweglichkeiten, das andere Mal von den Diffusionskoëffizienten der Ionen ab. Setzt man die gefundenen Werte einander gleich, so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen jenen Grössen. Man findet, dass die elektrische Ladung eines ccm, das bei normalen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur von Ionen der einen oder der anderen Art erfüllt ist, aus dem Verhältnisse der Beweglichkeiten zu den Diffusionskoëffizienten sehr einfach zu berechnen ist. Man hat dieses Verhältnis nur mit der Lichtgeschwindigkeit und mit dem Atmosphärendrucke zu multiplizieren, um jene Ladung zu erhalten. Man findet dieselbe Zahl von 13 Milliarden elektrostatischer Einheiten wie früher bei den elektrolytischen Ionen. Man kann aus dieser Übereinstimmung den Schluss ziehen, dass auch die Ladung der einzelnen Gasionen dieselbe ist wie die der einzelnen elektrolytischen Ionen; denn die Zahl der in einem ccm enthaltenen Ionen muss unter den von uns gemachten Voraussetzungen in allen Fällen dieselbe sein. Jene Ladung würde also eine allen Ionen gemeinsame Naturkonstante darstellen, die wir als das elektrische Elementarquantum bezeichnen.

6. Das elektrische Elementarquantum.

Es liegt nahe noch einen Schritt weiter zu gehen, und die einem einzelnen Ion zukommende Ladung, das elektrische Elementarquantum, wirklich zu berechnen. Zu diesem Zwecke muss man die Zahl der Ionen kennen, die bei normalen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur in einem ccm enthalten sein würden. Wir setzen voraus, dass

sich die Ionen so verhalten wie die Moleküle eines neutralen Gases. Nach dem Gesetze von Avogadro ist aber die Zahl der Moleküle, die bei gegebenen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur in einem ccm enthalten sind, bei allen Gasen die gleiche. Nach unserer Voraussetzung gibt dieselbe Zahl auch an, wie viel Ionen unter den gegebenen Umständen in einem ccm enthalten sind. Die fragliche Zahl wurde zuerst von Loschmidt aus Betrachtungen abgeleitet, deren nicht allzu sichere Grundlagen der kinetischen Gastheorie angehören. Ein besserer Weg zur Bestimmung der Loschmidtschen Zahl wurde neuerdings von Planck aufgefunden. Er geht aus von dem Gesetze, durch welches die Strahlung eines schwarzen Körpers in ihrer Abhängigkeit von Temperatur und Wellenlänge dargestellt wird. Einer der konstanten Koëffizienten dieses Gesetzes ist mit der Zahl der Gasmoleküle oder der Ionen in einem ccm proportional. Der Wert des Koëffizienten kann aus den Strahlungsmessungen auf experimentellem Wege bestimmt werden; aus ihm folgt dann die Loschmidtsche Zahl. Wir können darnach annehmen, dass in einem ccm unter normalen Verhältnissen 28 Trillionen Gasmoleküle oder Ionen enthalten sind. Wir haben früher gefunden, dass die elektrische Ladung eines ccm, das mit Ionen der einen oder der anderen Art bei normalen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur gefüllt ist, 13 Milliarden elektrischer Einheiten beträgt; für die Ladung eines einzelnen Ions, das elektrische Elementarquantum, ergibt sich hiernach ein Wert von 470 Billionstel elektrostatischer Einheiten.

7. Bestimmung des elektrischen Elementarquantums durch J. J. Thomson.

Das gefundene Resultat wurde auf eine sehr merkwürdige Art von J. J. Thomson bestätigt. Er benützte dabei eine Eigenschaft der Ionen, die bei den meteorologischen Prozessen der Atmosphäre eine wichtige Rolle spielt. Wenn Ionen in Luft sich befinden, die in gewissem Grade mit Wasserdampf übersättigt ist, so bilden sie Kerne, um welche der Wasserdampf

in Tröpfchen sich niederschlägt. Gelingt es also die unter diesen Umständen in einem gegebenen Luftraume gebildete Zahl von Wassertröpfchen zu bestimmen, so hat man damit zugleich die Zahl der Ionen. Die Zahl der Tröpfchen ergibt sich aus dem Gesamtgewichte des kondensierten Wasserdampfes einerseits, dem Gewichte des einzelnen Tröpfchens andererseits. Dieses letztere wurde auf eine sehr sinnreiche Weise ermittelt. Die mit Wasserdampf übersättigte Luft war in einem Glaskolben eingeschlossen; sie wurde durch Röntgenstrahlen ionisiert. Die Kondensation des Wasserdampfes erzeugt einen Nebel in dem Gefässe, der sich langsam zu Boden senkt. Die Geschwindigkeit, mit der diess geschieht, hängt von dem Gewichte der einzelnen Tröpfchen ab und es ist möglich aus der beobachteten Geschwindigkeit jenes Gewicht zu berechnen. Dividiert man das Gesamtgewicht des kondensierten Dampfes durch das Gewicht eines Tröpfchens, so erhält man die Zahl der Tröpfchen und damit auch die Zahl der gebildeten Ionen. Bestimmt man noch ihre ganze elektrische Ladung, so ergibt sich auch die des einzelnen Ions. Thomson fand hiefür einen Wert von 720 Billionstel elektrostatischer Einheiten. Bedenkt man die Schwierigkeiten der Messung, so muss man die Übereinstimmung mit dem vorher angegebenen Werte als eine befriedigende bezeichnen.

8. Die mechanische Masse der Gasionen und ihre molekulare Geschwindigkeit.

Durch die bisher geschilderten Untersuchungen sind unsere Anschauungen von der Natur der Gasionen zu einem gewissen Abschlusse gelangt; sie sind aber nicht so bestimmt wie unsere Kenntnisse von der Natur der elektrolytischen Ionen. Bei den letzteren kennen wir die chemische Konstitution; wir wissen, wie die neutralen Moleküle in Ionen sich spalten; wir kennen die Masse der elektrolytischen Ionen. Die chemische Natur der Gasionen ist der direkten Untersuchung bisher ebenso unzugänglich geblieben wie ihre Masse. Dagegen gewährt die kinetische Theorie der Gase die Möglichkeit, auf einem allerdings

unsicheren und umständlichen Wege eine gewisse Vorstellung von der Masse der Gasionen zu gewinnen. Ein erster wohlbegründeter Satz jener Theorie sagt aus, dass die lebendige Kraft der Gasmoleküle der absoluten Temperatur des Gases proportional ist. Haben verschiedene Gase gleiche Temperatur, so verhalten sich darnach die Quadrate der Geschwindigkeiten, mit denen sich die Gasmoleküle in ihren molekularen Bahnen bewegen, umgekehrt wie ihre Massen. Nun haben wir angenommen, dass auch die Ionen in gasförmigem Zustande sich befinden. Kennen wir ihre molekulare Geschwindigkeit, so kann das Verhältnis ihrer Masse zu der Masse der neutralen Gasmoleküle leicht berechnet werden. Es tritt damit ein neues Element in den Kreis unserer Interessen, die von der Beweglichkeit wohl zu trennende molekulare Geschwindigkeit der Ionen. Diese Geschwindigkeit hängt nun in verhältnismässig einfacher Weise mit dem Koëffizienten der Diffusion zusammen. Man wird es von vornherein wahrscheinlich finden, dass die Diffusion um so schneller vor sich geht, je grösser jene Geschwindigkeit ist. Es kommt aber noch ein anderer Umstand in Betracht. Bei ihrer Bewegung zwischen den Molekülen der Luft stossen die Ionen immer aufs neue mit Luftmolekülen zusammen; zwischen zwei Zusammenstössen bewegen sie sich in geraden Linien; jeder Zusammenstoss bewirkt eine Ablenkung aus der früheren Bewegungsrichtung und so besteht die Bahn des Ions ebenso wie die eines Gasmoleküls aus einzelnen geraden Stücken, die sich zickzackförmig an einander reihen. Die mittlere Länge dieser geraden Stücke nennen wir molekulare Weglänge der Ionen. Die Diffusion hängt auch von dieser Weglänge ab und zwar so, dass sie um so rascher fortschreitet, je grösser die Weglänge ist. In der Tat zeigt eine genauere Untersuchung, dass der Koëffizient der Diffusion gleich $^2/_9$ des Produktes aus molekularer Geschwindigkeit und Weglänge ist. Die Aufgabe die Geschwindigkeit zu ermitteln ist damit auf die Bestimmung der Weglänge reduziert.

Wir wissen aus der kinetischen Theorie der Gase, wie

gross die mittlere Weglänge der Luftmoleküle ist. In unserem Falle aber handelt es sich um die Weglänge der Ionen, die der Luft oder einem anderen neutralen Gase in verhältnismässig kleiner Zahl beigemischt sind. Mit Hilfe einer von Maxwell aufgestellten Formel ist es möglich die Weglänge der Ionen mit der der Luftmoleküle zu vergleichen. Der Faktor aber, mit dem die letztere zu multiplizieren ist, um die Weglänge der Ionen zu erhalten, hängt nicht bloss selber wieder von der Molekulargeschwindigkeit der Ionen ab, sondern enthält überdiess noch eine neue unbekannte Grösse, den Molekulardurchmesser der Ionen, genauer gesagt das Verhältnis dieses Durchmessers zu dem Durchmesser der Luftmoleküle. Es bleibt also nichts übrig, als für dieses Verhältnis willkürlich eine Reihe verschiedener Annahmen zu machen und für jede derselben die Rechnung durchzuführen. Aus dem Ergebnisse der Rechnung kann man mit ziemlicher Sicherheit die folgenden qualitativen Schlüsse ziehen: Die Weglänge der Ionen ist kleiner als die Weglänge der Luftmoleküle, ebenso ihre molekulare Geschwindigkeit; die Masse der Ionen aber ist grösser als die Masse der Luftmoleküle.

Aus dem letzteren sehr überraschenden Ergebnisse folgt, dass mit der Spaltung neutraler Luftmoleküle in positive und negative Ionen eine Bildung komplexer Moleküle Hand in Hand gehen muss. Vergleichen wir die Eigenschaften der positiven und der negativen Ionen, so ergeben sich die folgenden Sätze: Die Weglänge der negativen Ionen ist grösser als die der positiven, ebenso ihre molekulare Geschwindigkeit; die Masse der negativen Ionen ist kleiner als die der positiven. Über diese qualitativen Resultate kann man nur hinauskommen, wenn man noch eine weitere hypothetische Annahme hinzufügt. Man kann z. B. annehmen, dass das Verhältnis zwischen Masse und Volumen bei den Ionen dasselbe sei wie bei den Molekülen der Luft; dann findet man, dass die Masse der positiven Ionen dreimal, die der negativen zweimal so gross ist als die der Luftmoleküle. Gleichzeitig ergibt sich für die molekulare Geschwindigkeit der positiven Ionen ein

Wert von 280 Metern in der Sekunde, für die der negativen ein Wert von 340 Metern.[1])

9. Ionisierung durch Kathodenstrahlen.

Wir wenden uns nun zu Untersuchungen, durch welche die Ergebnisse der bisherigen Betrachtung nach einer ganz anderen Seite hin ergänzt werden. Als Quellen der Ionisierung haben wir bisher nur die Flammen und die Röntgenstrahlen kennen gelernt. Es gibt aber noch eine Reihe anderer Vorgänge, durch welche in einem neutralen Gase Ionen erzeugt werden.

Bei der Ionenbildung in Flammen kann die Ursache der Erscheinung in den chemischen Prozessen liegen, die sich in der Flamme abspielen; die Ionisierung kann auch eine einfache Folge der erhöhten Temperatur sein. Für die letztere Auffassung spricht der Umstand, dass die Luft auch durch erhitzte Metalle ionisiert werden kann.

Eine sehr wichtige Beobachtung, welche nach verschiedenen Seiten hin aufklärend gewirkt und eine neue Quelle der Ionisierung aufgedeckt hat, verdanken wir Lenard. Es gelang ihm zunächst die Kathodenstrahlen, die in hochevakuierten Geisslerschen Röhren von der negativen Elektrode ausgesandt werden, in die freie Luft austreten zu lassen. Es beruht diess auf der Fähigkeit jener Strahlen dünne Metallschichten z. B. Aluminiumblatt zu durchdringen. Man verschliesst die Geisslersche Röhre auf der der Kathode gegenüberliegenden Seite mit einer Metallplatte, die in der Mitte eine kleine Oeffnung hat; diese wird mit einem Aluminiumblatt überdeckt. Man lässt nun aus diesem Aluminiumfenster Kathodenstrahlen in die Luft austreten. Stellt man vor das Fenster ein geladenes Elektroskop, so wird dieses entladen gleichgültig, welches das Zeichen der ihm mitgeteilten Elektrizität ist. Die Wirkung beruht darauf, dass die Kathodenstrahlen in der Luft Ionen erzeugen. Die

[1]) Riecke, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, math.-phys. Kl. 1903. Heft II.

Kathodenstrahlen selber bestehen aus negativ elektrischen Teilchen, Elektronen, deren Masse überaus klein, etwa 2000 Mal kleiner als die eines Wasserstoffatomes ist. Durch die abstossenden Kräfte, die von der negativen Ladung der Kathode ausgehen, werden sie von der letzteren gelöst und erlangen in dem vor der Kathode sich ausbreitenden elektrischen Felde eine sehr grosse der Lichtgeschwindigkeit sich nähernde Geschwindigkeit. Durch ihren Stoss zerlegen sie die Moleküle der Luft in positiv und negativ elektrische Bestandteile; diese müssen sich dann wieder mit neutralen Molekülen der Luft verbinden, um die Ionen zu bilden, welche, wie wir gesehen haben, ein grösseres Gewicht als die Moleküle der Luft besitzen.

10. Ionisirung durch ultraviolette Strahlen.

Die ionisierende Wirkung der Kathodenstrahlen erklärt in überraschender Weise eine andere von Hallwachs entdeckte Tatsache. Wenn man eine negativ geladene Metallplatte mit ultraviolettem Lichte bestrahlt, so verliert sie ihre Ladung sehr schnell. Bei positiver Ladung tritt keine Änderung in den Verhältnissen der Zerstreuung ein. Lenard hat gezeigt, dass die Erscheinung nicht durch eine unmittelbare Wirkung des ultravioletten Lichtes erzeugt wird. Die primäre Wirkung besteht darin, dass die in der Platte absorbierten Lichtstrahlen Kathodenstrahlen aus dem Metalle entwickeln. Diese führen negative Elektrizität mit sich fort und bedingen dadurch die rasche Zerstreuung der Ladung. Dazu trägt aber noch ein zweiter Umstand bei; die Elektronen, die sich von dem Metalle lösen, stossen auf die Moleküle der Luft und erzeugen positive und negative Ionen. Die positiven werden von der negativ elektrischen Metallplatte angezogen und neutralisieren einen Teil ihrer Ladung. Die negativen Ionen werden abgestossen und entfernen sich von der Platte, bis sie ihre Ladung an irgend welche in der Umgebung befindliche Konduktoren abgeben.

Aus den Beobachtungen von Lenard folgt noch eine andere wichtige Tatsache. Die ionisierende Wirkung von Kathodenstrahlen, die aus einer negativ geladenen Metallplatte

durch Belichtung in einem luftverdünnten Raum entwickelt werden, hört auf, wenn die Spannung der Platte weniger als 11 Volt beträgt. Die Geschwindigkeit, welche die Elektronen unter diesen Umständen erreichen, ist etwa 200 Mal kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Bei noch kleineren Geschwindigkeiten sind also die Elektronen nicht mehr imstande die neutralen Moleküle der Luft in Ionen zu zerlegen.

11. Ionisierung durch Becquerelstrahlen; Becquerelstrahlen und Kathodenstrahlen.

Auf die im vorhergehenden betrachtete Eigenschaft der Kathodenstrahlen reduziert sich noch eine Erzeugungsart der Ionen, die für uns von hervorragendem Interesse ist, die Erzeugung der Ionen durch Becquerelstrahlen. Die Entdeckung dieser Strahlen knüpft sich zuerst an eine von Becquerel beobachtete Tatsache: das metallische Uran besitzt die Fähigkeit geladene Konduktoren, die in seine Nähe gebracht werden, ihrer Elektrizität zu berauben. Es zeigte sich, dass diese Eigenschaft nicht dem Uran selber zukommt, sondern gewissen Metallen, die allerdings in verschwindender Menge in den Uranerzen sich finden. Man hat insbesondere von zwei solchen Metallen Verbindungen in annähernder Reinheit dargestellt, von dem Radium und dem Polonium. Das erste ist in seinen chemischen Reaktionen nahezu identisch mit dem Baryum, der zweite mit dem Wismuth. Ausser in den Erzen des Urans finden sich diese Metalle auch in thorhaltigen Mineralien. Körper, welche wie das Radium und das Polonium die Eigenschaft haben geladene Konduktoren zu entladen, nennen wir radioaktiv. Die weitere Untersuchung hat gezeigt, dass die radioaktiven Substanzen Strahlen aussenden, die im wesentlichen identisch sind mit den Kathodenstrahlen. Wie diese erregen sie Fluoreszenz und besitzen photographische Wirkungen; wie diese erzeugen sie Ionen und darauf beruht ihre entladende Wirkung; sie unterscheiden sich aber von den Kathodenstrahlen durch die sehr viel grössere Geschwindigkeit, mit der sich die Elektronen in ihnen bewegen. Nach den Messungen von

Kaufmann steigt diese von 80 bis auf 95 Prozent der Lichtgeschwindigkeit. Zugleich hat sich aber noch ein anderes höchst überraschendes Resultat ergeben. Bei den Kathodenstrahlen ist die Masse der sie bildenden Elektronen konstant d. h. unabhängig von ihrer Geschwindigkeit; bei den Becquerelstrahlen dagegen wird diese Masse um so grösser, je grösser ihre Geschwindigkeit ist. Diese Veränderlichkeit der Masse widerspricht einem fundamentalen Prinzipe der Physik. Abraham hat den Widerspruch durch eine mit den Beobachtungen gut übereinstimmende Theorie in folgender Weise gehoben. Die Elektronen besitzen nach ihm überhaupt keine Masse in dem gewöhnlichen mechanischen Sinne. Sie erzeugen aber durch ihre Bewegung elektrische und magnetische Veränderungen in dem sie umgebenden Felde; diese wirken auf die bewegten Elektronen zurück mit einer Kraft, die der Beschleunigung proportional und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. So kommt es, dass die Elektronen sich bewegen, als ob sie mechanische Masse besässen; aber diese Masse ist abhängig von der Geschwindigkeit und von den elektromagnetischen Eigenschaften des die Elektronen umgebenden Raumes, sie ist nicht mechanischer sondern elektromagnetischer Natur. Körper, welche Becquerelstrahlen aussenden, verlieren hiernach nichts von ihrer ponderabeln Masse. Betrachten wir die negative Elektrizität als einen Bestandteil des Äthers, so stellen sich Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen als reine Vorgänge in diesem dar, als Vorgänge, die man dem Fortschreiten eines Wirbels in einer Flüssigkeit vergleichen kann. Es unterliegt keinem Zweifel, dass man damit der Wellentheorie der Kathodenstrahlen, wie sie von Hertz bevorzugt worden war, wieder näher gerückt ist.

12. Induzierte Radioaktivität.

Wir sind durch die letzten Betrachtungen über das gesteckte Ziel hinaus geführt worden, kehren aber nun zu der Untersuchung der Becquerelstrahlen zurück, um den früheren Bericht in einigen Punkten zu ergänzen. Zunächst ist zu bemerken, dass die Eigenschaft Becquerelstrahlen auszusenden nicht

an einen bestimmten Aggregatzustand gebunden ist. Herr und Frau Curie, denen zuerst die Darstellung von Radiumsalzen in annähernder Reinheit gelungen ist, haben aus Radiumpräparaten aktive Gase entwickelt. Als ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis führen wir an, dass Körper, die sich in der Nähe von Radiumpräparaten befinden, selber vorübergehend radioaktiv werden. Man bezeichnet die so erzeugte Aktivität als eine induzierte. Es handelt sich dabei nicht um eine unmittelbare Wirkung der Strahlen; denn der Erfolg tritt auch ein, wenn die zu aktivierenden Körper gegen direkte Strahlung geschützt sind. Man kann daran denken, dass zunächst in der Luft ein radioaktives Gas entstehe und dass dieses die damit zur Berührung gelangenden Körper aktiv mache.

Eine wichtige auf diese Verhältnisse bezügliche Beobachtung wurde von Rutherford gemacht. Er lud einen in der Nähe eines Thoriumpräparates befindlichen Draht mit negativer Elektrizität. Der Draht wurde dann radioaktiv. Rutherford löste die Oberflächenschicht des Drahtes in Salzsäure; wurde die Lösung eingedampft, so war der trockene Rückstand viel stärker radioaktiv als die Thorerde selber.

Elster und Geitel fanden, dass der Rutherfordsche Versuch auch in Luft gelingt. Wenn man einen Draht in Luft ausspannt, ihn negativ lädt und ein par Stunden exponiert, so wird er radioaktiv. Man kann die aktive Oberflächenschichte mit einem Lederlappen abwischen; sie wird dann auf eine verhältnismässig kleine Fläche konzentriert und kann nun auch durch die photographische Wirksamkeit der von ihr ausgesandten Strahlen nachgewiesen werden. Aus dem Versuche folgt, dass die radioaktiven Bestandteile der Luft, welche auf dem negativ elektrischen Drahte sich sammeln, selber positiv elektrisch sind.

Positive Ladung des ausgespannten Drahtes erzeugt nach den Versuchen von Elster und Geitel nur eine sehr schwache Aktivität.

13. Die Wiedervereinigung der Ionen und ihre maximale Dichte.

Wir haben schon darauf hingewiesen, dass der Bildung der Ionen eine fortwährende Wiedervereinigung ungleichnamiger Ionen zu neutralen Molekülen gegenübersteht. Man kann annehmen, dass die Zahl der Ionen, die sich im Laufe einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, mit einander verbinden, den Zahlen der vorhandenen positiven und negativen Ionen proportional ist. Wir bezeichnen die Dichte der positiven Ionen mit $\overset{+}{n}$, die Dichte der negativen mit $\overset{-}{n}$ und verstehen unter a eine konstante Zahl; die Zahl der neutralen Moleküle, die sich in dem Raume eines ccm in einer Sekunde bilden, die Zahl der positiven oder negativen Ionen, die in diesem Raume in einer Sekunde verschwinden, kann dann ausgedrückt werden durch $a\overset{+}{n}\overset{-}{n}$. Die Konstante a bezeichnen wir als die Konstante der Wiedervereinigung.

Eine Methode zur experimentellen Bestimmung von a ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Ein bestimmtes Volumen Luft werde durch Röntgenstrahlen ionisiert. Von dem Momente an, in dem ihre Wirkung beginnt, nimmt die Zahl der gebildeten Ionen zunächst zu. Aber nach kurzer Zeit stellt sich ein Gleichgewichtszustand her, bei dem in jeder Sekunde ebensoviel Ionen entstehen wie verschwinden. Die Zahl der vorhandenen Ionen hat dann ihren maximalen Betrag erreicht. Wir bezeichnen die Zahl der in einer Sekunde gebildeten positiven oder negativen Ionen, die Ionisierungsstärke, mit q. Vor der Einwirkung der Röntgenstrahlen habe die Luft weder positive noch negative Ionen enthalten; beide Arten von Ionen sind dann notwendig in gleicher Zahl vorhanden, wir haben $\overset{+}{n} = \overset{-}{n} = n$. Die Bedingung für den Gleichgewichtszustand ist:

$$q = a n^2.$$

Die Zahl von Ionen, die in dem ganzen gegebenen Luftraume in einer Sekunde gebildet werden, sei Q, die ganze Zahl von

positiven oder von negativen Ionen, die im Gleichgewichtszustande vorhanden sind, N; das Volumen des von den Röntgenstrahlen durchleuchteten Raumes sei Ω, dann ist:

$$Q = \Omega q, \qquad N = \Omega n, \quad \text{und} \quad \Omega Q = a N^2.$$

Bestimmt man die Werte von Q, N und Ω, so kann man mit Hilfe dieser Gleichung die Konstante a der Wiedervereinigung berechnen.

Nach dem hierdurch gegebenen Prinzipe hat Mc. Clung[1]) eine Bestimmung der Konstanten a ausgeführt. Das Volumen der ionisierten Luft war $\Omega = 479$ ccm. Er fand ferner:

$$Q = \frac{4{,}22}{\varepsilon}, \qquad N = \frac{0{,}77}{\varepsilon},$$

wo ε das im sechsten Abschnitte angegebene elektrische Elementarquantum bedeutet. Aus diesen Angaben folgt:

$$a = 3380 \cdot \varepsilon$$

oder, wenn wir für ε den früher angegebenen Wert $\varepsilon = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ setzen,

$$a = 1{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Für die Ionisierungsstärke und für die maximale Dichte der Ionen ergeben sich die Werte:

$$q = 19 \cdot 10^6, \qquad n = 3{,}4 \cdot 10^6.$$

Allgemein gilt für das Verhältnis der maximalen Dichte zu der Ionisierungsstärke der Ausdruck:

$$\frac{n}{q} = \frac{1}{\sqrt{a q}}.$$

Je nachdem q grösser oder kleiner ist als $0{,}62 \cdot 10^6$, ist n kleiner oder grösser als q.

Weitere wichtige Beziehungen zwischen den Grössen q, n und a ergeben sich aus der Geschwindigkeit, mit der die Ionen

---

1) Philos. Mag. 1902. Ser. 6. Bd. 3. S. 283.

verschwinden, wenn die Wirkung der Röntgenstrahlen plötzlich unterbrochen wird. Die Zeit T, innerhalb deren die Ionendichte auf die Hälfte ihres ursprünglichen Betrages, d. h. auf $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{a}}$ sinkt, ist gegeben durch:

$$T = \frac{1}{\sqrt{a\,q}}.$$

daraus folgt weiter für das Verhältnis zwischen maximaler Ionendichte und Ionisierungsstärke:

$$\frac{n}{q} = T.$$

Ist T kleiner als eine Sekunde, so ist auch n kleiner als q und umgekehrt.

Bei der Ionisierung von atmosphärischer Luft durch Röntgenstrahlen erhielt Rutherford für T einen Wert von 0,29 sec. Benützt man für a die von Mc. Clung ermittelte Zahl, so wird unter den Verhältnissen des Rutherfordschen Versuches:

$$q = 7{,}5 \cdot 10^6 \quad \text{und} \quad n = 2{,}2 \cdot 10^6,$$

Grössen von derselben Ordnung wie bei den Beobachtungen von Mc. Clung.

14. Ionen in der freien Atmosphäre.

Die bekannte Erscheinung der Elektrizitätszerstreuung, des allmäligen Verschwindens der einem Konduktor erteilten Ladung, pflegte man früher als eine Wirkung der in der Luft suspendierten Staubteilchen und Nebeltröpfchen zu erklären. Nun fanden aber Elster und Geitel, dass die Zerstreuung im Widerspruche zu dieser Vorstellung im allgemeinen um so kleiner ist, je mehr die Luft von Nebel und Staub erfüllt ist. Sie schlossen daraus, dass die Zerstreuung durch Ionen verursacht wird, die in der freien atmosphärischen Luft vorhanden sind. Von einem elektrischen Körper werden die mit ihm ungleichnamigen Ionen angezogen; sie geben ihre

Ladung an den Körper ab und neutralisieren mit der Zeit seine Elektrizität. Diese Vorstellung gibt nun Veranlassung zu zwei verschiedenen Reihen von Untersuchungen. Man wird einmal zeigen müssen, wie die Erscheinungen der atmospärischen Elektrizität aus den Eigenschaften der Ionen sich erklären, wie diese Eigenschaften durch Beobachtungen über atmosphärische Elektrizität bestimmt werden können. Auf der anderen Seite wird man nach den Quellen der Ionisierung zu suchen haben. Denn wenn die Ionen einen beständigen Teil der atmosphärischen Luft bilden, so muss auch eine ununterbrochen wirkende Ursache der Ionisierung vorhanden sein.

Was die erste Aufgabe, die Bestimmung der Eigenschaften der atmosphärischen Ionen, anbelangt, so erscheint als die wichtigste die Ermittelung ihrer Dichte, die Ermittelung der Zahl von positiven und von negativen Ionen, die sich in einem ccm Luft befinden. Diese Aufgabe wird gelöst durch den von Ebert konstruierten Aspirationsapparat. Man könnte annehmen, dass damit die ganze Frage erledigt sei, da ja die übrigen Eigenschaften der Ionen: Beweglichkeit, Diffusionskoëffizient, molekulare Geschwindigkeit und Masse ganz unabhängig von luftelektrischen Beobachtungen bestimmt werden können. Allein man darf die Ergebnisse, welche im Laboratorium mit trockener staubfreier Luft erhalten wurden, nicht ohne weiteres auf die freie atmosphärische Luft übertragen. Vielmehr scheint es wünschenswert die Eigenschaften der atmosphärischen Ionen für sich zu untersuchen. Von den Beobachtungen, die man zu diesem Zwecke benützen kann, wird in den folgenden Abschnitten die Rede sein.

In der Frage nach der Ursache der Ionisierung der atmosphärischen Luft bieten sich zwei verschiedene Möglichkeiten dar. Es kann sich um eine spontane Dissoziation neutraler Moleküle in positive und negative Ionen handeln ähnlich wie bei der Dissoziation der Elektrolyte. Die Ionisierung kann aber auch durch äussere Ursachen bedingt sein. Man wird dabei in erster Linie an radioaktive Substanzen denken. Die letztere Annahme wird insbesondere durch die Untersuchungen

von Elster und Geitel sowie von Ebert über die radioaktiven Eigenschaften der im Boden enthaltenen Luft gestützt. Möglich ist natürlich auch, dass beide Ursachen zusammenwirken. Die spontane Ionisierung würde sich dann auf alle Teile der Atmosphäre erstrecken, eine verstärkte Ionisierung überall da auftreten, wo radioaktive Substanzen auf die atmosphärische Luft wirken.

15. Elektrizitätszerstreuung in der Atmosphäre.

Die Methode, nach der wir die Elektrizitätszerstreuung in der atmosphärischen Luft messen, ist von Elster und Geitel ausgearbeitet worden. Man benützt dabei ein Aluminiumblattelektroskop, in dessen Innerem nur ein äusserst kleiner Elektrizitätsverlust stattfindet. Auf die metallene Säule, die zu ihren beiden Seiten die Aluminiumblätter trägt, setzt man mit Hilfe eines dünnen Stiftes einen Metallzylinder, den Zerstreuungskörper. Man lädt Körper und Elektroskop mit dem positiven oder dem negativen Pole einer Zumbonischen Säule und beobachtet dann die zeitliche Abnahme der Ladung. Dabei lässt man den Zerstreuungskörper entweder frei in der Luft oder man umgibt ihn mit einem zur Erde abgeleiteten Schutzzylinder, dessen obere Öffnung durch einen Deckel geschlossen wird. Im ersten Falle ist der Zerstreuungskörper elektrischen Störungen in der Umgebung oder in der Atmosphäre ausgesetzt, im zweiten Falle ist er davon frei.

Hat der Zerstreuungskörper zu irgend einer Zeit eine Ladung $\mathfrak{e}$ und nimmt die Ladung in einer Minute um den Betrag $\delta\,\mathfrak{e}$ ab, so nennt man das prozentisch berechnete Verhältnis:

$$100\,\frac{\delta\,\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}}$$

den Zerstreuungskoëffizienten. Bei einer positiven Ladung bezeichnet man den Zerstreuungskoëffizienten mit $\overset{+}{a}$, bei einer negativen mit $\overset{-}{a}$. Als ein wichtiges Resultat der Beobachtungen möge angeführt werden, dass an der Oberfläche der Erde die

Zerstreuung negativer Ladungen im ganzen stärker ist als die positiver. Man pflegt anzunehmen, dass im Mittel $\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}$ etwa gleich 1,1 sei; die Beobachtungen, welche Dr. Cuomo[1]) auf Capri von November 1901 bis Februar 1903 angestellt hat, geben im Mittel $\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}} = 1{,}010$, also einen viel kleineren Einfluss des Vorzeichens.

16. Über die Theorie der Elektrizitätszerstreuung.

I. Die Theorie der Zerstreuung kann nur in sehr wenigen Fällen in einfacher Weise entwickelt werden. Findet die Zerstreuung in freier ruhend gedachter Atmosphäre statt, so tritt kein stationärer Zustand ein. Zwar kann man die Geschwindigkeiten, welche den Ionen durch eine bestimmte Ladung des Zerstreuungskörpers erteilt werden, für jede Stelle des umgebenden Raumes berechnen; aber zu der durch elektrische Kräfte erzeugten Verschiebung kommt noch die Diffusionsbewegung hinzu; die Ionendichte hängt ausser von diesen Vorgängen noch von Neubildung und Wiedervereinigung ab. Sie verändert sich nicht nur von Ort zu Ort sondern auch von Zeit zu Zeit.

II. Einfacher gestalten sich die Verhältnisse, wenn sich der Zerstreuungskörper im Inneren eines vollkommen geschlossenen Raumes befindet. Bei der Entwickelung der Theorie wird man sich auf die Betrachtung eines Zeitraumes beschränken, innerhalb dessen die Ladung des Zerstreuungskörpers als unverändert betrachtet werden kann. Besitzt die Ladung eine hinreichende Grösse, so erhält man eine stationäre Strömung, im einfachsten Falle einen Sättigungsstrom. In diesem Falle ist die Abnahme, welche die Ladung des Zerstreuungskörpers in einer Minute erleidet, gleich der gesamten Ladung der positiven oder der negativen Ionen, welche in jener

[1]) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, math.-phys. Kl. 1902. Heft 3 u. 6. 1903. Heft 3.

Zeit in dem Zerstreuungsraume entstehen, also $\delta e = 60\, q\, \varepsilon\, \Omega$, wobei wir dieselben Bezeichnungen benützen, wie im zweiten Abschnitte. Für den Zerstreuungskoëffizienten ergibt sich:

$$a = 100 \frac{\delta e}{e} = \frac{6000\, q\, \varepsilon\, \Omega}{e},$$

er ist der Ladung des Zerstreuungskörpers umgekehrt proportional und hat bei positiver und bei negativer Elektrisierung denselben Wert, wenn nur der absolute Betrag der Ladungen derselbe ist.

Versuche über Zerstreuung in einem geschlossenen Raume sind insbesondere von Harms[1]) angestellt worden. Er erhielt aus seinen Betrachtungen für die Ionisierungsstärke den Wert:

$$q = 28.$$

Auf grund einer etwas anderen Berechnung[2]) habe ich aus denselben Beobachtungen den Wert $q = 43$ abgeleitet. Es handelt sich also auf alle Fälle um Beträge, die unvergleichlich kleiner sind als die bei der Wirkung von Röntgenstrahlen beobachteten Ionisierungsstärken. Das Volumen des den Zerstreuungskörper umschliessenden Raumes betrug bei den Versuchen von Harms 17000 ccm, die ursprüngliche Ladung 0,52 elektrostatische Einheiten. Für den entsprechenden Zerstreuungskoëffizienten findet man den verhältnismässig hohen Wert $a = 3{,}9$.

III. Ein zweiter Fall, in dem das Problem der Zerstreuung eine einfache Lösung zulässt, ist gegeben durch einen Zerstreuungskörper, der sich in einer gleichförmig strömenden, unbegrenzten Luftmasse befindet. Hier lassen sich die Verhältnisse schon bei mässigen Windgeschwindigkeiten so einrichten, dass der Einfluss von Neubildung und Wiedervereinigung der Ionen vernachlässigt werden kann. Die Zerstreuung ist dann unabhängig von der Windgeschwindigkeit, aber verschieden je nach dem der Zerstreuungskörper positiv oder negativ geladen ist. Verstehen wir unter c die Geschwindigkeit des

[1]) Physikalische Zeitschrift. 4. Jahrg. S. 11.

[2]) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, math.-phys. Kl. 1903. Heft 1.

Lichtes, unter ε das elektrische Elementarquantum, unter U und V die absoluten Beweglichkeiten, unter $\overset{+}{n}$ und $\overset{-}{n}$ die Dichten der positiven und der negativen Ionen, so ergeben sich für die Zerstreuungskoëffizienten einer positiven und einer negativen Ladung, die Ausdrücke:[1])

$$\overset{+}{a} = 2400\,\pi \cdot c\,\varepsilon\,V\overset{-}{n},$$
$$\overset{-}{a} = 2400\,\pi \cdot c\,\varepsilon\,U\overset{+}{n}.$$

Daraus folgt weiter: $\dfrac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}} = \dfrac{U\overset{+}{n}}{V\overset{-}{n}}.$

IV. Wenn man, wie üblich, die Zerstreuungskoëffizienten bestimmt, während der Zerstreuungskörper von dem Schutzzylinder umgeben ist, so hat man mit komplizierten Verhältnissen zu tun, die eine strenge Theorie des Versuches unmöglich machen.

Man könnte zunächst die Vermutung aufstellen, dass der Schutzzylinder annähernd wie ein geschlossenes Gefäss wirke, dass man also mit Bewegungen der Ionen zu rechnen habe, die sich dem Zustande des Sättigungsstromes nähern. Die Vermutung wird widerlegt durch die Tatsache, dass die Beobachtungen im allgemeinen eine wesentliche Verschiedenheit der Zerstreuung bei positiver und bei negativer Ladung ergeben, während bei dem gewöhnlichen Sättigungsstrome die Zerstreuung von dem Vorzeichen der Ladung unabhängig ist.

Man kann weiter fragen, ob nicht die Formel des vorhergehenden Abschnittes mit einigem Rechte auf die mit dem Zerstreuungsapparat von Elster und Geitel erhaltenen Werte angewandt werden dürfen. In der Tat kann man wohl annehmen, dass jene Formeln auch bei unregelmässiger Bewegung der Luft giltig bleiben, so fern dabei nur immer neue Luftmengen an den Zerstreuungskörper herangeführt werden. Inwieweit aber

---

1) Riecke, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, math.-phys. Kl. 1903. Heft 1.

diese Bedingung bei den einzelnen Beobachtungen mit dem Zerstreuungsapparat erfüllt wird, inwieweit ausserdem die Diffusion eine wesentliche Rolle spielt, entzieht sich der Beurteilung. Die Anwendung der angeführten Formeln auf diese Beobachtungen ist daher von etwas zweideutiger Natur.

Unter ausdrücklichem Hinweise auf das Hypothetische des Verfahrens möge die Anwendung der Formeln an einem Beispiele erläutert werden. Aus den Beobachtungen von Dr. Cuomo ergibt sich für Capri ein Mittel:

$$\overset{+}{a} = 2{,}912, \qquad \overset{-}{a} = 2{,}942.$$

Setzen wir diese Werte in den Formeln:

$$\overset{+}{a} = 24000\,\pi \cdot c\,\varepsilon\, V \overset{-}{n}, \qquad \overset{-}{a} = 24000\,\pi \cdot c\,\varepsilon\, U \overset{+}{n}$$

ein, so ergibt sich:

$$U\overset{+}{n} = 278 \cdot 10^{-8}, \qquad V\overset{-}{n} = 274 \cdot 10^{-8}.$$

Wären $\overset{+}{n}$ und $\overset{-}{n}$ nach der Methode von Ebert bestimmt, so würden sich aus diesen Gleichungen die absoluten Beweglichkeiten der atmosphärischen Ionen berechnen lassen. Da solche Beobachtungen fehlen so wollen wir probeweise den umgekehrten Weg einschlagen. Wir benützen für U und V die Werte $1{,}29 \cdot 10^{-8}$ und $1{,}51 \cdot 10^{-8}$, die sich aus Laboratoriumsversuchen für feuchte Luft ergeben haben. Dann folgt aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$\overset{+}{n} = 216, \qquad \overset{-}{n} = 181.$$

Es ergibt sich also, dass auf Capri die mittlere Dichte der positiven Ionen erheblich grösser ist wie die der negativen.

17. Das elektrische Feld der Erde.

Aus den elektrischen Wirkungen, die wir an der Oberfläche der Erde beobachten, folgt, dass die Oberfläche der Erde der Regel nach eine negative Ladung besitzt. Die Dichte δ dieser Oberflächenladung ist mit der gegen die Erdoberfläche

gerichteten elektrischen Kreise $\mathfrak{E}$ durch die Beziehung $\mathfrak{E} = 4\pi\delta$ verbunden. Um die Kraft $\mathfrak{E}$ zu erhalten wird man die Potentialdifferenz zwischen einem in der Höhe von z cm über dem Erdboden liegenden Punkte und zwischen dem Erdboden selbst mit Hilfe eines Elektrometers bestimmen. Die Differenz sei gleich V Volt. Für die Höhendifferenz von 1 cm beträgt dann die Zunahme des Potentiales, der Potentialgradient, $\frac{V}{z}$ Volt. Die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}$ berechnet sich daraus nach der Formel:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{300} \cdot \frac{V}{z}.$$

Für Wolfenbüttel ergibt sich aus den Beobachtungen von Elster und Geitel im Mittel:

$$\frac{V}{z} = 2{,}21 \text{ Volt},$$

somit $\mathfrak{E} = 0{,}0074$ und $\delta = -0{,}00059$ elektrostatische Einheiten pro qcm.

In der Atmosphäre selbst kommt ausser der Wirkung der Oberflächenladung der Erde noch die der atmosphärischen Ionen hinzu. Nun ist die Dichte der positiven Ionen in den der Erdoberfläche benachbarten Schichten der Atmosphäre im allgemeinen grösser als die der negativen. Die Kraft $\mathfrak{E}$, mit der die Einheit der positiven Elektrizität nach der Oberfläche der Erde getrieben wird, nimmt also mit der Erhebung über den Erdboden ab. Die Abnahme der Kraft auf der Längeneinheit, ihr Gradient, hängt nach einem bekannten Satze mit der Dichte der räumlichen Ladung dor Atmosphäre zusammen. Diese aber ist gleich dem elektrischen Elementarquantum ε multipliziert mit dem Ueberschuss der Dichte der positiven Ionen über die der negativen. Man findet so die Beziehung:

$$\frac{d\,\mathfrak{E}}{d\,z} = -4\pi\varepsilon\left(\overset{+}{n} - \overset{-}{n}\right),$$

eine Beziehung, die übrigens nur gilt, solange man den in Frage kommenden Teil der Erdoberfläche und die dazu gehören-

den Schichten der Atmosphäre als eben betrachten kann. Setzt man für $\overset{+}{n}$ und $\overset{-}{n}$ die für Capri abgeleiteten Werte, so wird:

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dz} = -21 \cdot 10^{-8}.$$

18. Ionenadsorption an der Oberfläche der Erde.

Wenn ein ionisiertes Gas mit der Oberfläche irgend eines Körpers in Berührung steht, so nimmt der Ionengehalt ab. Für diese Tatsache bietet sich die folgende Erklärung. Die Ionen stossen infolge ihrer molekularen Bewegung gegen die Oberfläche des Körpers. Ein Teil der Ionen bleibt dabei entweder selber an der Oberfläche haften oder gibt wenigstens seine elektrische Ladung an sie ab. In beiden Fällen wird die Zahl der Ionen verringert. Man bezeichnet die Erscheinung als Ionenadsorption. Es ist von vornherein wahrscheinlich, dass die Zahl der adsorbierten Ionen ihrer Dichte und ihrer molekularen Geschwindigkeit proportional ist. Wir können daher für die Zahl der positiven und negativen Ionen, die in einer Sekunde von einem qcm der Oberfläche adsorbiert werden, die Ansätze

$$x\, u_p\, \overset{+}{n} \quad \text{und} \quad y\, u_n\, \overset{-}{n}$$

machen. Die Zahlen x und y bezeichnen wir als die Koëffizienten der Adsorption.

Der Vorgang der Ionenadsorption vollzieht sich nun jedenfalls auch an der Oberfläche der Erde und es entsteht die wohl zuerst von Elster und Geitel aufgeworfene Frage, ob nicht die Ionenadsorption mit der negativen Ladung der Erdoberfläche in Zusammenhang stehe. Die Beantwortung der Frage setzt voraus, dass es gelingt aus dem wechselnden Verlaufe der elektrischen Erscheinungen einen beharrlichen Teil zu isolieren. Wir werden im Folgenden die Hypothese machen, dass sich aus den luftelektrischen Beobachtungen eine gewisse konstante mittlere Dichte der Erdladung ableiten lasse und dass dieser Oberflächendichte auch konstante Dichten der atmosphärischen

Ionen entsprechen. Wenn dann die Adsorption der negativen Ionen grösser ist als die der positiven so wird sich von selber eine negative Ladung der Erdoberfläche einstellen, die solange zunimmt, bis der Unterschied der Adsorptionen durch die elektrischen Verschiebungen ausgeglichen wird. Sobald durch die Verstärkung, welche die Adsorption der positiven Ionen infolge der elektrischen Anziehung erfährt, durch die entsprechende Schwächung der Adsorption bei den negativen Ionen die Zahl der in einer Sekunde an die Erdoberfläche abgegebenen positiven und negativen Ionen die gleiche geworden ist, wird die Ladung der Erde durch die Adsorption nicht mehr verändert.

Die genauere Verfolgung dieses Gedankens führt zu der folgenden Beziehung zwischen der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ an der Oberfläche der Erde und zwischen dem Verhältnisse $\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}$ der Zerstreuungskoëffizienten:

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{2}\frac{P\,T}{\varepsilon}\cdot\frac{\frac{y}{l_n} - \frac{x}{l_p}\cdot\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}}{\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}} + 1}.$$

Hier bezeichnet P die Konstante des Gasgesetzes:

$$P = 83 \cdot 16^6.$$

T ist die absolute Temperatur, ε das elektrische Elementarquantum, l_p und l_n die molekularen Weglängen der Ionen. Aus der Gleichung lassen sich zwei Folgerungen ziehen, welche für die experimentelle Prüfung der zu Grunde liegenden Annahme von Bedeutung sind.

1. Es muss:

$$y > x \cdot \frac{l_n}{l_p} \cdot \frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}$$

sein; der Adsorptionskoëffizient der negativen Ionen muss grösser sein als der der positiven.

2. Die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ an der Erdoberfläche muss um so kleiner sein, je mehr die Zerstreuung negativer Ladungen über die positiver überwiegt.

Benützt man für $\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}$ den aus den Beobachtungen von Capri abgeleiteten Wert 1,01 und setzt man für P, T, ε ihre numerischen Werte, so ergibt sich:

$$y = 1{,}01 \frac{l_n}{l_p} x + 0{,}93 \cdot 10^{-20} \, \mathfrak{E} \cdot l_n .$$

Da l_n grösser ist als l_p, so erkennt man hieraus unmittelbar, dass $y > x$.

Die Annahme, dass die negative Ladung der Erdoberfläche durch Ionenadsorption bedingt sei, hat übrigens noch eine zweite Annahme im Gefolge. Die vorausgesetzte Konstanz der Ionendichten kann nur dadurch gewahrt bleiben, dass der durch Adsorption bedingte Verlust immer wieder ersetzt wird. Diess kann geschehen durch Neubildung von Ionen, durch Ionendiffusion, durch strömende Bewegungen, welche immer neue Luftmengen von normalem Ionengehalt der Oberfläche der Erde zuführen.

Eine Abhandlung von Gauss über Erdmagnetismus und Magnetometer beginnt mit den Worten: „Zwei grosse Naturkräfte sind auf der Erde allerorten und in jedem Augenblicke gegenwärtig: die Schwere und die erdmagnetische Kraft. Die Wirkungen der Schwerkraft sehen wir auf jedem unserer Schritte uns begegnen. Die Wirkungen der erdmagnetischen Kraft fallen nicht von selbst in die Augen, sondern wollen gesucht sein: Jahrtausende vergingen, ohne dass man nur von der Existenz dieser Kraft wusste. Von der ersten Kraft werden alle Verhältnisse des physischen Lebens durchdrungen, von der anderen wenig oder gar nicht berührt.“ Wir können den von Gauss genannten Kräften eine dritte hinzufügen, die elektrische Kraft der Erde. Auch sie entzieht sich im gewöhnlichen Laufe der

Dinge einer oberflächlichen Beobachtung; aber von Zeit zu Zeit sammelt sie sich zu den Entladungen des Gewitters und sie breitet über weite Kreise der Erde die Strahlen des Nordlichts. Sie hat nicht die Stetigkeit der erdmagnetischen Kraft; vielmehr verschwindet der bleibende Grund der Erscheinungen hinter den unregelmässigen Schwankungen. Damit hängt es zusammen, dass eine allgemeine Theorie der Luftelektrizität, ein Seitenstück zu Gauss' Theorie des Erdmagnetismus, fehlt. Zudem beziehen sich unsere Beobachtungen vorzugsweise nur auf die Oberfläche der Erde; der Zusammenhang der Erscheinungen kann aber nur dann deutlich werden, wenn wir das Verhalten der Luftelektrizität in dem ganzen die Erde umhüllenden Luftmeere kennen und die hierauf gerichteten Forschungen sind erst in den Anfängen begriffen. Noch eine grosse Arbeit wird notwendig sein, ehe wir imstande sind die vielen an die Erscheinungen der Luftelektrizität sich knüpfenden Fragen zu beantworten. Diese Arbeit aber kann nicht von Einzelnen geleistet werden sondern nur von einer die Erde umschauenden Organisation, deren Begründung als eine würdige Aufgabe für die internationale Assoziation der Akademien erscheint.

Potentialmessungen.

Von **Fr. Exner**, Wien.

Die Forschungen der letzten Dezennien auf dem Gebiete der Luftelektrizität haben zwar ein, absolut genommen, sehr reichhaltiges Beobachtungsmaterial zu Tage gefördert, doch muss sich jedem Beteiligten die Ueberzeugung aufdrängen, dass dieses umfangreiche Gebiet durch die Arbeit Einzelner unmöglich bewältigt werden kann; es herrschen hier ähnliche äussere Verhältnisse wie auf dem Gebiete des Erdmagnetismus wo auch nur die gemeinsame Arbeit vieler, über die ganze Erde verteilter Stationen Aussicht auf Erfolg bietet. Diese Erwägungen haben dazu geführt, dass die kartellierten Akademien und gelehrten Gesellschaften von Göttingen, Leipzig, München und Wien sich vor 2 Jahren zu gemeinsamer Arbeit zusammenfanden und seitdem an einer Reihe von speziell errichteten Stationen diesbezügliche Untersuchungen fortlaufend ausführen lassen. Doch konnte dabei von anfang an nicht erwartet werden das Problem der Luftelektrizität auf so kurzem Wege seiner Lösung zuzuführen, vielmehr sollten diese Stationen nur Gelegenheit bieten, in bezug auf deren Einrichtung sowie betreffs der anzuwendenden Methoden die nötigen Erfahrungen zu sammeln; dass die schliessliche Ausführung des Planes auch über die Kräfte des Kartells hinausgeht, soll durch das Nachfolgende erläutert werden.

Die Basis einer jeden Theorie der Luftelektrizität ist die quantitative Kenntnis des elektrischen Feldes der Erde, d. i. die Kenntnis der Oberflächenladung des Erdkörpers selbst und der Ladung des

Luftmeeres. Auf drei Wegen wurde bisher versucht, Kenntnis von diesen Grössen zu erlangen: durch Messung des Potentialgefälles an der Erdoberfläche, durch Bestimmung der Leitfähigkeit der Luft resp. ihres Gehaltes an Ionen und endlich durch Untersuchung der Niederschläge auf ihre Elektrisierung. Das Resultat war, dass das Feld der Erde sich als variabel herausgestellt hat, variabel infolge der Veränderungen, welche die elektrische Ladung an der Erdoberfläche und in der Luft erleidet. Welches aber sind die Ursachen dieser Veränderungen? Darüber ein endgiltiges Urteil zu gewinnen, reichen die bisherigen Beobachtungen noch lange nicht aus; wie viel noch fehlt soll im folgenden nur in Bezug auf die erste Methode der Untersuchung, die Potentialmessung, angedeutet werden.

Das Potentialgefälle an der Erdoberfläche gibt direkt und unabhängig von jeder Theorie die elektrische Flächendichte der Erde am Beobachtungsort; wie ist dieselbe aber über die ganze Erdoberfläche verteilt? Hat sie überall dasselbe Vorzeichen oder entsprechen in einem gegebenen Momente etwaigen negativen Ladungen einzelner Partien andere Gebiete mit positiver Ladung? Durch die bisherigen, an vereinzelten Punkten der Erdoberfläche und zeitlich weit von einander getrennten Beobachtungen ist letzteres zwar unwahrscheinlich geworden, allein eine definitive Antwort lässt sich vorläufig umsoweniger geben als die grossen ozeanischen Gebiete bisher so gut wie gänzlich unerforscht sind. Es ist einleuchtend, dass diese Frage nur durch gleichzeitige Messungen an möglichst vielen über die Erdoberfläche zerstreuten Stationen zu lösen ist.[1])

Aber auch an ein und demselben Punkte der Erdoberfläche ist die Grösse der elektrischen Ladung im Laufe der Zeit nicht konstant; die bisherigen Untersuchungen haben dafür sowohl eine jährliche als eine tägliche Periode festgestellt, aber wieder stehen wir vor derselben Tatsache, dass das Beobachtungsmateriale nicht ausreicht um die Ursachen dieser Variationen

---

[1]) Bisher ist Batavia die einzige aussereuropäische Station, die regelmässige Beobachtungen über Luftelektrizität publiziert.

aufzudecken. Wir wissen nur, dass z. B. die tägliche Periode in verschiedenen Klimaten ganz verschieden verläuft, ohne dass wir den Zusammenhang mit den örtlichen Bedingungen und meteorologischen Verhältnissen bisher anzugeben vermöchten. Es wird das erst gelingen, wenn luftelektrische Stationen in allen klimatisch-typischen Gebieten der Erde errichtet und dort Beobachtungen mindestens durch ein volles Jahr ausgeführt werden. Es müssten diese Stationen aber nicht nur von der arktischen bis zur tropischen Zone reichen, es müssten innerhalb einer jeden auch Orte von meteorologisch differentem Charakter z. B. solche mit ausgesprochen maritimen oder kontinentalen Klima, solche mit Steppen- oder Wüstenklima etc. besetzt werden. Aber auch damit wäre noch nicht allen Anforderungen der Aufgabe genügt. So wissen wir z. B. gar nichts über den Einfluss der absoluten Seehöhe auf die Grösse des Potentialgefälles also auch auf die Grösse der Erdladung; darüber könnten nur Messungen auf ausgedehnten Hochebenen in der Höhe von etwa 1000—3000 m Aufschluss geben, namentlich wenn sie im Anschluss an nicht allzuentfernte tiefer gelegene Stationen ausgeführt werden. Auch zur Ermittelung der Art und Weise wie die elektrischen Ladungen in der Luft verteilt sind wäre es sehr wünschenswert, über einander gelegene Doppelstationen zu errichten — bei denen allerdings die Konfiguration des Terraines gewisse Bedingungen erfüllen müsste — wodurch die so wichtigen Messungen im Luftballon, die ja naturgemäss immer nur vereinzelte bleiben können, ergänzt würden. Endlich sei noch erwähnt, dass auch Stationen auf exponierten Berggipfeln, namentlich wenn sie sich über verschiedene Zonen verteilen, sehr wertvolle Resultate liefern würden.

Die gestellte Aufgabe ist demnach eine sehr umfangreiche, aber unlösbar ist sie nicht; die Beobachtungsmethoden bieten, wenigstens was die Potentialmessung anbelangt, keinerlei Schwierigkeiten, ihre Grundlagen sind durch die klassischen Arbeiten Lord Kelvins festgelegt und die letzten Jahre haben noch mancherlei Verbesserungen und insbesondere Vereinfachungen gebracht, ein Umstand, der nicht zu unterschätzen ist sobald

es sich um zahlreiche Stationen und gewiss häufig auch um die Verwendung von elektrisch nicht geschulten Beobachtern handelt.

Was die Anlage der Stationen betrifft so wäre in erster Linie der Umstand im Auge zu behalten, dass Potentialmessungen durch die unmittelbare Nähe grosser Städte fast ganz illusorisch werden, dass aber auch kleine Ortschaften, Fabriken u. dergl. durch Rauchentwickelung die Messungen empfindlich stören können, um so empfindlicher, je regelmässiger diese Störungen auftreten. Es wird sich daher empfehlen, die Stationen an möglichst freien Punkten, am besten in ganz vereinzelten Gehöften anzulegen und zwar auf möglichst freier Ebene. Damit ist leider die Verwendung der meisten schon bestehenden Observatorien ausgeschlossen und um so wichtiger ist es, dass man mit den Apparaten von einem Laboratorium unabhängig sei. Diese Erwägungen haben zur probeweisen Verwendung des von Benndorf konstruierten mechanisch-registrierenden Elelektrometer[1]) auf den luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie geführt und die im Laufe eines Jahres gesammelten Erfahrungen sind vollkommen zufriedenstellend. Es ist nämlich unbedingt notwendig, dass auf den Stationen selbstregistrierende Instrumente verwendet werden, da sonst die Beobachtungen viel zu mühsam und zeitraubend werden. Nun erfordern aber die bisher üblichen Apparate mit photographischer Registrierung nicht nur besondere an exponierten Stationen schwer zu erzielende Einrichtungen sondern auch eine recht umständliche Bedienung; alles das fällt bei den mechanisch-registrierenden Apparaten weg. Diese markieren je nach Wunsch den Ausschlag des Elektrometers alle 5 oder 10 Minuten auf einen gewöhnlichen Papierstreifen, ein Zeitintervall, das bei fortlaufenden Messungen als ganz genügend anzusehen ist, umsomehr als es sich in erster Linie doch um den regelmässigen Verlauf des Potentialgefälles bei normalem Wetter handelt, während die

---

[1]) Geliefert von Mechaniker Castagna, Wien Univ.-Physiolog. Inst. zum Preise von ca. 400 M.

sehr schnellen Schwankungen desselben, wie sie bei Niederschlägen auftreten, einer Diskussion vorläufig überhaupt nicht zugänglich sind. Ein Vorteil der mechanischen Registrierung liegt ferner darin, dass man in jedem Moment die Aufzeichnung des Instrumentes und das richtige Funktionieren desselben verfolgen kann sowie dass die Kosten des Betriebes gegenüber dem photographischen Verfahren ganz verschwindend kleine sind. In bezug auf die Isolierung des Instrumentes sowie der Zuleitung zur Elektrode gilt natürlich dasselbe wie bei den gewöhnlichen Apparaten; bei tiefen Temperaturen wird dieselbe immer besonderer Sorgfalt bedürfen.

Als Kollektoren empfehlen sich Radiumpräparate an Stelle der bisher üblichen Wasserstrahlen; an den luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie sind solche seit einem Jahre mit bestem Erfolge in Verwendung ohne dass eine Abnahme ihrer Wirksamkeit oder eine Schädigung durch die Witterungseinflüsse sich bemerkbar gemacht hätte. Auch dadurch wird die Bedienung des Apparates wesentlich einfacher da das lästige Kontrollieren des Wasserzuflusses entfällt. Zu beachten ist jedoch, dass durch das Radium die Luft ionisiert wird, dass demnach bei gleichzeitigen Zerstreuungsmessungen Fehler entstehen können wenn der Zerstreuungsapparat sich in zu grosser Nähe der Radiumelektrode befindet. Nach den bisherigen Erfahrungen ist das Einhalten einer Distanz von etwa 20 Meter zwischen beiden genügend um diese Fehlerquelle zu vermeiden; jedenfalls ist es erwünscht die beiden Apparate an verschiedenen Seiten des Gebäudes anzubringen. Wo sich diese Fehlerquelle trotzdem nicht ausschliessen lässt müsste natürlich wieder zur Verwendung der Wasserkollektoren gegriffen werden.

Die fortlaufenden Registrierungen geben immer nur relative Werte des Potentialgefälles, da der Kollektor notwendigerweise in der Nähe des Hauses aufgestellt sein muss und dort die Niveauflächen eine Deformation erleiden; es soll aber das Potentialgefälle ermittelt werden wie es über einem ebenen Stück der Erdoberfläche herrscht, also bei nicht deformierten Niveauflächen und um diesen „absoluten" Wert zu erhalten

wird es notwendig sein die registrierten Messungen auf die Ebene zu reduzieren. Das ist nur möglich durch gleichzeitige Messung des Potentialgefälles über einem ebenen Bodenstück in etwa 100 Meter Entfernung vom Aufstellungsort des Registrierinstrumentes, wobei auf die Abwesenheit von hohen Bäumen oder sonst aufragenden Gegenständen zu achten wäre. Diese „Reduktion auf die Ebene" kann am besten mit Hilfe eines kleinen Handelektroskopes und eines Flammenkollektors ausgeführt werden und hat man so ein für allemale den Reduktionsfaktor bestimmt so sind alle Angabe des Registrierinstrumentes auch ihrem absoluten Werte nach bekannt. Eine solche Reduktion wird sich allerdings nicht an allen Stationen ausführen lassen, auf exponierten Berggipfeln z. B. ist sie ausgeschlossen, aber wo irgend tunlich sollte sie ausgeführt werden. Freilich haben auch nur relative Messungen einen Wert, derselbe wird aber durch eine derartige Reduktion noch sehr wesentlich erhöht und es kann nicht genug bedauert werden, dass bei vielen älteren Beobachtungsreihen die Kenntnis des absoluten Wertes fehlt.

Zur späteren Beurteilung und Bearbeitung der gewonnenen Potentialmessungen ist die Kenntnis der hauptsächlichsten meteorologischen Faktoren des Beobachtungsortes erforderlich; es wird sich darum empfehlen wenigstens Temperatur, Feuchtigkeit und Barometer an täglich 3 Terminen zu beobachten. Angaben über die allgemeine Witterungslage, namentlich üben den täglichen Grad der Bewölkung wären sehr erwünscht und insbesondere sollten, wenigstens an grösseren Stationen Messungen der Sonnenstrahlung — der Gesamtstrahlung nach der Methode von K. Angström, der ultravioletten Strahlung nach der Methode von Elster und Geitel — ausgeführt werden. Abgesehen von dem ganz allgemeinen meteorologischen Interesse das derartige Messungen bieten, könnten dieselben speziell für die Theorie der Luftelektrizität von grosser Wichtigkeit werden.

Sollte es an einzelnen Stationen nicht möglich sein, registrierenden Elektrometer aufzustellen, was jedoch in erster Linie angestrebt werden müsste, so wäre es doch wünschenswert mit

Hilfe eines Handelektroskopes und eines Flammenkollektors wenigstens an einzelnen Tagesstunden das Pontentialgefälle zu ermitteln und dasselbe auf die Ebene zu reduzieren; derartige Messungen würden wenigstens das Vorzeichen und den ungefähren Wert des Potentialgefälles erkennen lassen.

Man sieht die gestellte Aufgabe ist keine kleine; wenn auch die Stationen mit registrierenden Instrumenten versehen werden, die Aufgabe bleibt immer eine so grosse, dass sie die Kräfte einzelner Korporationen übersteigt und deshalb hat schon im verflossenen Jahre die luftelektrische Kommission der kartellierten Akademien gelegentlich ihrer letzten Tagung in Göttingen den Beschluss gefasst, beim nächsten Zusammentritt des Kartells demselben den Vorschlag zu unterbreiten, es möge die luftelektrische Forschung als gemeinsames Unternehmen bei der internationalen Assoziation der Akademien in Antrag gebracht werden. In der Tat ist die gestellte Aufgabe, wie die analoge der Erforschung des Erdmagnetismus, nur unter Beteiligung aller grösseren Staaten durchführbar und fällt so von selbst in den Wirkungsbereich der internationalen Assoziation; namentlich aber wäre die Mitwirkung Amerikas, Englands und Russlands dabei von unschätzbarem Werte.

Über die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft.

Von **J. Elster** und **H. Geitel.**

I.

Über den Ursprung der in der Bodenluft enthaltenen radioaktiven Emanation.

Eines der Ziele, auf die wir unsere Bemühungen seit der letzten Zusammenkunft in Göttingen richteten, war die Aufklärung des abnormen Gehalts der Luft an radioaktiver Emanation in Kellern und Höhlen, mit der aufs engste ihre hohe Ionisierung verbunden ist. Man konnte dabei entweder an eine noch unbekannte Fähigkeit stagnierender Luft denken solche Emanation von selbst zu bilden und in sich aufzuspeichern oder an ein Hereindiffundieren der letzteren aus den einschliessenden Wänden und dem Erdboden. Manche Erfahrungen schienen für die erste Annahme einer Selbstaktivierung zu sprechen, nämlich die tatsächlich vorhandene spontane Steigerung der Leitfähigkeit hermetisch abgeschlossener Luftmengen und die fehlgeschlagenen Bemühungen eine Spur von primärer Radioaktivität in dem Materiale der Wände der Keller und Höhlen zu entdecken.

Versuche an einem grösseren Luftquantum, das mehrere Wochen lang (innerhalb eines Dampfkessels) eingeschlossen gehalten war, zeigten indessen, dass eine irgend bemerkenswerte Ansammlung radioaktiver Emanation während dieser Zeit nicht eingetreten war.

So blieb nur noch die Annahme, dass die Wände der unterirdischen Räume oder die aus dem umgebenden Erdreiche durch ihre Poren hindurch diffundierende Luft die Träger der Emanation wären. In der Tat stellte sich in der Folge heraus, dass die durch einfaches Ansaugen aus dem Erdboden entnommene Luft an unserm Wohnorte mit aktiver Emanation behaftet war und in ihrer Wirksamkeit sogar die der Keller und Höhlen übertraf.[1]) Durch die Untersuchungen der Herren Ebert und Ewers ist diese Eigenschaft auch für die Münchener Bodenluft nachgewiesen.[2])

Inwiefern die Erdsubstanz am Orte der Beobachtung auf die Aktivität der in ihr enthaltenen Luft von Einfluss ist, blieb dabei zunächst noch unaufgeklärt.

Man konnte auch hierbei von zwei verschiedenen Annahmen ausgehen. Entweder war jene Aktivität eine unabhängig von der Natur des Erdreiches allgemein verbreitete Eigenschaft der Bodenluft oder sie war die Folge eines gewissen Gehalts an primär aktiven Substanzen in dem Materiale des Erdbodens selbst. Während im ersten Falle Luftproben beliebiger Herkunft, wenn sie nur sicher aus „Bodenluft“ bestanden, die Aktivität in gleicher Weise zeigen mussten, war im zweiten eine Ungleichheit der Wirkung zu erwarten, da schwerlich angenommen werden durfte, dass die erregende aktive Substanz an allen Orten in gleicher Wirksamkeit im Erdboden vorhanden wäre.

Einige ältere Erfahrungen wiesen auf die letztere Alternative hin.

Die Leitfähigkeit der Luft in Kellern und Höhlen mittelst des Zerstreuungsapparates gemessen zeigte nämlich an verschiedenen Orten ganz beträchtliche Unterschiede, die nur durch einen Einfluss der einschliessenden Wände zu erklären waren. So fanden wir sehr bedeutende Ionisierung der Luft in den Kellern unseres Wohnortes (etwa das sechsfache der normalen), in der Baumanns- und Iberghöhle im Harz (das neun- und

---

1) Diese Ergebnisse haben wir bereits veröffentlicht in Physikal. Zeitschrift. 3. S. 574. 1902.

2) H. Ebert und P. Ewers, Physikal. Zeitschrift. 4. S. 162. 1902.

dreifache),[1]) eine beträchtlich kleinere dagegen in Kellern in Clausthal im Harz und in Zinnowitz an der Ostsee (das 1.3 bis zweifache). In einem grossen Raume eines Kalisalzbergwerks bei Vienenburg am Harz war die Ionisierung der Luft sogar kleiner als in der freien Atmosphäre; allerdings waren die Bedingungen hier ungünstig, da die Luft deutliche Spuren vom Rauche der Sprengmaterialien enthielt.

Besonders instruktiv war dagegen ein Versuch in Clausthal i. H. Ein isolierter Kupferdraht wurde etwa eine Stunde lang in freier Luft mittelst einer Influenzmaschine negativ geladen gehalten, ein anderer in einem Kellerraume; die erregte Aktivität war bei dem ersten etwa 11 mal so gross als bei dem letzteren. Hier enthielt also die freie Luft sogar mehr von aktiver Emanation als die des Kellers, ein Verhalten, das den bisherigen Erfahrungen durchaus widersprach.[2])

Hiernach war es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass auch die Bodenluft verschiedener Herkunft ungleiche Aktivität zeigen würde. Um hierüber ein sicherer begründetes Urteil zu gewinnen, war eine Methode zu finden Bodenluft von verschiedenen Orten zu entnehmen und diese Proben nach ihrer Wirksamkeit zu vergleichen. Da es im allgemeinen nicht ausführbar ist die Prüfung auf Radioaktivität unmittelbar an Ort und Stelle vorzunehmen, müssen die Proben in leicht transportierbaren Gefässen sicher eingeschlossen werden. Die zu der Überführung an den Untersuchungsort erforderliche Zeit ist, sofern es sich um einige Stunden handelt, ohne merklichen Einfluss auf das Ergebnis; auch 2—3 Tage Zwischenzeit wurden, da es sich nur um gröbere Feststellungen handelte, bei weiteren Entfernungen noch zugelassen. Liegt ein längerer Zeitraum zwischen Einfüllung der Luftprobe in das Transportgefäss und ihrer Prüfung, so findet man die Aktivität stets zu klein, nach etwa

[1]) Herr Dr. Cuomo in Capri teilte uns freundlichst mit, dass er in einer dortigen Stalaktitenhöhle gleichfalls abnorm hohe Zerstreuungen beobachtet habe. (Etwa das 3 fache der normalen.)

[2]) Herrn Prof. Gerland in Clausthal, der diesen Versuch ermöglichte, sagen wir auch an dieser Stelle unsern verbindlichen Dank.

4 Wochen war sie bei einer aus Wolfenbüttel stammenden Probe erloschen. Zur Aufnahme der Bodenluft diente ein eiförmiges Glasgefäss von 3 Liter Inhalt, das an beiden Enden durch gutschliessende Hähne abgesperrt werden konnte; vor dem Gebrauch wurde es mit Wasser gefüllt und bei beiderseits geschlossenen Hähnen vertikal gehalten. Die obere Öffnung stand durch einen Gummischlauch mit einem Messingrohr von etwa 1 m Länge in Verbindung, das bis auf ein wenige cm hervorragendes Stück in den Erdboden hineingetrieben war. Beim vorsichtigen Öffnen der Hähne floss durch den unteren das Wasser aus, während durch den oberen Bodenluft eindrang. War das Gefäss völlig mit dieser gefüllt, so schlossen wir beide Hähne luftdicht ab.

Zur Vornahme der Untersuchung liessen wir die Luft durch Wasser in eine Glasglocke von etwa 30 Liter Inhalt hinübertreiben: unter der Glocke stand von einem Drahtnetze umgeben der Zerstreuungsapparat ohne Schutzdach.[1]) Die in einer bestimmten Zeit entweichende Elektrizitätsmenge diente als Mass für die Ionisierung der eingeführten Luft. Vor jedem Versuche war die Glocke mit Zimmerluft gefüllt und es wurde zuerst der Elektrizitätsverlust vor dem Einlassen der Bodenluft bestimmt, ebenso zum Schluss einer jeden Reihe auch der Verlust im Gehäuse des Elektroskops. Der letztere war stets so klein, dass er bei der wenig genauen Art des gesamten Verfahrens durchaus vernachlässigt werden durfte.

Bei den angewandten Potentialen von 100 bis 200 Volt kann man den Sättigungsstrom unter der Glocke als erreicht ansehen. Die Potentialabnahme in gewöhnlicher Luft in 15′, die 14 Volt im Mittel betrug, ist im folgenden als Einheit für die Ionisierung der Luft unter der Glocke nach Einführung der zu untersuchenden Probe zu grunde gelegt. Diese Ionisierung kann zugleich als ein Mass für den Gehalt an radioaktiver Emanation betrachtet werden.

Wir haben nach der angegebenen Methode Luftproben von verschiedenen Orten untersucht. Stark aktiv, wenn auch unter

---

[1]) Vgl. Physikal. Zeitschrift l. c.

sich durchaus nicht gleich erwiesen sich solche, die aus dem ton- und kalkhaltigen Erdreiche der Gärten von Wolfenbüttel stammten (Aktivität in dem angegebenen Masse zwischen 16 und 4), wesentlich geringer eine aus einer Kiesgrube im nahegelegenen Walde entnommene (Akt. = 3). Der Wolfenbüttler Bodenluft kam gleich eine Probe aus Göttingen (Akt. = 12), merklich zurück stand eine solche aus Blankenburg a. H., aus Tonschieferboden (Akt. = 2,3), noch geringer war die Wirksamkeit bei solchen aus Würzburg[1]) aus Muschelkalk (Akt. = 1,6) und Wilhelmshöhe bei Kassel, aus Basalt (Akt. = 1,01). Diese Erfahrungen genügten schon zu der Erkenntnis, dass die Natur des Erdbodens, aus dem die Luft aspiriert war, von wesentlichem Einflusse auf ihre Aktivität sein müsse, und legten es nahe, nach einer primären Radioaktivität seiner Bestandteile zu suchen.

Allerdings waren, wie schon bemerkt, unsere früheren Versuche sowie auch die der Herren Ebert und Ruf[2]) eine primäre Becquerelstrahlung an dem Materiale der Wände von Kellern und Höhlen nachzuweisen, resultatlos geblieben, doch sind hierbei nur die Baumaterialien und festen Gesteine, nicht das lockere Erdreich selbst untersucht worden. Wir füllten nun eine Zinkschale von 29 cm Durchmesser und 2,5 cm Höhe mit Erde, die einige Centimeter unter der Oberfläche aus dem Garten unserer Wohnung ausgegraben war und brachten sie so unter die beschriebene Glasglocke, dass das Elektroskop mit dem umhüllenden Drahtnetzzylinder auf dieser Erde ruhte.

Es zeigte sich sofort eine unzweifelhafte Zunahme der Ionisierung der Luft unter der Glocke; wie bei der Anwesenheit einer schwach radioaktiven Substanz erwartet werden musste, stieg sie schon im Laufe von 2—3 Tagen bis zu einem Maximalwerte von etwa dem dreifachen der normalen an. Dabei war es gleichgiltig, ob die Erde in dem feuchten Zustande, wie sie

---

[1]) Herrn Dr. Harms in Würzburg sind wir für die Übersendung der Luftproben von dort und von Göttingen zu Dank verpflichtet.

[2]) Diese Sitzungsprotokolle, Mai 1902. Auch Physikal. Zeitschrift. 4. S. 93. 1902.

entnommen war oder nach längerem Austrocknen unter die Glocke gebracht wurde; jetzt, nach Verlauf von 8 Monaten lässt sich noch keine Verminderung der Aktivität an der zu den ersten Versuchen verwandten Substanz nachweisen. Wie die Erde aus unserem Garten wirkte auch solche vom Felde und von ausserhalb der Stadt gelegenen Gärten, ebenso kräftig ein graublauer Ton aus einer in der Nähe befindlichen Grube, weisser Quarzsand (kalkhaltig) war dagegen unwirksam.

Es lag nahe den Versuch zu machen, durch chemische Behandlung die inaktiven Stoffe des Erdreiches auszuscheiden und dadurch die Wirksamkeit auf kleinere Massen zu konzentrieren. Am geeignetsten dazu erschien der Ton, der nach dem Abschlämmen gröberer Einschlüsse eine homogene Masse darstellte. Durch Ausziehen mit verdünnter Salzsäure liess sich der Gehalt an Calciumkarbonat völlig entfernen, der Rückstand zeigte unmittelbar nach dem Trocknen eine geringere Aktivität wie vor der Behandlung, doch wuchs diese in einigen Tagen (während die Substanz ausserhalb der Glocke aufbewahrt wurde) etwa wieder zu dem alten Betrage an. Erneutes Digerieren mit Salzsäure oder verdünnter Schwefelsäure hatte wieder zuerst eine Abnahme der Wirksamkeit zur Folge, die sich aber in gleicher Weise im Laufe der Zeit erneuerte. Leider war es uns nicht möglich, wegen der grossen Menge der zu bearbeitenden Substanz die mit dem Ton in Berührung gewesene Flüssigkeit schnell genug zur Trockne einzudampfen, um den Rückstand noch auf Radioaktivität untersuchen zu können, doch scheint es uns nach dem geschilderten Verhalten nicht zweifelhaft, dass den von uns untersuchten Ton ein aktiver Körper begleitet, der ähnlich wie nach Rutherfords und Soddys Untersuchungen[1]) das Thoriumoxyd, eine in Säure lösliche, stärker wirksame Substanz (vergleichbar dem Th. X. Rutherfords) bildet, die nach dem Ausziehen durch Säuren sich allmählich wieder regeneriert. Dieselbe Erscheinung wie beim Ton fanden wir auch an dem sogenannten Höhlenlehm (Löss) aus der Baumannshöhle im Harze.

[1]) E. Rutherford and F. Soddy, Phil. Mag. 1902. S. 370.

Um mit besser definierten Stoffen zu tun zu haben, untersuchten wir auch geschlämmte Kreide, gemahlenen Schwerspat, reinen käuflichen Töpferton, Seesalz und Karlsbadersalz auf etwaige Becquerelstrahlung. Die Ergebnisse waren im allgemeinen negativ, nur der Ton schien nicht ganz unverdächtig; stand aber jedenfalls weit hinter der Gartenerde sowie dem bei Wolfenbüttel vorkommenden Tone und dem Höhlenlehm zurück. Am Schwerspat glaubten wir wegen der chemischen Ähnlichkeit des Radiums mit dem Barium einige Wirksamkeit voraussetzen zu dürfen, da vielleicht Spuren des ersteren Elements das letztere begleiten konnten, bei der Untersuchung des Karlsbadersalzes leitete uns der Gedanke, dass es aus sehr grosser Erdtiefe stammt, während das Seesalz als eine Probe aus dem allgemeinen Sammelbecken löslicher Substanzen vielleicht auch radioaktive Bestandteile enthalten mochte.

Asche von Pflanzen, die auf wirksamer Erde gewachsen waren, ergab ebenfalls keine nachweisbare Becquerelstrahlung.

Das Resultat dieser Untersuchungen ist daher der Nachweis einer gewissen Radioaktivität des Erdreiches selber, diese bleibt bei Behandlung mit verdünnten Säuren an den tonigen Bestandteilen des Bodens haften. Eine weitergehende Trennung oder gar Isolierung des aktiven Prinzips ist uns nicht gelungen.

In willkommener Weise wird dieser Nachweis durch eine kürzlich von Herrn Rutherford[1]) mitgeteilte Beobachtung von Herrn Cooke bestätigt, nach welcher eine merkliche sehr durchdringende Strahlung von Ziegelsteinen ausgehen soll.

Bevor man den bei der Menge der zu verarbeitenden Substanz jedenfalls sehr schwer ausführbaren Versuch machte, den in dem natürlich vorkommenden Tone wohl nur in verschwindend kleinen Mengen verteilten aktiven Stoff zu konzentrieren, wäre erst die Frage zu erwägen, ob diese Aktivität überhaupt eine primäre ist und nicht vielmehr nur eine im Tone durch Kontakt mit der Bodenluft induzierte, wobei dann der Ursprung der Wirksamkeit bei der letzten zunächst wieder unaufgeklärt

---

[1]) E. Rutherford, Nature 67. S. 511. 1903.

bleiben würde. Das Verhalten des Tones gegen Säuren, das mit dem der primär aktiven Stoffe übereinstimmt, sowie die Beständigkeit seiner Aktivität steht zwar der letzten Annahme entgegen, doch hielten wir es nicht für überflüssig, im allgemeinen zu untersuchen, ob neutrale Körper durch Vergraben in die Erde, d. h. durch andauernden Kontakt mit der Bodenluft, eine merkliche induzierte Aktivität annehmen könnten.

Wir verwandten dazu gemahlenen Schwerspat, Schlemmkreide, reinen — nahezu inaktiven — Töpferton und Baumwolle. Jede dieser Substanzen wurde in Leinwand eingeschlagen und mit einer Hülle von Eisendrahtnetz umwickelt etwa 50 cm unter die Erdoberfläche gebracht und dort mindestens 4 Wochen belassen. Das Drahtnetz diente dazu, die Leinwandhülle, die in der Erde ihre Festigkeit verlor, so zusammen zu halten, dass eine Verunreinigung der Stoffe durch Erde ausgeschlossen war. Nach dem Ausgraben liess sich an dem Baryt, der Kreide und der Baumwolle keine merkliche Aktivität wahrnehmen, dagegen war sie bei dem Tone unverkennbar. Durch ihr Abnehmen im Laufe der Zeit, das übrigens bei verschiedenen Proben ungleich verlief, verriet sie sich in der Tat als eine induzierte.

Es ist ein merkwürdiges, die weitere Untersuchung erschwerendes Zusammentreffen, dass der Ton, der den die Bodenluft aktivierenden primär strahlenden Körper enthält, wiederum selbst durch diese Bodenluft zu sekundärer Strahlung erregt wird.

Ganz kurz berichten wir noch über einige weitere Versuche, die die obigen Ergebnisse teils ergänzen teils nur bestätigen.

Brachten wir einige Kilo Erdreich in einen geschlossenen Raum von etwa 40 Liter Inhalt, so liess sich nach Verlauf von wenig Stunden an einem eingeführten, auf — 2000 Volt geladenen Metalldrahte die induzierte Aktivität mittelst des Zerstreuungsapparates leicht nachweisen. Saugten wir Luft durch ein grösseres Quantum Erde, das sich in einem Blechgefässe befand und liessen sie unmittelbar nach dem Verlassen der Erde unter die Glasglocke treten, die den Zerstreuungsapparat unter dem schützenden Drahtnetze überdeckte, so hatte sie stets ein

abnorm hohes Leitvermögen, das aber nach wenigen Minuten, sobald der Luftstrom ruhte, verschwand. Es lag nahe anzunehmen, dass die Luft beim Passieren der Erde durch deren Becquerelstrahlung in ähnlicher Weise ionisiert wurde, wie etwa beim Vorüberströmen an einer tätigen Röntgenröhre. Dass wir es indessen nicht mit einer einfachen Ionisierung dieser Art, sondern vielmehr mit einer Aufnahme von aktiver Emanation aus der Erde zu tun hatten, zeigte sich, als wir die Luft vor deren Eintritt in die Glocke durch ein Metallrohr von 1,5 cm Durchmesser und 10 cm Länge leiteten, in dessen Axe ein isolierter Draht gespannt war; das Rohr und der Draht standen mit den Polen einer Hochspannungssäule von etwa 1600 Volt in Verbindung. Die Luft floss daher innerhalb eines kräftigen elektrischen Feldes, durch das etwaige freie Ionen entweder ganz beseitigt, oder doch der Zahl nach stark vermindert werden mussten. Es ergab sich indessen keine Änderung des Elektrizitätsverlustes unter der Glocke, mochte das elektrische Feld angelegt sein oder nicht. Es ist daher die Erscheinung so zu deuten, dass die Luft beim Strömen durch die Erde eine geringe, schnell unwirksam werdende Menge aktiver Emanation aufnimmt. Liess man die Luft durch inaktives Material, wie Schwerspat oder Kreide fliessen, so blieb jede Wirkung aus.

Einer Anregung des Herrn Bodländer in Braunschweig folgend untersuchten wir auch die natürliche Kohlensäure, die auf altem vulkanischen Boden aus grossen Tiefen emporquillt, auf ihren Gehalt an aktiver Emanation. Wir liessen uns eine Stahlflasche voll solcher natürlicher Kohlensäure in flüssigem Zustande von dem Kohlensäurewerk von Schoor und Wolter in Burgbrohl am Rhein unmittelbar nach der Füllung zusenden. Obgleich der Transport fünf Tage in Anspruch genommen hatte, erwies sich das aus der Flasche unter die mehrfach erwähnte Glasglocke geleitete Gas als deutlich ionisiert. Dass wir es nicht etwa mit einer Elektrizitätserregung beim Aufschäumen des Inhalts der Flasche oder durch Tröpfchenreibung an der Ausströmungsöffnung zu tun hatten, sondern mit einer wahren Radioaktivität, ging abgesehen von dem Fehlen

unipolarer Leitung einerseits aus der Dauer der Leitfähigkeit des Gases (die einige Tage anhielt) hervor, andererseits aus der Möglichkeit einen in dasselbe geführten negativ geladenen Metalldraht sekundär zu aktivieren. Nach Verlauf von 16 Tagen war das aus der fast noch völlig gefüllten Flasche entnommene Gas inaktiv und verhielt sich nun wie künstliche Kohlensäure, die wir aus Natriumbikarbonat und verdünnter Schwefelsäure entwickelten und wie die natürliche durch ein Baumwollefilter unter die Glocke leiteten.

Die aus dem Erdboden quellende Kohlensäure führt demnach geradeso wie die in den Erdkapillaren enthaltene Luft eine aktive Emanation mit sich. Es würde von Interesse sein, die aus Tiefquellen und Thermen aufsteigenden Gase unmittelbar nach ihrem Zutagetreten auf die gleiche Eigenschaft zu untersuchen.

Um jederzeit ein grösseres Volum von mit Bodenemanation beladener Luft zur Verfügung zu haben, liessen wir eine oben tubulierte Glocke aus starkem Eisenblech von etwa $1^1/_4$ cbm Inhalt mit ihrem unteren Rande 25 cm tief in die Erde des Gartens an unserer Wohnung eingraben. Bei verschlossenem Tubus stellt sich durch Diffusion bald die Gleichheit der Aktivität der unter der Glocke eingeschlossenen Luft mit der des Erdbodens heraus.

Die kräftige Aktivierung, die wir an Drähten beobachteten, die wir durch den Tubus isoliert und mit negativer Ladung einsenkten, veranlasste uns dazu, phosphoreszierende Körper in gleicher Weise zu behandeln, indem wir erwarteten, deutliche Lichterscheinungen an diesen wahrzunehmen.

Als wir in dieser Weise einen mit Sidotscher Blende überzogenen Kartonzylinder, der vorher tagelang im Dunkeln aufbewahrt war und keine Phosphoreszenz erkennen liess, in dunkler Nacht in jene Glocke brachten und ihn mehrere Stunden auf 2000—3000 Volt negativ luden, gab er nach dem Herausnehmen eine zwar schwache, aber im völlig dunkeln Raume deutlich erkennbare Phosphoreszenz.

Bei näherem Betrachten der Erscheinung bemerkten wir jenes eigentümliche flimmernde Aufleuchten, das inzwischen

schon von Herrn Crookes und uns selbst beschrieben ist,[1]) und dass durch das unausgesetzte Auftreten und Verschwinden unzähliger Lichtpunkte auf der Blende hervorgerufen wird.

Es drängte sich uns sofort der Gedanke auf, dass diese aufblitzenden Pünktchen die Stellen bezeichneten, an denen von der die Zinkblende überziehenden radioaktiven Schicht negative Elektronen abgeschleudert würden. Herr Crookes, der dieselbe Beobachtung machte, als er ein Radiumpräparat einem mit Sidotscher Blende überzogenem Schirme näherte, fasst sie dagegen als die Stellen auf, in denen die von dem Radium ausgehenden Elektronen die Oberfläche des Schirmes treffen. Wenngleich die eine wie die andere Auffassung noch stark hypothetisch ist, möchten wir doch die unsrige desshalb für die wahrscheinlichere halten, weil in unserm Versuche ein radioaktiver Körper ausser der phosphoreszierenden Oberfläche überhaupt nicht vorhanden war, eine Bewegung von Elektronen gegen die letztere also überhaupt nicht stattfand.

---

[1]) W. Crookes, Nature 67. Pag. 522. 1903. J. Elster und H. Geitel, Physikal. Zeitschrift. 4. S. 439. 1903.

H. Geitel.

II.

Uber die Abhängigkeit der Radioaktivität der freien Atmosphäre von meteorologischen Elementen.

Vom 15. Dezember 1901 bis Ende Dezember 1902 haben wir an insgesamt 155 Tagen die Radioaktivität der Luft an unserem Wohnorte nach der von uns angegebenen und bereits genau beschriebenen[1]) Methode bestimmt. Dabei wurde der 10 m lange etwa 1 mm starke Metalldraht an Ebonitisolatoren mit Natriumtrocknung von einer Ecke des Hauses zu einer anderen im rechten Winkel dazu gelegenen etwa 2 m oberhalb des Erdbodens frei ausgespannt; eine kurze befeuchtete Schnur verknüpfte ihn mit der inneren Belegung einer Leydnerflasche; die Konstanz der Ladung des Drahtes wurde mittels eines an ihn angeschlossenen Hochspannungselektroskopes kontrolliert; die Expositionszeit betrug immer je zwei Stunden. Es war uns indessen nicht möglich, die die Leydnerflasche ladende Vorrichtung (Induktorium, Wasserinfluenzmaschine, Hochspannungstrockensäule) jedesmal andauernd zu überwachen, doch war dafür Sorge getragen, dass das Potential des gespannten Drahtes 2800 Volt nicht überstieg und nicht unter 2000 Volt herunter sank. Den von uns ermittelten Zahlen haftet aus diesem Grunde eine gewisse Unsicherheit an, zumal sich später herausstellte, dass die Abhängigkeit der auf dem Drahte hervorgerufenen induzierten Radioaktivität vom Potential während der Exposition grösser ist als wir anfänglich glaubten. Der von uns seiner Zeit (vgl. das Protokoll der vorjährigen Sitzung) ausgesprochene

---

[1]) Physikal. Zeitschrift 3. Nr. 14. S. 305. 1902.

Satz, dass für dünne Drähte die induzierte Radioaktivität praktisch von dem Potential des Drahtes während seiner Aktivierung in freier Luft unabhängig ist, sofern dies nur 2000 Volt überschreitet, kann wahrscheinlich, wie sich inzwischen herausgestellt hat, nicht ohne Einschränkung aufrechterhalten werden. Man wird vielmehr bei künftigen Messungen die Forderung stellen müssen, sowohl von Tage zu Tage den Draht auf genau das gleiche Potential zu laden, als auch während der Dauer einer Aktivierung mit ganz konstantem Potentiale zu arbeiten.

Nach Beendigung der Aktivierung wurde der Draht auf ein zylindrisches Metallnetz aufgewunden, das an die Wandung eng anschliessend in den für diesen Zweck bis auf eine zentrale Öffnung auch unten geschlossenen Schutzzylinder unseres Zerstreuungselektrometers eingeführt wurde. Wir setzen wie früher die Aktivität der Luft gleich 1, wenn nach zweistündiger Exposition ein Meter des aktivierten Drahtes das Potential des Zerstreuungskörpers in 1 Stunde um 1 Volt erniedrigt. Vor jeder Messung bestimmten wir den Spannungsverlust, den der auf ein Potential von etwa 260 Volt geladene Zerstreuungskörper im Laufe einer Stunde im geschlossenen Schutzzylinder durch die natürliche Ionisierung der Luft erfuhr und brachten diesen Betrag dann bei der definitiven Messung in Abrechnung. Um das Beobachtungsverfahren und die angewandte Art der Berechnung zu kennzeichnen lassen wir das Protokoll einer derartigen Bestimmung hier folgen:

Aktivierung am 27. Juni 1902. Bewölkung 1, hohe Transparenz der Luft, Elektrizitätszerstreuung 1,6 %. Barometer 763.6. Temp. 26.6° C., Windrichtung und Stärke NE_4. Draht von 1—3 *p* mit der Hochspannungstrockensäule exponiert, Potential des Drahtes 2500 Volt.

I. Kontrollmessung vor der Aktivierung des Drahtes:

Anfangspotential:	20.2 Sklth	=	264 Volt
Potential nach 15′:	19.9 Sklthl	=	255 Volt

Spannungsverlust des Zerstreuungskörpers in 15 Minuten 9 Volt, also in 1 Stunde 36 Volt.

II. Messung mit aktiviertem Drahte:

Anfangspotential: 22.0 Sklthl = 264 Volt
Potential nach 10′: 10.2 Sklth = 201 Volt

Spannungsverlust des Zerstreuungskörpers in 10 Minuten 63 Volt, also in 1 Stunde **378** Volt.

Wirkung des 10 m langen Drahtes allein 378 — 36 = 342 Volt, also Wirkung pro Meter Drahtlänge: $\frac{342}{10} = 34.2$, also **A = 34.2.**

Die meteorologischen Daten entnahmen wir den Angaben der meteorologischen Station in Braunschweig, deren Vorstand Herr Klages uns dieselben bereitwilligst zur Verfügung stellte.

Wir halten die auf diese Weise gewonnenen „Aktivierungszahlen“ (A), die bei auffallend hohen oder niedrigen Beträgen oft im Laufe eines Tages mehrfach kontrolliert wurden, für genau genug, um einige Schlüsse orientierender Natur aus dem gesammelten Materiale abzuleiten in der Hoffnung dadurch zu einer Wiederholung unserer Versuche an andern Orten anzuregen.

Wir geben zunächst die Tabelle der Monatsmittel (A_m) unter Beifügung der beobachteten Maxima und Minima (A_{max} und A_{min}) sowie der Anzahl (n) der Beobachtungstage.

Tabelle I.

Monate	XII 1901	I 1902	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Bemerkungen
A_m	28	14	13	20	16	24	32	—	15	16	9	22	22	Die Beobachtungen fielen aus im Monat Juli und ausserdem an Tagen mit ergiebigen atmosphärischen Niederschlägen.
A_{max}	50	47	40	40	32	44	64	—	40	32	18	31	34	
A_{min}	17	4	5	5	9	6	18	—	6	5	4	4	17	
n	16	20	19	11	13	10	11	—	18	13	11	8	5	

Man entnimmt dieser Tabelle unmittelbar, dass der Gehalt der freien Atmosphäre an radioaktiver Emanation ganz ausserordentlich grossen Schwankungen unterworfen ist. Stehen doch

die extremen Werte im Verhältnis von 16 : 1 (absolutes Max. = 64, absolutes Min. = 4). Als Jahresmittel ergibt sich 18.6.

Zur Entscheidung der Frage, ob die in der Luft vorhandene Anzahl freier Ionen und ihre Beweglichkeit von Einfluss auf die Grösse der Aktivierungszahl ist, haben wir an insgesamt 96 Tagen auch die prozentuale Elektrizitätszerstreuung a bestimmt, indem wir letztere als ein Mass für jene beiden Grössen benutzten. Wir teilten alsdann die gewonnenen Zerstreuungskoeffizienten in neun Gruppen und ordneten dem Mittel jeder Gruppe der a die zugehörigen Mittel der A zu; so entstand Tabelle II.

Tabelle II.

Abhängigkeit der Radioaktivität der Luft von der Elektrizitätszerstreuung.

Gruppe Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Anzahl der Beob.	12	14	19	9	11	10	9	9	3
a	0,80 %	1,1 %	1,4 %	1,6 %	1,7 %	1,9 %	2,1 %	2,4 %	3,3 %
A_m	17.1	14.5	16.1	18.1	14.0	17.4	17.7	28.7	29.7
A_{max}	40	43	41	32	22	40	64	47	40
A_{min}	5	6	5	7	8	5	6	11	21

Wie man sieht schwanken überraschender Weise die Mittelwerte der A für eine prozentuale Zerstreuung von 0,8 bis 2 nur um wenige Einheiten, während die Maxima und Minima unregelmässig durch die Gruppen I bis VII verteilt erscheinen. Eine deutliche Steigerung der Werte A_m und A_{min} tritt gegenüber den voraufgehenden Werten erst in den beiden letzten — leider nur wenige Beobachtungen enthaltenden — Gruppen zutage.

Gegen eine unmittelbare Beziehung der Radioaktivität der Luft zum Zerstreuungskoeffizienten spricht auch der Umstand, dass bei Nebel meist Aktivierungen erhalten werden, welche das Jahresmittel übertreffen oder ihm nahe gleichen, während bekanntlich die Elektrizitätszerstreuung bei getrübter Luft nur

gering ist. In Tabelle III sind einige Beobachtungen betreffend die Aktivierung durch neblige Luft zusammengestellt.

Tabelle III.

Radioaktivität der Luft bei Nebel.

Datum	A	Bemerkungen
20. XII. 01	25	Nässender Nebel
23. XII. 01	27	Nässender Nebel
13. II. 02	41	Leichter Bodennebel
1. III. 02	22	Feuchter Nebel
15. XI. 02	31	Starker Dunst
15. XII. 02	16	Nebel, Rauhreif
22. I. 03	45	Dichter Bodennebel

An fünf in die Tabelle nicht aufgenommenen Nebeltagen lagen die Aktivierungszahlen zwischen 4 und 12; inaktiv erwies sich also die durch Nebel getrübte Luft nie. Jedenfalls ergibt sich aus diesen Beobachtungen, dass die Verhältnisse im freien Luftraume viel komplizierter liegen als in geschlossenen und unterirdischen Räumen, in denen die Leitfähigkeit der Luft mit dem Gehalt an radioaktiver Emanation aufs engste zusammenhängt.

Auch die Temperatur der Luft scheint nicht ohne bestimmenden Einfluss auf ihre Radioaktivität zu sein. Ordnet man die A nach Temperaturen über 0° und unter 0°, so liefern die 136 Beobachtungen bei Temperaturen über 0° das Gesamtmittel 18 und die 19 Beobachtungen bei Temperaturen unter 0° das Mittel $A = 26$. Auch Rutherford ist bei der Wiederholung unserer Versuche in Canada aufgefallen, dass an kalten Frosttagen die Aktivität der Luft besonders hoch ist.

Bezüglich der Windrichtung ergibt sich das Resultat, dass bei den aus dem Kontinente wehenden Winden die Werte der A durchschnittlich höher sind als bei solchen, die vom Meere her wehen. Vgl. Tabelle IV.

Tabelle IV.

Abhängigkeit der Radioaktivität der Luft von der Windrichtung.

Wind rein aus	A_m	A_{max}	A_{min}	n
S	22	50	6	14
N	15	23	4	4
E	22	64	6	18
W	12	32	5	23

Die auffällig hohen oft ganz unvermittelt auftretenden Maxima der A wurden meist bei reinem Süd oder Ost beobachtet oder doch bei solchen Winden, die eine südliche oder östliche Komponente hatten.

Ob obiger Satz bezüglich der Windrichtung allgemein giltig ist, müssen weitere Versuche lehren und zwar unter Verwendung eines Drahtes, den man an einem Orte exponiert, wo er sämtlichen Windrichtungen gleichmässig zugänglich ist; uns war dies nicht möglich. Das Haus schützte ihn vor direkten nördlichen und östlichen Luftströmungen.

Aus diesem Grunde ist auch der Einfluss der Windstärke nach dem von uns gesammelten Materiale nur schwierig zu beurteilen. Dazu kommt noch, dass von den 155 Beobachtungen allein 111 auf die Windstärken 4, 5 und 6 entfallen. Für die Windstärken 1 und 2 liegen nur 14 Beobachtungen vor, für welche der Mittelwert $A = 23$ ist, während für die 9 Beobachtungen bei den Windstärken 7 und 8 sich $A_m = 13.5$ ergibt. Diese Zahlen scheinen dafür zu sprechen, dass die Aktivierung um so höher gefunden wird, je stagnierender die Luft über dem Erdboden ist. Hierauf deuten auch die grossen bei getrübter Luft gefundenen Werte der A hin, da für unseren Wohnort Nebel fast stets mit vollständiger Windstille verknüpft sind. Doch ist es auch sehr wohl möglich, dass ein Optimum der Luftbewegung existiert.

Ganz unzweideutig tritt eine Abhängigkeit der Radioaktivität der Luft vom Barometerstande hervor; vgl. Tabelle V.

Tabelle V.

Abhängigkeit der Radioaktivität der Luft vom Barometerstande.

Mittlerer Barometerstand	740mm	750mm	760mm	770mm
A_m	23	19	17	13
Anzahl n	23	56	68	8

Dieser Einfluss des Barometerstandes wird verständlich unter Berücksichtigung der von uns aufgefundenen Tatsache, dass der Gehalt des unter der Erdoberfläche befindlichen Teiles der Atmosphäre an radioaktiver Emanation gegenüber dem oberhalb vorhandenen abnorm gross ist. Eine Verminderung des Luftdruckes wird daher zur Folge haben müssen, dass aus den Kapillaren der Erde Bodenluft in die Atmosphäre eindringt und die Aktivität vergrössert. Solange sich die Durchlässigkeit der Erdoberfläche nicht ändert, muss man erwarten, dass jede Abnahme des Luftdruckes von einem Anwachsen der Radioaktivität in der freien Atmosphäre begleitet werde. Doch wird dies nicht immer der Fall sein. Treten gleichzeitig Ereignisse ein, durch welche die Durchlässigkeit der Erdkapillaren beeinträchtigt wird, wie z. B. Anderungen im Stande des Grundwassers oder solche, durch welche der Luft die in ihr vorhandene radioaktive Emanation teilweise entzogen wird, wie z. B. reichlicher Fall von Niederschlägen,[1]) so wird man ein Ansteigen der Aktivität mit sinkendem Barometer nicht erwarten dürfen.

Zur Prüfung dieser aus der Radioaktivität der Bodenluft sich ungezwungen ergebenden Folgerungen haben wir vom 14. Februar bis zum 29. März dieses Jahres die Versuche wieder aufgenommen und täglich je eine Messung angestellt.

In Tabelle VI bezeichnet $-\delta B$ die Abnahme des Barometerstandes, $\pm\delta A$ die gleichzeitig beobachtete Zu- oder Ab-

[1]) Nach den Untersuchungen C. T. R. Wilsons und Mc Lennans sind Regen und Schnee induziert aktiv; die hier gemachte Voraussetzung ist also zutreffend. Vgl. J. C. Mc Lennan, University of Toronto Studies, Physical Science Series. 1903. No. 1. p. 12.

nahme der Aktivierungszahl. In dem angegebenen Zeitraume trat eine stetige Abnahme des Barometerstandes im Verlaufe zweier oder mehrerer aufeinanderfolgender Tage 14 mal auf. Wie man aus der Tabelle ersieht, findet sich, wenn man von einer am 22. Februar nach dem bekannten Staubfalle beobachteten Anomalie absieht, in 10 Fällen mit abnehmendem Luftdrucke eine Steigerung der Radioaktivität und nur in 4 Fällen verläuft die Schwankung im Werte der A im entgegengesetzten Sinne. Bei diesen Messungen wurde, um die Beobachtungszeit zu kürzen der zu aktivierende Draht nur 30 Minuten lang exponiert; infolge dessen sind für den angegebenen Zeitraum die Unterschiede zwischen A_{max} und A_{min} weit geringer als bei zweistündiger Exposition. Die Werte der A schwankten jetzt nur zwischen 4 und 24 gegen 4 und 64 bei den früheren Messungen.

Tabelle VI.

Übersicht über die Zunahme der Aktivierung mit fallendem Barometer.

Intervall		$-\delta B$	δA	Bemerkungen
von	bis			
18/II	23/II	− 13.5	+ 14.6	Am 22. kurz andauernde Schwankung im entgegengesetzten Sinne nach Staubfall und Regen
24/II	25/II	− 1.5	+ 4.8	
25/II	26/II	− 4.7	− 13.8	Schwankung im entgegengesetzten Sinne. Am 26. morgens 7 Uhr bereits Regen; der zweite Tag regnerisch
26/II	28/II	− 10.7	+ 12.7	
1/III	3/III	− 19.9	+ 3.0	
4/III	5/III	− 0.6	+ 3.9	
9/III	10/III	− 5.0	− 8.1	Schwankung im entgegengesetzten Sinne
10/III	11/III	− 0.4	+ 6.9	
14/III	15/III	− 3.7	+ 5.4	
15/III	16/III	− 3.9	− 6.7	Schwankung im entgegengesetzten Sinne
17/III	18/III	− 6.2	+ 6.8	
21/III	23/III	− 7.8	+ 10.1	
23/III	24/III	− 1.3	− 19.7	Schwankung im entgegengesetzten Sinne nach ergiebigem nächtlichen Regenfalle.
25/III	27/III	− 6.8	+ 13.5	

Im Laufe des Monats Juli 1902 haben wir Aktivierungsversuche ausserhalb Wolfenbüttels angestellt und zwar Geitel in der ersten Hälfte des genannten Monats in Clausthal im Harz und in der zweiten am Strande von Zinnowitz an der Ostsee, während Elster vom 6. bis 31. Juli derartige Bestimmungen auf der nordfriesischen Insel Juist durchführte.

Die Resultate Geitels haben, soweit sie sich auf Versuche mit Kellerluft erstreckten, bereits in der voranstehenden Mitteilung Berücksichtigung gefunden.

·Zu den Versuchen in Juist diente das von uns zusammengestellte transportable Instrumentarium zur Bestimmung der Radioaktivität der Luft[1]) bestehend aus dem Zerstreuungselektrometer, dem Hochspannungselektroskop, der Hochspannungstrockensäule von ca. 2500 Volt Klemmenspannung und zwei glockenförmigen Drahthaltern mit Ebonitisolatoren und Natriumtrocknung. Dasselbe hat sich, wie wir hervorheben möchten, durchaus bewährt; es gelang selbst bei feuchter Witterung und mit Salzstaub erfüllter Luft das Drahtsystem kurze Zeit nach dem Anschluss an den negativen Pol der Säule so aufzuladen, dass das Hochspannungselektroskop 2200 Volt zeigte und dem Drahte kleine Fünkchen entzogen werden konnten.

Die Messungen wurden nicht am Strande selbst vorgenommen, sondern auf einem freien Platze im Dorfe. Die Drähte waren in etwa 3 m Höhe über dem Erdboden zwischen zwei eingerammten Bambusstangen isoliert befestigt. Von dem gespannten Drahte führte eine Zuleitung unter rechtem Winkel zum negativen Pol der Säule, die bei heiterem Wetter in der Sonne im Freien auf einem Tischchen stand; bei unsicherer Witterung dagegen im Innern eines Hauses ihren Platz hatte; in diesem Falle war der Draht durchs offene Fenster geführt.

Im ganzen wurde an 21 Tagen gemessen. Als Mittelwert ergab sich: $A_m = 5.2$; das Maximum $A_{max} = 15.8$ wurde bei NNW-Sturm und böiger Wetterlage am 11. VII beob-

---

1) Physikal. Zeitschrift. 4. Nr. 4. S. 2. 1902.

achtet, das Minimum $A_{min} = 1.6$ am 25. VII bei schwachem SW und bedecktem Himmel.

Vergleicht man hiermit die in Wolfenbüttel vom 20. Juni bis zum 1. Juli und dann wieder vom 1. August bis zum 1. September unter genau den gleichen Versuchsbedingungen (es wurde in den angegebenen Zeiträumen auch hier **ausschliesslich** die Hochspannungstrockensäule verwandt) ermittelten Werte:

Juni:	$A_m = 27$	$A_{max} = 34$	$A_{min} = 16$	$n = 5$
August:	$A_m = 15$	$A_{max} = 40$	$A_{min} = 6$	$n = 18$

so kommt man zu dem Schlusse, dass die Seeluft etwa nur ein drittel soviel radioaktive Emanation enthielt wie die in Wolfenbüttel. Dabei war die Elektrizitätszerstreuung sicher nicht geringer als bei uns. Im Mittel aus ebenfalls 21 (Doppel-) Beobachtungen ergab sich:

$$a_+ = 1.23 \qquad a_- = 1.89,$$

also $a_m = 1.56$ gegen 1.43 in Wolfenbüttel im Juni und 1.35 im August,[1]) man wird also die mittlere prozentuale Zerstreuung im Juli bei uns sehr nahe = 1,4 setzen dürfen.

Dieser Umstand, dass die Seeluft mindestens gleich gut leitet, aber dabei weniger radioaktive Emanation enthält als die Luft über dem Binnenlande, deutet wohl darauf hin, dass noch andere Quellen der Ionisierung des Luftmeeres vorhanden sind als das Eindringen von Bodenluft. Die an Zahl nur geringen Beobachtungen **Geitels** in **Zinnowitz** an der Ostsee führten ebenfalls zu niedrigeren Aktivierungszahlen für die freie Atmosphäre als in **Wolfenbüttel**; eine Messung in Clausthal ergab $A = 33$.

Die geringe Radioaktivität der Luft über **Juist** hat nun auch zur Folge, dass Aktivierungen durch das natürliche elektrische Feld der Erde weit weniger deutlich ausgeprägt sind als bei uns. Bei steiler Seebrise ist es ja leicht möglich einen Drachen stundenlang in sehr bedeutender Höhe über der Erd-

---

[1]) Wien. Ber. Bd. 111. Abt. IIa. S. 961. 1902.

oberfläche zu halten. Derartige Versuche wurden an Tagen mit einem elektrischen Gefälle von 200—400 Volt/Meter, die in Juist häufig auftreten,[1]) mehrfach angestellt. Die Aktivität des obersten Endes der Drachenschnur war aber sehr gering. Am 5. VII ergab sich $A = 1.6$, am 8. VII $A = 2.0$, am 19. VII gar nur $A = 0.4$ und am 22. VII $A = 2.3$. Bei Verwendung einer mit Seewasser befeuchteten Schnur fand sich am 29. VII $A = 3.7$. Es sind dies Werte von derselben Grössenordnung wie sie bei uns horizontal gespannte geerdete Drähte in etwa 10 m Höhe über dem Erdboden liefern bei einem Potentialgefälle von etwa 100 Volt/Meter. (Vgl. unseren vorjährigen Bericht.)

[1]) Terr. Magnetism. VII. Nr. 1. S. 9. 1902.

J. Elster.

Über Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen.

Von **J. Elster** und **H. Geitel.**

Die folgende Zusammenstellung über Ziele und Methoden der Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der Luft und ihres Gehalts an radioaktiver Emanation soll dem Zwecke dienen, Beobachtungen dieser Art zu erleichtern, sie vor gewissen Fehlern zu schützen und sie in bestimmte Richtungen zu leiten.

Wenngleich es sehr wünschenswert ist, dass solche Arbeiten, wie es ja in dem letzten Jahre reichlich der Fall war, durch das von dem Gegenstande selbst erregte Interesse und die Erwartung weiterer Aufschlüsse auch ferner eifrige Pflege finden mögen, so können wir doch den Zweifel nicht unterdrücken, ob die Zeit für ein systematisches, etwa von einer Zentralstelle angeordnetes Zusammenwirken schon jetzt gekommen ist. Das Gebiet ist noch zu neu und der Wechsel der Vorstellungen in kurzen Zeiträumen noch so tiefgreifend, dass sich Vorschriften spezieller Art über das, was etwa in bestimmten Terminstunden täglich zu beobachten wäre, nicht aufstellen lassen. Es muss, im Gegensatze zu andern meteorologischen und zu den magnetischen Bestimmungen das Wesentliche der Initiative des Beobachters, der selbständigen Kritik des von ihm ermittelten Befundes überlassen werden. Dazu kommt die Unvollkommenheit der bis jetzt ausgearbeiteten Methoden, die, obgleich nach der quantitativen Seite zur Zeit völlig ausreichend, mehrfach noch

eine gewisse Unklarheit in betreff der Bedeutung der gemessenen Grössen bestehen lassen.

Wenn es uns erlaubt ist, so möchten wir desshalb der Überzeugung Ausdruck geben, dass es für die Sache uns am förderlichsten scheint, wenn die kartellierten Akademien mit ihrer Autorität die Beteiligung an den betreffenden Arbeiten anregten, wo irgend geeignete Persönlichkeiten und Institute vorhanden sind, dabei aber von der Aufstellung und Empfehlung spezieller Arbeitspläne vor der Hand noch absähen.

I.

Über die Bestimmung der Leitfähigkeit der Luft in der Nähe der Erdoberfläche.

Die Erfahrungen der letzten Jahre haben ergeben, dass die Leitfähigkeit der natürlichen Luft an der Erdoberfläche, als proportional der Anzahl der freien Ionen in der Volumeinheit und ihrer Beweglichkeit gedacht, durch gewisse klimatische und meteorologische Zustände der Atmosphäre beeinflusst wird. Diese sind zum Teil derart, dass sie von einem an einen bestimmten Ort gebundenen Beobachter nicht sämtlich und ihrem ganzen Umfange nach in Betracht gezogen werden können, es darf daher ein Zusammenwirken von Beobachtern verschiedener Länder bei diesen Untersuchungen als zweckmässig bezeichnet werden.

Es sind drei spezielle Tatsachen zu nennen, die abgesehen von der Frage nach dem Einfluss der allgemeinen meteorologischen Verhältnisse dadurch voraussichtlich geklärt werden würden.

1. Die erhöhte Leitfähigkeit der Luft im Hochgebirge und den Polargegenden.

2. Dieselbe Eigenschaft der Luft auch in niederen Niveaux beim Eintreten von Fallwinden.

3. Die Ionisierung der Luft durch die aus dem Erdboden

dringende radioaktive Emanation, deren Einfluss je nach der Bodenbeschaffenheit verschieden ist und die daher an verschiedenen Orten in ungleicher Weise zu der beobachteten Leitfähigkeit der Luft beitragen muss.

Wird anerkannt, dass solche „Zerstreuungsmessungen" an geographisch weit entfernten Orten wünschenswert sind, so ist die nächste Frage die nach der zweckmässigsten Methode.

Das ideale Ziel würde die Messung des Elektrizitätsverlusts in der Zeiteinheit von einem frei in der Atmosphäre aufgestellten isolierten Leiter sein, ausser dessen eigenem elektrischen Felde kein anderes in seiner Umgebung vorhanden ist. Der Verwirklichung dieses Ideals stellen sich Schwierigkeiten entgegen, die bis jetzt noch nicht überwunden sind. Die wesentlichste, ja die einzig ernste liegt in der Existenz des natürlichen elektrischen Feldes über der Erdoberfläche. Es beeinflusst die Angaben des Messinstruments, das den elektrischen Zustand des Versuchskörpers bestimmen soll teils direkt, teils aber durch Veränderung des Potentials jenes Körpers, es bewirkt ferner polare Verschiedenheiten in der Ionenbewegung, die sich durch ungleiche Verluste für positive und negative Ladungen verraten. Ein Schutz gegen dieses störende Feld ist dadurch möglich, dass man den Versuchskörper mit einer zur Erde abgeleiteten Hülle, dem Schutzdache, umgiebt. Bei dieser Abänderung ist er aber nicht mehr „frei" aufgestellt; die von ihm ausgehenden Kraftlinien, anstatt an Jonen der umgebenen Luft zu endigen und diese zu dem Versuchskörper heranzuziehen, haften jetzt z. T. an den durch Influenz auf der Hülle angesammelten Elektrizitätsmengen und bleiben daher wirkungslos. Während für den frei aufgestellten Körper das Coulombsche (Exponential-) Gesetz des Elektrizitätsverlustes gilt,[1]) wird bei der Einführung des Schutzdaches die Beziehung zwischen neutralisierter Elektrizitätsmenge und der zugehörigen Zeit verwickelter; sie nähert sich der für geschlossene Räume gültigen, in denen beim Ein-

[1]) Vgl. H. Ebert, Terr. Magnetism. and Atm. Electricity. Bd. 6. p. 97. 1901.

tritt des Sättigungsstromes in gleichen Zeiten gleiche Elektrizitätsmengen durch die Jonenbewegung ausgeglichen werden.

Durch Vergrösserung des Raumes unter dem Schutzdach würde man die Annäherung an das Coulombsche Gesetz vollkommener machen können; doch sind hier bald praktische Grenzen durch die Rücksicht auf die Handlichkeit und Stabilität des Apparats erreicht. Auch der Ersatz des Schutzdaches durch ein Netzwerk von Drähten ist nicht zu empfehlen. Zwar würde dadurch eine gewisse Ähnlichkeit mit der freien Aufstellung bei gleichzeitigem Schutz vor äusseren elektrischen Kräften erreicht werden, aber in dem elektrischen Felde der Erde würde das Drahtnetz wie ein Fangkäfig für Ionen der einen Art wirken, indem es sich mit Influenzelektrizität bedeckt und die zu seiner Oberflächenladung ungleichnamigen Ionen der Luft gegen sich beschleunigt. Daher geben solche Drahtnetze zu noch stärkeren polaren Verschiedenheiten der Zerstreuungskoeffizienten Anlass, als man sie schon bei Apparaten mit zusammenhängendem Schutzdache beobachtet, sie täuschen das Überwiegen einer Jonenart in der Luft vor, das in Wirklichkeit gar nicht besteht.

Man könnte, um aus diesen Schwierigkeiten herauszukommen, nach dem Vorschlage von Herrn H. Ebert sich allein auf die Beobachtung der Elektrizitätszerstreuung im Innern eines Metallrohrs beschränken, durch das ein gemessenes Luftquantum in gemessener Zeit gesaugt wird. So vorzüglich diese Methode ist, um die äusseren elektrischen Kräfte unschädlich zu machen, so darf man doch nicht vergessen, dass man auf diesem Wege nicht dieselbe Grösse bestimmt, wie durch den Elektrizitätsverlust eines frei aufgestellten Versuchskörpers. Neben der Ionenzahl pro Volumeinheit ist auch ihre Beweglichkeit im letzteren Falle von ausschlaggebender Bedeutung. Diese beiden Faktoren werden bei Anwendung eines frei exponierten „Zerstreuungskörpers“ nicht von einander getrennt, saugt man dagegen die Luft gegen den Zerstreuungskörper heran, so werden besonders auch die trägeren Ionen mit ihm in Kontakt kommen, die durch den Antrieb seines eigenen

Feldes ihn in der gleichen Zeit überhaupt nicht erreicht haben würden. Der Ebertsche Apparat reagiert demnach mehr wie ein in ruhender Luft frei aufgestellter Leiter auf die mit grösserer Masse beschwerten „Molionen", er verwischt den Unterschied der Beweglichkeit der Ionen, giebt dagegen ein Mass für ihre Anzahl in der Volumeinheit. Die Beobachtungen des Elektrizitätsverlustes nach den beiden Methoden können sich daher nicht gegenseitig ersetzen, die eine Methode ist vielmehr als eine Ergänzung der andern zu betrachten.

Zu jedem zu Zerstreuungsmessungen dienenden Apparate gehört ausser dem Körper, der durch die Berührung mit den Ionen der Luft entladen wird, ein Elektrometer zur Messung seines Potentialniveaus. Da es sich um Bestimmung von Elektrizitätsmengen handelt, so müssen die Kapazitäten beider Bestandteile bekannt sein.[1]) Zweckmässig ist, dass die Kapazität des Elektrometers möglichst klein ist gegenüber der des Zerstreuungskörpers, weil hierdurch die Empfindlichkeit des Apparates vergrössert wird; um Aenderungen der Kapazität auszuschliessen, sind sämtliche beweglichen Teile des Instruments, soweit sie auf diese Einfluss haben können, so anzubringen, dass ihre gegenseitige Lage unverändert immer wieder hergestellt werden kann. Da der Gesamtapparat leicht transportabel sein muss, ist das Quadrantelektrometer als Messvorrichtung, selbst abgesehen von seiner ungünstigen grossen Kapazität, nicht empfehlenswert, es ist besser durch das Exnersche Elektroskop zu ersetzen. Auf gute Isolation und auf die Möglichkeit, den durch geringe Mängel derselben entstehenden Fehler zu bestimmen, ist besonderes Gewicht zu legen. Die für Laboratoriumsversuche ausgezeichnete Methode von C. T. R. Wilson, den Elektrizitätsfluss über eine isolierende Stütze dadurch auszuschliessen, dass man diese auf einem durch Anschluss an eine konstante Elektrizitätsquelle auf unveränderlichem Potentiale gehaltenen Leiter ruhen lässt, verbietet sich

---

[1]) Vgl. darüber die Methode von F. Harms. Dondes Annalen 10. p. 816. 1903.

bei Messungen der Elektrizitätszerstreuung an beliebigen Orten im Freien durch die Schwierigkeit, jene Elektrizitätsquelle zu transportieren, von selbst, nicht zu gedenken der Störung, die durch die Einführung elektrisierter Körper in die Nähe des Messapparats entstehen würde.

Trotz mehrerer unleugbar vorhandener Mängel scheint uns daher zu Zerstreuungsmessungen noch immer am meisten empfehlenswert die von uns vorgeschlagene Kombination des Exnerschen Elektroskops — mit innerer (Bernstein)isolation und parallaxefreier Spiegelskala — und einem unmittelbar darauf gesetzten Zerstreuungskörper unter Schutzdach oder für Ionenzählung der von Hrn. Ebert eingeführte Aspirationsapparat. Die Vorzüge der Konstruktion liegen in der guten Isolation, die im Notfall durch Natriumtrocknung auch in den schwierigsten Verhältnissen aufrecht erhalten werden kann, in der Möglichkeit, jeder Zeit den etwaigen Isolationsfehler zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen, in der leichten Transportierbarkeit und der Widerstandsfähigkeit gegen die Fährlichkeiten der Mitnahme auf Reisen. Auch in elektrischen Messungen nicht besonders vorgebildete Beobachter werden bei Beachtung der leicht angebbaren Vorsichtsmassregeln mit den Apparaten zu arbeiten lernen.

Die Schwäche des von uns konstruierten Instruments liegt, wie schon angedeutet, in der Verwendung des Schutzdaches, das einerseits unentbehrlich, anderseits durch Einengung des Zerstreuungsraumes schädlich ist. Da das Coulombsche Gesetz der Zerstreuung unter dem Schutzdache nicht mehr streng zutrifft, so wird der auf grund desselben berechnete Zerstreuungskoeffizient von der Höhe der Ladung abhängig. Man erhält für hohe Potentiale kleinere Zerstreuungskoeffizienten als für niedrige. Daher wird es nötig, alle Apparate, die zu Vergleichungen der Leitungsfähigkeit der Luft dienen sollen, nicht nur in genau gleicher Weise in allen ihren Dimensionen herzustellen, sondern auch den zugehörigen Elektroskopen möglichst dieselbe Empfindlichkeit zu geben, damit man bei allen die Messungen innerhalb desselben Spannungsbereiches vornimmt.

Ist diese Bedingung, wie bei den von der Firma Günther und Tegetmeyer verfertigten Instrumenten erfüllt, so sind die mit ihnen gewonnenen Ergebnisse vergleichbar.

Bei solchen Beobachtungen der Elektrizitätszerstreuung, die längere Zeit hindurch an derselben Station ausgeführt werden sollen, halten wir für den geeignetsten Termin die Zeit um oder bald nach Mittag, natürlich sind auch öftere Wiederholungen zu andern Tagesstunden wünschenswert, ebenso wie auch Nachtbeobachtungen. Die gleichzeitige Aufzeichnung anderer meteorologischer Elemente, insbesondere der Temperatur, der absoluten und relativen Feuchtigkeit, der Windrichtung und Stärke, der Lufttrübung und der Barometerbewegung giebt dann die Grundlage für die Aufsuchung des etwaigen Einflusses dieser Faktoren auf die Leitfähigkeit der Luft. Wir haben selbst in dieser Richtung das Beobachtungsmaterial eines Jahres verwertet.

Bei Messungen im Hochgebirge ist der Apparat nach Möglichkeit geschützt in tiefen Senkungen des Terrains aufzustellen. Auf den Berggipfeln bewirkt nämlich in der oben schon erwähnten Art die starke Intensität des Erdfeldes durch Erregung von Influenzladungen auf dem Schutzdach und allen benachbarten Leitern erhebliche Differenzen in den Zerstreuungskoeffizienten für negative und positive Elektrisierungen, indem die ersteren viel grösser als die letzteren gefunden werden. In geringerem Masse zeigt sich dieselbe Erscheinung auch bei Messungen im Flachlande, wenn der Apparat eine ungeschützte Lage einnimmt. Stets ist darauf zu achten, dass die Sonnenstrahlen nicht in das Elektroskopgehäuse eindringen, sie erregen Luftströme, durch die die Blättchen gehoben werden. Im Gebirge ist, wenn nicht besondere Absichten das Gegenteil rechtfertigen, die Nähe von Wasserfällen bei Vornahme der Messungen zu vermeiden; die Luft ist an solchen Orten mit einer abnormen Menge negativer Ionen beladen.

In den Polargegenden ist die Bestimmung der Leitfähigkeit der Luft von besonderem Interesse wegen etwa vorhandener Beziehungen zu den Polarlichterscheinungen. Vor allem wäre

es wünschenswert, Zerstreuungsmessungen anzustellen, wenn die Luft der untersten Schichten, und zwar in der Nähe des Beobachters, Spuren von Phosphoreszenz zeigt, wie dies nach bestimmten Berichten zu Zeiten der Fall sein soll. Hier würden auch Versuche über einen etwaigen übernormalen Gehalt der Luft an radioaktiver Emanation ergänzend zugefügt werden können.

Beobachtungen, die den Zusammenhang der Elektrizitätszerstreuung mit der Luftbewegung in Fallwinden zum Gegenstande haben, können naturgemäss nur dort systematisch durchgeführt werden, wo solche Föhnerscheinungen häufiger vorkommen. Hier sind hygrometrische Messungen als Beigabe unerlässlich.

Der Einfluss radioaktiver, aus dem Erdboden stammender Emanation auf die Leitfähigkeit der Luft kann bei der Neuheit der Erscheinung in spezieller Weise wohl noch nicht durch Kooperation verschiedener Stationen untersucht werden. Immerhin würden sich aber aus der geographischen Lage der Stationen (ob im Innern von Kontinenten gelegen oder teilweise von der See umgeben) in Verbindung mit den daselbst beobachteten Zerstreuungskoeffizienten Schlüsse darauf ziehen lassen, ob die Ionisierung der Atmosphäre zu einem merklichen Teil von den Festländern ausgeht. Es ist, wenn dies zutrifft, allerdings zu erwarten, dass hierbei selbst die geologische Beschaffenheit der Erdoberfläche am Beobachtungsorte nicht ohne Einfluss sein kann. (Vgl. den folgenden Bericht.)

Als allgemeine für alle Zerstreuungsmessungen giltige Vorschrift möchten wir zum Schlusse noch die Warnung vor der Infektion der Apparate durch radioaktive Stoffe, wie Radium oder Polonium aussprechen. Es ist absolut unzulässig, solche in denselben Räumen mit den Zerstreuungsapparaten aufzubewahren.

Für die Handhabung der Apparate verweisen wir auf: Terrestial Magnetism. IV. p. 216. 1899, wo auch die Berechnung der Zerstreuungskoeffizienten angegeben ist, Physik. Zeitschrift 1. p. 11. 1899. Physikal. Zeitschrift 4. p. 137.

1902 und Wien. Ber. 111. Abt. IIa S. 946. Annalen der Physik. 4. Folge. II. S. 425.

Die Beobachtungsmethode mittelst des Ebertschen Aspirationsapparates, dessen Verwendung neben dem unsrigen wir warm empfehlen, ist von Herrn Ebert beschrieben in: Physik. Zeitschrift 2. S. 662. 1901 und Deutsche Zeitschrift für Luftschiffahrt, Heft 4. 1902.

H. Geitel.

II.

Über die Bestimmung der Radioaktivität der Luft.

A. Ziele.

Für die Auffassung der in der Erdatmosphäre sich abspielenden elektrischen Vorgänge ist die Frage nach den Quellen der Radioaktivität der Luft, d. h. der Fähigkeit derselben in ihr befindliche, längere Zeit auf negativem Potentiale gehaltene Leiter vorübergehend radioaktiv zu machen (siehe das am Schlusse S. 84 gegebene Literaturverzeichnis Nr. 5) ohne Zweifel von Bedeutung. Diese Eigenschaft verdankt sie einem Gehalt an radioaktiver Emanation, die wahrscheinlich (mindestens zum Teil) dem Erdkörper selbst entstammt (4) und die nachweislich in abnorm grosser Menge in der Luft unterirdischer Räume (1a) enthalten ist. Gewisse Erfahrungen sprechen für die allgemeine Verbreitung eines primär aktiven Körpers in der obersten Erdbodenschicht.

Die weitere Forschung würde die Aufklärung folgender Fragen anzustreben haben:

1. Ist die primäre Radioaktivität der Erdsubstanz eine allgemein verbreitete Erscheinung?

2. Zeigt die Radioaktivität der Bodenluft je nach ihrer Herkunft graduelle Unterschiede ihrer Aktivität; existieren insbesondere Orte, an denen ihre Aktivität gleich Null ist, und wie verhalten sich aus grösseren Tiefen entnommene Luftproben?

3. Ist die Radioaktivität der freien Atmosphäre von meteorologischen Elementen abhängig?

Während die Beantwortung der Fragen 1 und 2 wohl vorerst noch der Initiative einzelner Forscher zu überlassen ist, halten wir eine Anregung zur Beschäftigung mit Frage 3 mehr für empfehlenswert. Desshalb werden wir im letzten Teile dieses Entwurfes auf die Gewinnung eines allgemein vergleichbaren Masses für den Grad der Radioaktivität der Luft eingehend zurückkommen.

Dass eine Abhängigkeit von gewissen meteorologischen Elementen vorhanden sein muss, lässt sich leicht übersehen (4).

So wird man eine Beziehung zwischen der elektrischen Leitfähigkeit der Luft und ihrem jeweiligen Gehalt an radioaktiver Emanation insofern vermuten dürfen, als in geschlossenen Räumen das Eindringen von Bodenluft die Leitfähigkeit der Luftmassen in ganz auffallender Weise erhöht. Namentlich würde es von Interesse sein zu entscheiden, wie sich jene gutleitenden Luftschichten in radioaktiver Beziehung verhalten, wie sie im Hochgebirge (namentlich bei Föhn) über Capri, Island und Spitzbergen angetroffen wurden. Sollten diese arm an Emanation sein, so würde hierin ein Fingerzeig dafür liegen, dass im Luftmeere noch andere Quellen der Ionisierung als das Eindringen von Bodenluft und der Emanation des Erdkörpers vorhanden sind. Der gleiche Schluss würde sich auch ziehen lassen, wenn bei Beobachtungen auf dem freien Ozean nur kleine Werte für die Radioaktivität der Luft gefunden würden, während ihre Leitfähigkeit der über kontinentalen Gebieten lagernden Luft nicht nachstünde. Auch Messungen vom Ballon aus an Orten hoher Leitfähigkeit könnten nach der angedeuteten Richtung hin Aufschluss geben.

Eine Zunahme der Radioaktivität mit abnehmendem Luftdruck ist sehr wahrscheinlich; namentlich wird man bei sogenannten „Barometerstürzen“, bei welchen durch die plötzlich auftretende Luftverdünnung Bodenluft in die Atmosphäre hinein aspiriert werden muss, ein deutliches Anwachsen der Radioaktivität erwarten dürfen. Ein Ansteigen des Grundwassers am Beobachtungsorte wird ebenfalls einen Teil der Luft in den Erdkapillaren zum Entweichen in die Atmosphäre

zwingen. Auch ein Zusammenhang der Radioaktivität der Luft mit der Richtung der Winde, ob diese vom Ozean oder vom Kontinente her wehen und ihrer Stärke, ob stagnierende oder bewegte Luftmassen dem exponierten Körper die Emanation zuführen, ist sehr wahrscheinlich, dagegen fehlen für einen solchen mit der absoluten und relativen Feuchtigkeit, der Temperatur und Transparenz der Atmosphäre noch fast alle Anhaltspunkte.

Untersuchungen der vorgeschlagenen Art würden auch zur Entscheidung der Frage beitragen, ob sich die Luft unter der Erdoberfläche durch Aufnahme der Emanation eines primär aktiven Stoffes aktiviert oder ob die Aktivität erst durch Streichen der Luft durch die befeuchteten Kapillaren des Bodens nach Analogie der Versuche von Sella und Pocchettino, J. J. Thomson und Himstedt erregt wird.

Wenn der blosse Kontakt von Wasser und Luft die radioaktive Emanation erzeugen würde, so wäre ein erhöhter Gehalt an radioaktiver Emanation nach ergiebigem Regen, in der Nähe von Wasserfällen und unweit der Meeresbrandung zu erwarten. Bei unseren Bestimmungen (4) der Radioaktivität der Luft nach Regenfällen und in der Nähe der Brandung der Nord- und Ostsee sowie bei den Versuchen McLennans[1]) am Fusse des Niagara war dies nicht der Fall.

B. Methode.

Voranschicken möchten wir als allgemeine Vorschrift, dass einwandfreie Resultate nur in solchen und in der Nähe solcher Gebäude erzielt werden können, die von radioaktiven Präparaten irgend welcher Art **absolut frei** gehalten werden.

1. Stationsbeobachtungen (1b).

Als Versuchskörper verwendet man einen blanken horizontal in mindestens zwei Meter Höhe über dem Erdboden gespannten

[1]) Phys. Rev. p. 235. 1903.

Kupferdraht von etwa 1 mm Stärke und genau 10 m Länge. Man aktiviert diesen zwei Stunden lang an immer demselben allen Windrichtungen möglichst gleichmässig zugänglichen Orte. Die Isolation bewirkt man zweckmässig durch die von uns konstruierten glockenförmigen Drahthalter, deren Ansatzröhrchen nach dem Gebrauche geschlossen werden müssen, im übrigen aber an den sie tragenden Stützen ein für allemal im Freien belassen werden können. Eine ebenfalls isolierte Zuleitung sorgt für die Verbindung des exponierten Drahtes mit dem negativen Pole eines Hochspannungsakkumulators von eintausend zweihundert Elementen, dessen Polspannung durch ein Hochspannungselektroskop Braunscher Form kontrolliert wird, während der positive Pol durch einen so grossen Widerstand zur Erde abgeleitet ist, dass der nicht geerdete Pol und somit auch der exponierte Draht ohne Gefahr berührt werden kann.

Das Potential des geladenen Drahtes muss von Tag zu Tag konstant gehalten werden; dass dasselbe sich bei der zweistündigen Expositionszeit ändert, ist bei Verwendung von Akkumulatoren ausgeschlossen. Die geforderte Konstanz lässt sich leicht dadurch erreichen, dass man einige in Reserve gehaltene Zellen mit zunehmender Selbstentladung des Akkumulators nach und nach hinzuschaltet.

Man darf nicht übersehen, dass auch bei genau gleichem Potentiale von einem Tage zum andern doch die Dichtigkeit der Elektrizität auf dem Drahte durch die Influenz des elektrischen Feldes der Erde von Tag zu Tag verschieden sein wird. Dieser Übelstand wird voraussichtlich um so weniger hervortreten, je höher man das Potential des exponierten Drahtes wählt. Es haftet daher den im Freien gewonnenen Resultaten stets eine gewisse Ungenauigkeit an, die sich nur vermeiden liesse, wenn man den Draht in einem vor der Influenz der Luftelektrizität geschützten Raume exponierte etwa in einer geräumigen Halle, deren Luft sich von aussen möglichst ungehindert erneuern kann. Natürlich würden dann Messungen an verschiedenen Orten nur vergleichbar sein bei gleicher

Grösse und Gestalt der Halle und identischer relativer Lage des Drahtes zu den Wänden derselben.

Vor der Hand wird man von der Verwendung dieser Beobachtungsart ihrer Umständlichkeit wegen absehn müssen.

Als ladende Vorrichtung lässt sich zur Not auch eine Wasserinfluenzmaschine, ein Induktorium mit ganz zuverlässig arbeitendem Unterbrecher in Kombination mit einer durch Natrium innen trocken gehaltenen Leydnerflasche oder durch eine mit der Hand gedrehte oder durch einen Motor getriebene Wimshurstmaschine benutzen. Alle diese Apparate bedürfen aber einer unausgesetzten Kontrolle und sind daher bei quantitativen Bestimmungen, wenn dieselben nicht äusserst zeitraubend werden sollen, nur bei kürzeren Expositionszeiten von etwa 20—30 Minuten mit Vorteil verwendbar. Natürlich erzielt man bei so kleinen Expositionszeiten nicht das jeweilige Maximum der Aktivität des Drahtes, das, wie wir uns mehrfach überzeugten, bei zweistündiger Exposition sehr nahe erreicht wird.

Das Zerstreuungselektrometer, dass zur Messung der induzierten Radioaktivität des im Freien aktivierten Drahtes dient, soll in einem staubfreien, trocknen Raume Aufstellung finden. Vor der definitiven Messung bestimmt man den Spannungsverlust, den der auf ein Potential von etwa 200 Volt geladene Zerstreuungskörper im Laufe von 15 Minuten durch die natürliche Ionisierung der Luft in dem etwa $3^1/_4$ Liter fassenden geschlossenen Zerstreuungskessel erfährt und bringt später den Betrag dieser „Gegenprobe" in Abrechnung. Diese Korrektion soll 8—9 Volt pro $^1/_4$ Stunde nicht überschreiten. So lange die Gegenprobe unter dieser Grenze bleibt, sehe man von der Verwendung der Natriumtrocknung ab. Bei dieser Kontrollmessung ist es erforderlich, den dem Apparate beigegebenen Drahtnetzzylinder in den Zerstreuungskessel hinein zu stellen, da die Kapazität des Apparates ohne eingeführtes Netz etwas geringer ist, als mit demselben. Ferner hat die Gegenprobe der definitiven Messung v o r a n zugehen, andernfalls erhält man zu grosse Werte für dieselbe und demnach zu kleine für die

Aktivierungszahl. Der radioaktive Draht aktiviert nämlich tertiär die inneren Wandungen des Zerstreuungskessels oder die Oberfläche des Zerstreuungszylinders je nach dem Zeichen der Ladung; bei Nichtbeachtung obiger Vorschrift fällt daher die Gegenprobe merklich grösser aus. Auch entferne man nach Schluss der Messung den aktiven Draht sofort aus dem Apparate, um jede unnötige tertiäre Aktivierung zu vermeiden.

Nach Beendigung der Exposition schalte man die Elektrizitätsquelle von dem gespannten Drahte ab und winde ihn auf das oben erwähnte zylindrische Metallnetz. Alsdann führe man dieses mit möglichst geringem Zeitverlust in das Zerstreuungselektrometer ein. Bei starker Aktivität des Drahtes wird man die Beobachtungszeit, die man zweckmässig an einer mit Arretierung versehenen Taschenuhr bestimmt, im Vergleich zur Gegenprobe wesentlich kürzen müssen. Um die Messungen auf ein einheitliches Mass zu reduzieren (4), setze man die Radioaktivität der Luft $A = 1$, wenn ein Meter des aktivierten Drahtes das Potential des Zerstreuungskörpers in einer Stunde um ein Volt erniedrigen würde.

Das Verfahren der Messung und die Art der Berechnung zur Erzielung unter sich vergleichbarer Zahlen sind im einzelnen unter 4) des Literaturnachweises angegeben. Die so gefundenen Aktivierungszahlen A stellt man dann tabellarisch zusammen. Es ist notwendig, in diese Tabelle ausser den üblichen meteorologischen Elementen auch für jeden Tag einen Vermerk über die Transparenz der Luft, ihre elektrische Leitfähigkeit und, wenn es möglich ist, auch über den Stand des Grundwassers aufzunehmen. Da atmosphärische Niederschläge jeder Art einen Teil der radioaktiven Emanation aus der Luft zu entfernen scheinen und wohl auch, wenn sie während der Expositionszeit eintreten, die radioaktive Substanz von dem Drahte abwaschen, so wird man derartige anomale Verhältnisse unter der Rubrik „Bemerkungen“ kennzeichnen müssen.

Es erübrigt, noch ein Wort zu sagen über die Anzahl der Beobachtungen im Laufe eines Tages und die passendste Beobachtungszeit.

Vorläufig dürfte eine einmalige Bestimmung der Aktivierungszahl in der Zeit von 1—3 *p* ausreichend sein. Während der an die Akkumulatoren angeschlossene Draht zwei Stunden lang sich selbst überlassen bleibt, hat der Beobachter ausreichend Zeit, sowohl die elektrische Leitfähigkeit der Luft zu messen, als auch um 2 *p* die meteorologischen Instrumente abzulesen. Wo nur ein Zerstreuungselektrometer zur Verfügung steht, hat die Bestimmung des elektrischen Zerstreuungskoeffizienten der Ermittlung der Aktivierungszahl voranzugehen.

2. Beobachtungen auf Reisen (2).

Zur Verwendung auf Reisen haben wir ein leicht transportables Instrumentarium zur Bestimmung der Aktivierungszahl zusammengestellt, das aus folgenden Apparaten besteht: dem Zerstreuungselektrometer mit Zubehör, einer Hochspannungstrockensäule von 2000—2500 Volt Klemmenspannung, einem Hochspannungselektroskop Braunscher Form mit innerer Bernsteinisolation und Natriumtrocknung und einigen Drahthaltern aus Ebonit, ebenfalls mit Natriumtrocknung.

Die Einrichtung dieser Apparate ist von uns genau beschrieben; ihre Anwendung ergiebt sich nach dem unter 1 gesagten ohne Weiteres. Da die Hochspannungstrockensäule einen ziemlich hohen inneren Widerstand besitzt, so wird man für absolute Isolation aller in Frage kommenden Isolatoren Sorge tragen müssen. Man wird hier häufig in der Lage sein die Austrocknung der Drahthalter und des Innern des Hochspannungselektroskops durch metallisches Natrium zu bewirken. Da ferner die Polspannung der Säule mit sinkender Temperatur nicht unerheblich nachlässt, so ist sie an einem warmen trocknen Orte aufzubewahren und während der Exposition, wenn irgend tunlich, an einem sonnigen Platze aufzustellen.

Literatur.

1a) Über die Radioaktivität der im Erdboden enthaltenen Luft. Physikal. Zeitschr. 3. p. 574. 1902.

1b) Beschreibung des Verfahrens zur Gewinnung vorübergehend radioaktiver Stoffe aus der atmosphärischen Luft. Physikal. Zeitschr. 3. p. 305. 1902.

2) Über transportable Apparate zur Bestimmung der Radioaktivität der natürlichen Luft. Physikal. Zeitschr. 4. p. 138. 1902.

3) Protokoll der luftelektrischen Konferenz zu Göttingen. 1902.

4) Protokoll der luftelektrischen Konferenz zu München. 1903.

5) Recherches sur la Radioactivité induite par l'air atmosphérique. Archives des Sciences Physiques 13. p. 113. 1902.

J. Elster.

Bericht über die Tätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre.

Von **F. Exner.**

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

In Tätigkeit waren die Stationen in Triest, Kremsmünster, Innsbruck und Wien, welch letztere nun definitiv mit der K. K. Zentralanstalt für Meteorologie vereinigt ist. Dem verabredeten Plane gemäss wurden regelmässige Messungen der Zerstreuung, täglich um die Mittagsstunde, mit dem Elster-Geitelschen Apparate, sowie fortlaufende Messungen des Potentialgefälles mittels des Benndorfschen selbstregistrierenden Elektrometers ausgeführt. Diese Potentialmessungen sind noch nicht bearbeitet, so dass im folgenden auf Einzelheiten nicht weiter eingegangen werden kann; im Allgemeinen ergeben sie den für unsere Gegenden charakteristischen Verlauf der Kurven.

I. Station in Triest. Beobachter Herr Direktor E. Mazelle.

Derselbe teilt in Bezug auf die Zerstreuungsmessungen folgendes mit:

Aus den vorliegenden Beobachtungen eines ganzen Jahres (März 1902 bis Februar 1903), welche demnächst einer eingehenderen Untersuchung unterzogen werden, findet sich das im vorjährigen Berichte aus wenigen Beobachtungen bestimmte Vorherrschen einer grösseren negativen Zerstreuung bestätigt.

Von 365 Beobachtungstagen war an 253 die Zerstreuung negativer Elektrizität grösser, an 107 Tagen die der positiven,

während an 5 Tagen beide gleich gross waren. Werden diese 5 Fälle gleichmässig aufgeteilt, so finden wir bei 70% sämtlicher Fälle die negative Zerstreuung überwiegend, bei 30% hingegen die positive.

Untersuchen wir dieses Verhalten für die einzelnen Monate, so zeigt sich das Vorherrschen der negativen Zerstreuung nicht immer im gleichen Betrage, im Februar ist die Anzahl der Tage mit vorwiegender positiver Zerstreuung sogar grösser.

In der nachfolgenden Zusammenstellung sind die perzentualen Häufigkeiten zusammengestellt.

		Anzahl der Fälle mit vorwiegender		
		negativer	positiver	
		Zerstreuung		Quotient
1902,	März	81	19	4.2
	April	57	43	1.3
	Mai	87	13	6.7
	Juni	77	17	4.5
	Juli	81	16	5.1
	August	71	29	2.4
	September	77	23	3.3
	Oktober	68	32	2.1
	November	57	43	1.3
	Dezember	68	29	2.3
1903,	Januar	65	35	1.9
	Februar	43	54	0.8

Schon aus dieser einjährigen Beobachtungsreihe lässt sich eine jährliche Periode entnehmen. Die Zerstreuung negativer Elektrizität scheint in den Sommermonaten überwiegender zu sein.

Deutlicher tritt dieses Verhalten zum Vorschein, wenn die Daten nach Jahreszeiten geordnet werden.

Unter je 100 Tagen finden wir die negative Zerstreuung vorwiegender

	im	Winter	an 59	Tagen
	„	Frühling	„ 75	„
	„	Sommer	„ 76	„
und	„	Herbst	„ 67	„

Die Quotienten zwischen diesen Häufigkeitszahlen und denen für eine überwiegende positive Zerstreuung sind

Winter	Frühling	Sommer	Herbst
1.5	3.0	3.6	2.0

und ergeben demnach deutlich ein Maximum für den Sommer und ein Minimum für den Winter. Im Sommer kommt 3.6 mal häufiger eine grössere Zerstreuung negativer Elektrizität vor, im Winter hingegen nur 1.5 mal.

Bestimmen wir für die einzelnen Monate den mittleren Betrag der Zerstreuung in der Zeiteinheit — 15 Minuten — so finden wir

		Monatsmittel der Zerstreuung der Elektrizität ΔV in 15 Min.	
		Positive	Negative
1902,	März	9.78	10.85
	April	13.52	12.81
	Mai	11.06	12.71
	Juni	9.48	11.06
	Juli	9.43	10.98
	August	11.04	12.71
	September	13.39	14.98
	Oktober	11.41	11.97
	November	14.91	15.28
	Dezember	10.26	12.92
1903,	Januar	11.67	11.38
	Februar	8.99	8.69

im Januar, Februar und April eine grössere mittlere Zerstreuung der positiven Elektrizität, während in den anderen 9 Monaten die negative Zerstreuung grösser ist.

Im Jahresdurchschnitt resultiert die positive Zerstreuung mit 11.25 V, die negative hingegen mit 12.20 V in 15 Minuten. Der Quotient beträgt 1.08.

Für die einzelnen Jahreszeiten finden wir

	Positive Zerstreuung	Negative Zerstreuung	Quotient
im Winter	10.31	11.00	1.07
„ Frühling	11.45	12.12	1.06
„ Sommer	9.98	11.58	1.16
„ Herbst	13.24	14.08	1.06

Es würde sich daraus eine Zunahme der mittleren Werte der Zerstreuung bei beiden Ladungen für den Frühling und vermutlich für den Herbst entnehmen lassen.

Die negative Zerstreuung ist in allen vier Jahreszeiten im Vergleich zur positiven grösser, besonders aber im Sommer; Quotient 1.16.

Zu den bereits im vorjährigen Berichte angeführten Beispielen einer besonders starken Zerstreuung der atmosphärischen Elektrizität an Boratagen sollen noch nachfolgende Fälle hinzugefügt werden.

			△ *V* in 15 Min. +	△ *V* in 15 Min. —	Windgeschwindigkeit in Kil. p. Stunde
1902,	April	28.	38.1	36.1	80
	Mai	5.	27.8	33.2	47
	August	21.	28.6	36.1	46
	September	29.	54.5	52.9	94
	Oktober	28.	38.5	31.6	63
	„	29.	30.8	31.8	82
	„	31.	27.1	32.9	63
	November	1.	31.9	28.0	67
	„	17.	29.3	31.5	76
	„	18.	30.2	29.9	86
	„	19.	25.7	30.2	77
	Dezember	5.	33.3	74.1	114
	„	6.	32.3	38.9	85
1903,	Januar	14.	35.1	37.9	75
	„	15.	30.0	25.6	55
	Februar	3.	42.6	32.9	82
	„	16.	32.1	31.0	48

II. Station in Kremsmünster. Beobachter Herr Direktor P. Franz Schwab.

Die Potentialmessungen, welche eine mehr als ein Jahr umfassende tadellose Reihe bilden, werden demnächst gesondert bearbeitet werden; bezüglich der Zerstreuungsmessungen, die ebenfalls ein ausserordentlich reichhaltiges Material bilden, lässt sich schon jetzt das folgende sagen:

a) Es zeigt sich eine deutliche jährliche Periode mit dem Maximum im Sommer und dem Minimum im Winter, wie die

folgende Tabelle zeigt, in welcher n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Die a geben die Abnahme der Ladung in $^0/_0$ der konstant erhaltenen Ladung pro 1 Minute.

Jährlicher Verlauf.

	a_+	a_-	a	n
Januar	0.65	1.13	0.89	51
Februar	1.01	1.24	1.12	42
März	1.35	1.48	1.41	45
April	1.58	1.55	1.56	49
Mai	1.12	1.38	1.25	51
Juni	1.44	1.70	1.57	52
Juli	1.37	1.58	1.48	55
August	1.31	1.54	1.43	62
September	1.32	1.47	1.40	51
Oktober	1.19	1.47	1.33	55
November	1.14	1.58	1.36	54
Dezember	1.00	1.09	1.05	92

b) Eine doppelte tägliche Periode mit den Minimis um 7^h *a.* und 7^h *p.* und dem Maximum um 1^h *p.* Das zweite Maximum fällt in die Nachtstunden, während welcher nicht beobachtet werden konnte. Die folgende Tabelle zeigt den täglichen Verlauf von a. n bedeutet wieder die Anzahl der Beobachtungen.

Stunde	a	n	Stunde	a	n
4—5 *a.*	0.79	24	1—2 *p.*	1.14	100
5—6	0.68	52	2—3	1.03	74
6—7	0.65	77	3—4	0.94	68
7—8	0.76	82	4—5	0.81	76
8—9	0.82	61	5—6	0.77	74
9—10	0.92	64	6—7	0.63	69
10—11	0.97	89	7—8	0.63	59
11—12	1.13	130	8—9	0.69	54
12—1	1.17	117	9—10	0.89	26

Dieser aus 1197 Beobachtungen sich ergebende Verlauf gilt für die Wintermonate; für die Sommermonate ist bisher das Material noch nicht zusammengestellt.

Was den Zusammenhang der Zerstreuung mit den verschiedenen meteorologischen Faktoren anlangt, so ergaben sich aus dem ganzen vorhandenen Beobachtungsmateriale die folgenden Beziehungen.

c) Ein Zusammenhang mit über dem Beobachtungsorte lagernden Barometermaximis oder -minimis besteht nicht; für a wurde in 170 Fällen bei Maximis der Wert 1.22 und in 27 Fällen bei Minimis der Wert 1.23 gefunden.

d) Sehr deutlich war die Abhängigkeit der a von der Windstärke, wobei im Allgemeinen die Werte bei Ostwinden höher waren als bei Westwinden.

Windstärke km/S	a	n
0 – 5	0.92	128
5 – 10	1.24	127
10 – 15	1.34	86
15 20	1.37	81
20 – 25	1.75	66
25 – 30	1.53	34
> 30	1.82	48

e) Die Durchsichtigkeit der Luft beeinflusst die Zerstreuung sehr beträchtlich, wie die folgenden Zahlen zeigen; D_4 bedeutet dabei ganz reine, D_1 sehr trübe Luft.

Durchsichtigkeit	a	n
D_4	1.38	171
D_3	1.35	273
D_2	1.12	266
D_1	0.43	12

f) Auch relative und absolute Feuchtigkeit stehen mit der Zerstreuung in auffallendem Zusammenhang:

Relative Feuchtigkeit	*a*	*n*	Absolute Feuchtigkeit	*a*	*n*
30—50%	1.60	50	0—2%	0.97	26
50—60	1.53	101	2—4	1.15	90
60—70	1.23	182	4—6	1.18	159
70—80	1.18	185	6—8	1.40	120
80—90	1.19	115	8—10	1.24	97
90—100	1.00	79	10—12	1.50	58
			12—14	1.46	51
			14—16	1.50	28
			16—18	1.60	24
			18—22	1.59	6

g) Endlich sei darauf hingewiesen, dass die Strahlung der Sonne einen entschiedenen Einfluss auf die Grösse der Zerstreuung auszuüben scheint, wie aus der folgenden Zusammenstellung erhellt:

	a	*n*
Kein Sonnenschein	1.15	204
Teilweise „	1.32	192
Voller „	1.45	263

Dabei ist nicht nur die Temperatur von Einfluss, sondern, wie aus nachfolgender Tabelle folgt, auch die Grösse der Photochemischen Strahlung; letztere wurde nach der Methode Wiesners gemessen, während unter „Thermischer Strahlung“ die Temperaturdifferenz zwischen bestrahlten und unbestrahlten Thermometer angegeben ist.

Temperatur	*a*	*n*	Thermische Strahlung	*a*	*n*	Photochemische Strahlung	*a*	*n*
—15° bis —5°	0.86	68	0—10°	1.16	178	0.0—0.1	1.04	130
— 5°— 0°	0.96	69	10—20°	1.24	138	0.1—0.2	1.18	162
0 — 5°	1.18	120	20—25°	1.37	150	0.2—0.4	1.43	164
5 —10°	1.22	122	25 —34°	1.47	193	0.4—0.6	1.43	79
10 —15°	1.48	96				0.6—1.0	1.51	90
15 —20°	1.35	125				1.0—1.6	1.60	34
20 —25°	1.42	68						
25 —30°	1.66	54						

Schliesslich sei noch bemerkt, dass an Gewittertagen sich die Zerstreuung durchaus so verhielt wie an gewöhnlichen.

III. Station in Innsbruck. Beobachter Herr Prof. P. Czermak.

An dieser Station wurden nur Messungen der Zerstreuung ausgeführt; dieselben ergaben die gleiche jährliche Periode wie z. B. in Kremsmünster, dagegen einen ganz anderen Verlauf des täglichen Ganges, indem in Innsbruck die tägliche Periode zu Mittag ein Minimum und in den Nachmittagstunden ein Maximum hat. Auffallend hohe Werte zeigten sich an Tagen mit Föhnwind und die höchsten bei starker Kumulusbildung. In der nebenstehenden Tabelle sind die hauptsächlichsten Daten wiedergegeben.

IV. Ausser diesen regelmässigen Stationsbeobachtungen wurden noch im Laufe der Jahre von verschiedenen Beobachtern eine Reihe spezieller Untersuchungen angestellt; so wurde z. B. auf der Spitze des hohen Sonnblick in den Tauern (3100 m) während der Sommermonate eine temporäre luftelektrische Station eingerichtet, an welcher Messungen des Potentialgefälles mit einem Registrier-Elektrometer und Zerstreuungsmessungen ausgeführt wurden. Die letzteren sind leider noch nicht bearbeitet. Die Potentialmessungen, welche durch eine längere Periode heiterer Tage begünstigt waren, haben das bemerkens-

Jahresmittel vom 1. April 1902 bis 1. April 1903.

	Mittagsbeobachtung			Nachmittagsbeobachtung				
	a_-	a_+	$q = \frac{a_-}{a_+}$	a'_-	a'_+	$q = \frac{a'_-}{a'_+}$	$r_- = \frac{a'_-}{a_-}$	$r_+ = \frac{a'_+}{a_+}$
Gesamtmittel aller Beobachtungstage	2.53	2.75	0.95	3.99	4.14	0.98	1.70	1.60
Gesamtmittel aller Föhntage	3.11	3.51	0.93	5.29	5.28	1.01	1.94	1.72
Mittel aller Tage mit Kumulus- und Gewitterbildung	3.52	3.51	1.04	6.00	6.40	0.97	1.96	2.15
Mittel aller Tage ohne Föhn- und ohne Kummulusbildung	2.32	2.54	0.93	3.35	3.55	0.96	1.52	1.42
Absolutes Maximum . .	5.36 F	6.01 ↯		9.82 F	10.40 ku-B.			
Absolutes Minimum . .	0.32	0.37		0.49 ▬	0.37 ✱			

Abkürzungen: F = Föhn, ↯ = Gewitter, ▬ = Nebel, ✱ = Schnee, ku-B. = Kummulusbildung.

werte Resultat ergeben, dass selbst in dieser Höhe noch eine deutliche doppelte tägliche Periode vorhanden ist, bei welcher die Amplitude der 12-stündigen Welle immer noch etwa $^1/_3$ von der der 24-stündigen ist. Nach den bisherigen Messungen an hochgelegenen Punkten, z. B. auf der Spitze des Eiffelturmes, hätte man das kaum erwarten können. Die Maxima treten dabei um $10^h\,30\,a$ und $10^h\,30\,p$, die Minima um $4^h\,30\,a$ und $4^h\,30\,p$ auf.

In Mattsee, im Salzburgischen, in flachem Terrain, hat Herr Dr. Schweidler in der Zeit vom 7. Juli bis 16. September d. Js. Zerstreuungsmessungen an 70 Tagen zu den Terminen $8^h\,a$, $1^h\,p$, $3^h\,p$ und $8^h\,p$ vorgenommen, und dabei gleichfalls eine tägliche Periode mit dem Maximum um 3^h und den Minimis um $8^h\,a$ und $8^h\,p$, sowie ein allgemeines Ansteigen der Zerstreuung mit dem Dampfdrucke nachweisen können. Das Verhältnis der $\pm\,a$, also die Grösse q, steigt dabei an wolkenlosen Tagen fast linear von früh bis gegen Abend an. Die Messungen wurden alle ohne Schutzzylinder — im Gegensatz zu jenen von Triest, Kremsmünster und Innsbruck — aber in einem geschützten Raume ausgeführt.

Endlich sei noch erwähnt, dass während der Sommermonate Herr Dr. Mache zur Konstatierung des Ueberschusses an + oder — Ionen in der Luft die folgende Anordnung verwendete. In der Mitte eines würfelförmigen 12 m^3 haltenden Drahtgehäuses wurde eine Radiumelektrode aufgehängt und nach aussen mit einem Elektrometer verbunden. Während bei heiterem Wetter solcherweise nur schwankende Potentiale von etwa $\pm$ 1 Volt erhalten wurden, zeigten sich beim Heran- oder Abziehen von Gewittern Potentiale bis zu $\pm$ 30 Volt und mehr. In einem speziellen Falle berechnete sich so die während einer Beobachtungsreihe im m^3 enthaltene freie Ladung zu — 0.8 bis + 0.6 E. S. E. und dementsprechend schwankte die Zahl der im cm^3 im Überschuss enthaltenen Ionen zwischen 0 und 1700. Es stimmt dieses Verhalten mit der schon von Pochettino konstatierten starken Polarität der Zerstreuung bei Gewittern.

Drei von Herrn Wilhelm v. Bezold übersandte Berichte über die von Beamten des K. Preussischen meteorologischen Instituts in den Jahren 1902 und 1903 ausgeführten luftelektrischen Arbeiten.

(*Eingelaufen 18. Juni.*)

1. Bericht über die luftelektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam.

Erstattet von Professor Dr. **Sprung.**

Das Programm der luftelektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam erfuhr innerhalb des letzten Jahres insofern eine Erweiterung, als neben den regelmässigen Messungen des Potentialgefälles und den zahlreichen Bestimmungen der luftelektrischen Zerstreuung noch eine Reihe anderer Aufgaben in Angriff genommen wurden, deren Durchführung dem ständigen Mitarbeiter Dr. Lüdeling oblag.

Im Anschluss daran wurden von demselben, sowie von den Assistenten Dr. Marten und Dr. Linke — der jetzt in Göttingen tätig ist — auch mehrfach luftelektrische Beobachtungen bei Ballonfahrten angestellt.

Ausserdem führte Dr. Lüdeling während eines mehrwöchentlichen Aufenthaltes in Misdroy luftelektrische Untersuchungen in Verbindung mit Beobachtungen des Staubgehaltes der Atmosphäre nach den Angaben eines Aitkenschen Staubzählers aus,

Indem ich bezüglich der näheren Einzelheiten der Versuche und der gefundenen Ergebnisse auf den nachfolgenden ausführlichen Bericht des Herrn Dr. Lüdeling verweise, kann ich mich auf einige kurze Bemerkungen beschränken. Besondere Sorgfalt wurde der Reduktion der Angaben des Wasserkollektors im Turm auf ein ebenes Feld im Sinne Exners gewidmet. Durch die besondere Lage des Observatoriums auf einer Anhöhe wird die Schwierigkeit dieser Bestimmung beträchtlich gesteigert, da die meteorologischen Zustände unten und oben zuweilen merklich verschieden sind.

Zur Messung der Elektrizitätszerstreuung bezw. des Ionengehaltes besitzt das Observatorium jetzt neben vier Zerstreuungsapparaten von Elster und Geitel auch ein Aspirationsinstrument nach Ebert, welches zunächst ohne genauere Kenntnis der Konstanten in Gebrauch genommen wurde. Im Hinblick darauf, dass dieser Apparat auch bei Ballonfahrten Verwendung finden soll, wird beabsichtigt, die Konstante nicht nur unter normalen Verhältnissen im Anschluss an die bekannt gegebene Vorschrift, sondern auch unter Zuhilfenahme einer pneumatischen Kammer unter stark erniedrigtem Luftdruck festzustellen.

In der Anleitung des Herrn Ebert[1]) wird die Frage, wie sich die Förderung in der verdünnten Luft der Höhen zu derjenigen am Grunde der Atmosphäre verhalten mag, nicht aufgeworfen.

Mir würde es etwas gewagt erscheinen, wenn hiermit etwa von vornherein die Annahme einer gleichen Förderungs-Menge oder -Masse ausgesprochen sein sollte.

Andererseits ist es natürlich so gut wie selbstverständlich, dass die Förderungen nicht etwa auf gleiche Volumina hinauslaufen werden; in dünner Luft wird unbedingt die Förderung eine grössere sein, als diesem Gesetze entspräche.

Versuche darüber scheinen nun in der Tat sehr wenige vorzuliegen.

---

[1]) Illustrierte Aëronautische Mitteilungen 1903, S. 15.

In der Meteorologischen Zeitschrift 1898, Seite 303—306, findet sich darüber mehr beiläufig eine kurze Erörterung von Hergesell. Nach eigenen vorläufigen Versuchen und nach wenigen Angaben von Herrn Assmann würden folgende Druckwerte und Ventilationsgeschwindigkeiten einander entsprechen:

747 mm	400 mm	225 mm
2,8 m. p. s.	6,2 m. p. s.	10,3 m. p. s.

Da die Temperaturen hierbei natürlich stillschweigend als gleich angenommen werden, so müssen die Produkte der zusammengehörigen Zahlen, abgesehen von einem konstanten Faktor, die Förderungsmengen darstellen; man findet dabei beziehungsweise:

2092 2480 2318

Hiernach würden die vom Aspirator geförderten Mengen in verdünnter Luft sogar erheblich grösser sein als in dichter Luft, ein Ergebnis, das wenig wahrscheinlich ist.

Aber die erwähnten Angaben nach Herrn Assmann bestehen darin, dass bei der Tourenzahl 22 die Ventilationsgeschwindigkeit 2,4 m. p. s., bei der Tourenzahl 30 aber 5,2 m. p. s. beträgt. Das ist für weittragende Schlussfolgerungen offenbar kein ausreichendes Beobachtungsmaterial.

Für die Bedürfnisse des Herrn Assmann erwies sich dasselbe als ausreichend, weil es bei seinem Aspirations-Psychrometer nur darauf ankommt, dass ein gewisser Grenzwert der Ventilationsgeschwindigkeit überschritten werde, während beim Ebertschen Apparate von der Förderungsmenge Alles abhängt.

---

2. Bericht über luftelektrische Arbeiten.

Von Dr. Lüdeling, ständiger Mitarbeiter am Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam.

I. In Potsdam.

1. Messungen des Potentialgefälles.

Die regelmässigen Beobachtungen an den meteorologischen Terminen um 7^a, 2^p, 9^p wurden fortgesetzt. Verschärfte Beobachtungen fanden an den Termintagen der Südpolar-Expedition und der Birkeland-Expedition statt, ausserdem aber auch an solchen Tagen, an denen Ballonfahrten zum Zweck luftelektrischer Messungen unternommen wurden, und endlich noch im Anschluss an die regelmässigen Zerstreuungsmessungen.

Die Versuche, den Reduktionsfaktor der Beobachtungen am Turm des Observatoriums auf freies Feld zu bestimmen, wurden mehrfach wiederholt und ergaben einen nicht viel von 1,0 verschiedenen Wert, d. h. die Werte am Turm entsprechen ziemlich denjenigen auf ebenem Gelände. Die Bestimmungen sollen jedoch auch künftig noch häufiger angestellt werden.

Des Weiteren ist eine genaue Untersuchung einer bei jenen Bestimmungen aufgefallenen Erscheinung ins Auge gefasst, die auf einen Transport elektrischer Massen mit dem Winde hindeuten. Bei der graphischen Darstellung der gleichzeitigen Beobachtungen am Observatorium und an den beiden, auf freiem Felde gelegenen Stationen, zeigten sich nämlich mehrfach Partien von auffallender Ähnlichkeit in den Kurven. Diese korrespondierenden Stellen traten jedoch an den drei Stationen nicht zu gleicher Zeit ein, sondern die Eintrittszeiten verschoben sich je nach der Windrichtung und -Stärke,

sie waren also verschieden um diejenige Zeit, die der Wind gebrauchte, um von einer Station zur anderen zu gelangen. Genauere Beobachtungen über diese Erscheinung sollen nun auf möglichst weitem, freiem Felde angestellt werden, an zwei Stationen, die einmal in der Windrichtung um eine bestimmte Strecke von einander entfernt, dann aber auch beide in gleicher Weise senkrecht zum Winde liegen.

Über Versuche, ein Marckwald'sches Polonium-Stäbchen von 9 cm Länge und 4 mm Dicke als Kollektor zu gebrauchen, wird an anderer Stelle Näheres mitgeteilt (s. Reisebeobachtungen, II 1^b).

In allerneuester Zeit wurden auch noch die von Herrn Ebert empfohlenen sogenannten Aktino-Elektroden ausprobiert, und zwar in Gestalt von gut abgeschmirgelten, frisch amalgamierten quadratischen Zinkplatten von ca. 16 cm Seitenlänge. Dieselben zeigten auch fast momentane Ausschläge, selbst bei bedecktem Himmel.

Vergleichende Messungen mit Flammen- oder Wasser-Kollektoren haben jedoch noch nicht zur Genüge stattgefunden, so dass ein Urteil über das exakte Funktionieren noch nicht abgegeben werden kann. Sie sollen jedoch baldigst erfolgen, da beabsichtigt wird, derartige Zink-Kollektoren bei den luftelektrischen Messungen im Ballon zu gebrauchen.

Von weiteren, in nächster Zeit in Angriff zu nehmenden Untersuchungen mögen noch erwähnt werden:

die Bestimmung des täglichen Ganges an klaren Tagen (zusammen mit demjenigen der Zerstreuung),

die Einrichtung einer Registrierung des Potentialgefälles, sobald das in Aussicht genommene Benndorf'sche Quadranten-Elektrometer eingetroffen ist, und

Messungen im Fesselballon zur genaueren Erforschung der Verhältnisse in den unteren 5—600 Metern.

2. Messungen der Zerstreuung.

Dieselben erfolgten mit Apparaten nach Elster und Geitel möglichst regelmässig zwischen 10^a und 1^p vor einem Nordfenster des Beobachtungsraumes im Turm.

Zu gleicher Zeit wurden auch Messungen des Potentialgefälles angestellt und seit März ds. Js. noch solche des Staubgehaltes der Luft. Verschärfte Beobachtungen fanden wie bei den regelmässigen Potentialgefälle-Messungen an den verschiedenen Termintagen und bei einigen luftelektrischen Ballonfahrten statt. Als Jahresmittel ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} a_+ &= 0.97\,\% \\ a_- &= 1.29\ \text{"} \end{aligned}\right\},\ \text{demnach } q = 1.36,$$

also eine ausgesprochen polar verschiedene Zerstreuung, wie auch bei der Lage des Beobachtungsortes von vornherein zu erwarten war. In den Monatsmitteln treten die grossen Werte von April und Mai deutlich hervor, die offenbar mit den um diese Zeit häufigen Böen zusammenhängen. Die grösste Zerstreuung fand sich am 23. April 1902 mit

$$\begin{aligned} a_+ &= 2.46\,\% \\ a_- &= 4.45\ \text{"}\ , \end{aligned}$$

an einem sehr klaren Tage mit frischem Ostwinde, die kleinste dagegen am 26. Februar 1902 mit

$$\begin{aligned} a_+ &= 0.18\,\% \\ a_- &= 0.44\ \text{"}\ , \end{aligned}$$

bei stark dunstigem Wetter und schwachem nordwestlichen Winde.

Neben diesen regelmässigen Zerstreuungsmessungen fanden noch zum Teil recht umfangreiche und eingehende Vergleichsbeobachtungen der drei im Observatorium vorhandenen Zerstreuungsapparate gleicher Art statt, ferner Untersuchungen über Schutzzylinder aus Drahtnetz von verschiedener Maschenweite, über den Einfluss der Windstärke, der Bestrahlung des Elektroskops, eines geerdeten oder isolierten Schutzdaches u. s. w. Hierüber wird ausführlich in der Publikation des meteorologischen Observatoriums berichtet werden.

(Über eine am 29. Juli 1902 eingetretene Infektion der Zerstreuungsapparate und des Beobachtungsraumes durch ein Polonium-Stäbchen S. II, 1 b).

Seit Mitte März ds. Js. sind auch Messungen mit dem Ebert'schen Aspirationsapparat im Gange, und zwar tunlichst gleichzeitig mit einem Zerstreuungsapparat nach Elster und Geitel. Eine Bestimmung der Konstanten des Apparates hat sich noch nicht vornehmen lassen, doch wird sie erfolgen, sobald einige hierfür bestellte Hilfsmittel angelangt sind. Es soll dann auch die Fördermenge des Aspirators in verdünnter Luft besonders festgestellt werden, durch Messungen in einer pneumatischen Kammer. Eine derartige Sonderbestimmung erscheint im Hinblick auf die Verwendung des Apparates in grossen Höhen sehr wünschenswert. Legt man zur vorläufigen Berechnung der von Herrn Ebert bei Beschreibung seines Aspirationsapparates angegebenen Reduktionsfaktor $f = {}^1/_{30}$ zu Grunde, so würde man aus den im Observatorium zu Potsdam angestellten, annähernd 50 Messungen im Mittel eine Elektrizitätsmenge von rund $^1/_4$ elektrostat. Einheiten pro 1 cbm Luft gefunden haben, also beträchtlich weniger, als Herr Ebert in München. Ausserdem zeigte sich, dass das Verhältnis der freien positiven Elektrizität zur freien negativen Elektrizität fast genau = 1 ist. Ein Überwiegen der freien positiven Elektrizität, wie wohl eigentlich nach den Zerstreuungsmessungen mit den Elster- und Geitel'schen Apparaten zu erwarten war und wie auch Herr Ebert fand, ist jedenfalls bislang nicht zu konstatieren gewesen. Da in nächster Zeit noch ein zweiter Aspirationsapparat wird in Anwendung kommen können, so ist damit Gelegenheit zu weiteren, genaueren Untersuchungen geboten. Einstweilen sind die Beobachtungen noch zu wenig zahlreich und auch zu wenig durchgearbeitet, besonders mit Rücksicht auf die begleitenden meteorologischen Verhältnisse, als dass man schon weitere Schlüsse ziehen dürfte. —

Sobald es die Umstände erlauben, sollen auch Bestimmungen des täglichen Ganges der Zerstreuung versucht werden und zwar mit beiden Apparaten, sowohl dem nach Elster und Geitel, wie auch dem Ebert'schen Aspirations-Apparat. Ausserdem sind für den Sommer einige Beobachtungsreihen in Wäldern, auf den Havelseen und den sumpfigen Wiesen in der Nähe Potsdams sowie endlich im Fesselballon geplant.

II. Reisebeobachtungen.

An der Ostseeküste bei Misdroy, in der Zeit vom 21. August bis 15. September 1902.

a) Messungen des Potentialgefälles.

Zum Messen des Potentialgefälles dienten die transportablen Exner'schen Apparate. Als Kollektoren wurden sowohl Exner'sche Lampen wie auch ein Marckwald'sches Polonium-Stäbchen gebraucht, welch letzteres bei mehrfachen, im Freien angestellten Voruntersuchungen in Potsdam eine ausserordentlich rasche und dabei genaue Wirkung als Elektrode zeigte. Dieselbe gute Übereinstimmung zwischen Flammen-Kollektor und Polonium-Stäbchen fand sich auch in Misdroy. Freilich schien die Wirkung des Poloniums schon in den ersten drei bis vier Wochen nach Empfang desselben insofern etwas nachzulassen, als die Ladung nicht mehr so rasch wie anfänglich erfolgte. Spätere, in Potsdam wiederholte Versuche ergaben in der Tat auch einen weiteren Rückgang in der Schnelligkeit der Ladung. Denn während bei dem ganz neuen Stäbchen die Ladezeit nur etwa $^1/_2$ Minute betrug, nach einem Monat $^3/_4$ Minuten, erreichte sie nach sechs Monaten schon den Betrag von reichlich einer Minute.

Bezüglich der absoluten Werte des Potentialgefälles am Strande von Misdroy ist zu bemerken, dass dieselben nach den Beobachtungen an den beiden einzigen klaren Tagen, an denen gemessen werden konnte, im Mittel ca. 150 Volt/Meter betrugen, also nicht viel mehr als im Binnenlande.

Die tägliche Periode mit einiger Sicherheit festzustellen, gelang leider nicht, da das Wetter zu ungünstig hierfür war. Das Einzige, das sich nach dieser Richtung hin aus den Werten vielleicht entnehmen lässt, ist eine Zunahme des Potentialgefälles in den ersten Nachmittagstunden und gegen 6 bis 7 Uhr Nachmittags.

An dem einen der beiden Tage wurde auch auf das eventuelle Eintreten des Exner'schen Springmaximums beim Sonnenuntergang geachtet. Es zeigten sich nun auch in der Tat bei den Beobachtungen von Minute zu Minute um Sonnen-Untergang erhöhte Werte, doch in so verhältnismässig geringem Masse, etwa 50—60 Volt/Meter, dass von einem eigentlichen Springmaximum kaum die Rede sein kann. Gleich danach trat eine konstante, ziemlich rasche Abnahme ein.

b) Messungen der Zerstreuung.

Die Messungen wurden mit einem Zerstreuungsapparat nach Elster und Geitel ausgeführt, bei dem eine auf dem Stiele des Zerstreuungskörpers verschiebbare, über den Hals des Elektroskops greifende Kappe aus Messingblech als eine Art Windschutz diente und das in frischem Winde oft sehr störende Schwanken der Elektroskopblättchen erheblich verminderte. Ausserdem wurde das Elektroskop durch eine besondere Vorrichtung stets sorgsam gegen Sonnenstrahlung geschützt. Der Apparat war mehrere Monate lang mit zwei anderen Zerstreuungsapparaten verglichen worden und es hatte sich eine genügende Übereinstimmung gezeigt. Nun wurde kurz vor der Abreise, am 29. Juli, ein Marckwald'sches Poloniumstäbchen auf kurze Zeit in denjenigen Raum des Meteorologischen Observatoriums gebracht, in welchem auch die Zerstreuungsapparate aufbewahrt werden. Wenn die Zeit, während welcher das Stäbchen frei wirken konnte, auch nur einige Minuten betrug, so hatte sie doch genügt, sowohl die beiden im Raume befindlichen Zerstreuungsapparate selbst, wie wahrscheinlich auch das ganze Zimmer in hohem Masse zu infizieren. Die nachstehend mitgeteilten Werte der regelmässigen Zerstreuungsmessungen vor und nach dem 29. Juli lassen darüber wohl keinen Zweifel bestehen.

1902, Juli	18.	$a = 0.66\,\%$	Juli	30.	$a = 5.31\,\%$
„	19.	1.46	August	1.	3.40
„	21.	0.55	„	4.	3.32
„	22.	1.13	„	4.	3.32
„	14.	0.94	„	5.	3.15
„	25.	0.63	„	6.	2.48
„	26.	0.95	„	7.	2.86
„	28.	1.57	„	8.	2.90
			„	9.	3.26
			„	11.	3.70

Nachdem diese grosse Störung am 30. Juli bemerkt war, wurde sofort versucht, dieselbe durch gründlichste, oft wiederholte Säuberung der Apparate und beständiges Lüften des infizierten Raumes zu beseitigen. Allein es blieb noch eine sehr beträchtliche Störung zurück, die auch erst nach Monaten verschwand. Man sieht daraus, wie ausserordentlich vorsichtig man auch mit den Poloniumpräparaten sein muss.

Bei gleichzeitigen Messungen des Potentialgefälles und der Zerstreuung sind daher radioaktive Elektroden nicht anzuwenden. Wenn die Fernwirkung eines Radium- oder Poloniumkollektors i. A. auch ausserordentlich rasch abnimmt und schon in verhältnismässig geringer Entfernung kaum noch nachweisbar ist, so kann sie unter Umständen doch dadurch erheblich zunehmen, dass die von der radioaktiven Substanz ausgehenden Teilchen einer gasförmigen Emanation, materielle Teilchen, die selbst stark radioaktiv sind, durch Luftströmung oder Windbewegung von der Substanz fort und an die Zerstreuungsapparate getragen werden. Sie würden dann also nicht nur die zwischenliegende Luft ionisieren, sondern auch auf den Zerstreuungsapparaten Radioaktivität induzieren. Wo daher gleichzeitige Messungen des Potentialgefälles und der Zerstreuung angestellt werden sollen, kann nicht dringend genug von der Anwendung radioaktiver Präparate abgeraten, mindestens die allergrösste Vorsicht empfohlen werden. Aus denselben Gründen muss leider darauf hingewiesen werden, dass auch bei Ballonbeobachtungen die an sich äusserst bequemen und daher gerade hierfür sehr praktischen Radium- oder Poloniumkollektoren aufs

Strengste zu vermeiden sind, sofern man nicht beabsichtigt, den Ballon ein für alle Male ausschliesslich zu Messungen des Potentialgefälles und nicht auch zu solchen der Zerstreuung zu gebrauchen!

Es lässt sich nun nicht leugnen, dass die mit dem stark infizierten Zerstreuungsapparate in Misdroy erhaltenen Werte nicht ganz einwandsfreie sind. Allein es dürfte gelungen sein, einen ziemlich richtigen Reduktionsfaktor zu bestimmen, mit welchem die in Nachfolgendem mitgeteilten Werte denn auch alle bereits reduziert sind.

Bei den Messungen, die ohne Ausnahme mit dem von Elster und Geitel empfohlenen Schutzdach vorgenommen wurden, trug man stets Sorge dafür, dass die Ableitung zur Erde eine gute war. Es geschah dies deshalb, weil von Herrn Ebert darauf hingewiesen war, dass nach den Untersuchungen von Herrn Ruf eine völlige Umkehrung der Zerstreuungswerte für positive und negative Ladung eintritt, je nachdem der Apparat geerdet ist oder nicht. Freilich hatte eine Reihe von eigens zu diesem Zweck in Potsdam ausgeführten Messungen mit mehreren Apparaten eine Bestätigung dieser Behauptung nicht ergeben, vielmehr zeigte sich bei geerdetem und isoliertem Gestell kein Unterschied. Immerhin wurde der Vorsicht wegen stets auf gute Erdung geachtet.

Die Messungen fanden meist am Strande statt, jedoch auch in den nahen Wäldern und auf einigen, zum Teil ca. 6 km landeinwärts gelegenen Binnenseen. Versuche, mit dem Zerstreuungsapparat auch auf offener See im Boote Messungen anzustellen, misslangen vollständig, da die Aluminiumblättchen stets in solchem Masse schwankten, dass an eine Ablesung gar nicht zu denken war. Um nun aber wenigstens einige Zerstreuungswerte in möglichst reiner Seeluft zu erhalten, wurde noch eine längere Reihe von Messungen auf der äussersten, ungefähr $1^1/_2$ km in die See hinausführenden Spitze der Ostmole bei Swinemünde angestellt, und zwar an einem Tage, an dem fast direkter Seewind herrschte.

Gleichzeitige Messungen von Zerstreuung und Potentialgefälle wurden vermieden, hauptsächlich deshalb, um die für letztere erforderlichen Instrumente, die alle dem Poloniumstäbchen mehr oder weniger nahe gekommen waren, nicht mit dem Zerstreuungsapparat zusammenzubringen.

Von den Resultaten, die an anderer Stelle (Meteorologische Zeitschrift) demnächst ausführlicher mitgeteilt werden sollen, mögen hier ganz kurz folgende erwähnt werden:

1. Aus im Ganzen 136 Zerstreuungsmessungen ergibt sich im Mittel ein Wert von

$$\left.\begin{array}{l} a_+ = 0.84\,^0/_0 \\ a_- = 1.33 \;\;\text{„} \end{array}\right\} \text{demnach } q = 1.58,$$

also starkes Überwiegen der positiven Elektronen.

2. Das Maximum der Zerstreuung fand sich am 21. August 1902 zu

$$\left.\begin{array}{l} a_+ = 1.23\,^0/_0 \\ a_- = 2.32 \;\;\text{„} \end{array}\right\} q = 1.88,$$

bei antizyklonaler Wetterlage, lebhaftem Nordwest, also Seewind, mässiger Feuchtigkeit, hellem Sonnenschein und klarer, fernsichtiger Luft;

das Minimum am 1. September zu

$$\left.\begin{array}{l} a_+ = 0.59\,^0/_0 \\ a_- = 0.84 \;\;\text{„} \end{array}\right\} q = 1.42,$$

bei zyklonaler Wetterlage, schwachem nördlichen Winde, meist bedecktem Himmel, hoher Feuchtigkeit und stark verschleierter Fernsicht.

3. Die tägliche Periode an klaren Tagen zu bestimmen, gestatteten die ungünstigen Witterungsverhältnisse nicht. Immerhin ist soviel aus dem Beobachtungsmaterial zu entnehmen, dass unter sonst gleichen Bedingungen die Zerstreuung am Nachmittage grösser ist als am Vormittage und dass auch q dasselbe Verhalten zeigt.

4. Die grössten Werte treten im Allgemeinen bei antizyklonaler, die kleinsten bei zyklonaler Wetterlage ein.

5. Bei hohem Feuchtigkeitsgehalt der Luft zeigen sich sehr kleine Werte der Zerstreuung.

6. Bei zunehmender Windstärke nehmen die Zerstreuungswerte unter sonst gleichen Verhältnissen zu.

7. Die auf der Ostmole in Swinemünde, also über möglichst freiem Wasser erhaltenen Werte unterscheiden sich nicht von denjenigen am Strande in Misdroy.

8. Die etwa 6 km landeinwärts in und auf Binnenseen gemessenen Zerstreuungen sind ebenfalls von fast derselben Grössenordnung wie an der Küste.

9. In Wäldern wurde die Zerstreuung für beide Vorzeichen nahezu gleich gross gefunden, jedenfalls war die polare Verschiedenheit bei weitem nicht so gross, wie am Strande. Die absoluten Beträge dagegen zeigten sich nicht wesentlich verschieden von denen am Wasser.

10. Für die von Herrn Ebert mitgeteilte Anomalie, dass sich an den Ufern still stehender sumpfiger Seen besonders grosse Zerstreuungen der negativen Ladung finden sollen, konnte keine Bestätigung erhalten werden.

III. Ballonbeobachtungen.

Es wurden bei zwei Fahrten, am 2. April und 7. Mai, luftelektrische Messungen im Ballon angestellt, und zwar mit dem Ebert'schen Aspirationsapparat. Zum Studium der normalen luftelektrischen Verhältnisse war das Wetter beide Male nicht günstig, da bei zyklonaler Wetterlage gefahren wurde und mehrere Wolkenschichten passiert werden mussten. Es zeigte sich jedoch im Wesentlichen bestätigt, worauf schon Herr Ebert hinwies: Die sprungweise Änderung im Elektronengehalt bei jedesmaligem Eintritt des Ballons in eine neue Luftschicht, mit anderem Mischungsverhältnis. Freilich blieben die absoluten Werte beträchtlich hinter den von Herrn Ebert mitgeteilten zurück. Unter der Voraussetzung, dass die bereits erwähnte Konstante des Aspirationsapparates $f = \frac{1}{80}$ nahezu richtig ist, wurde bei der ersten Fahrt als Maximalwert eine

Elektrizitätsmenge von reichlich einer elektrostat. Einheit pro 1 cbm gefunden, und zwar um 1^p, in einer Höhe von 3300 m, über allen Wolken. Gegen 5^p fand man in ca. 5000 m Höhe, ebenfalls über allen Wolken, nur noch $^1/_2$ elektrostat. Einheit. Dabei ist zu bemerken, dass sich durchweg etwas grössere Werte für negative Ladungen des Zerstreuungskörpers ergaben. Es möge noch hinzugefügt werden, dass die ebenfalls vorgenommenen Staubmessungen bei beiden Fahrten in grossen Höhen nur ganz verschwindend kleine Werte zeigten.

Bei der nächsten Fahrt sollen auch die Ebert'schen Zinkelektroden zur Anwendung kommen.

---

3. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere.

Von Dr. **W. Meinardus** in Berlin.

Die Teilnahme an einer Terminfahrt des deutschen Reichsdampfers „Poseidon", der seit 1902 im Dienste der internationalen Erforschung der nordeuropäischen Meere vierteljährlich bestimmte Punkte der Nord- und Ostsee aufsucht, gab mir Gelegenheit, nach dem von Elster und Geitel vorgeschlagenen Verfahren[1]) Messungen über Elektrizitätszerstreuung im südlichen Teil der Ostsee auszuführen.

Der von mir benutzte Apparat, dessen Einrichtung aus der von Elster und Geitel a. a. O. gegebenen Beschreibung ersehen werden kann, stammt von der Firma Günther und Tegetmeyer in Braunschweig und ist Eigentum des K. Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Die Bestimmung der Konstanten und die Aichung des Apparates wurde vor der Reise von Herrn Dr. Lüdeling in Potsdam vorgenommen. Derselbe hatte auch die Güte, eine für Luftballonfahrten konstruierte kardanische Aufhängung, die in bekannter Weise die Schwankungen der Unterlage des Apparats möglichst auszugleichen bestimmt ist, für meine Zwecke ausbessern und ergänzen zu lassen.

Der Dampfer machte auf seiner Fahrt von Kiel nach Memel mehrere Umwege, um die für die Meeresuntersuchungen festgelegten Stationen in der vorgeschriebenen Reihenfolge zu absolvieren. Die Rückfahrt von Memel nach Kiel erfolgte nahezu auf dem kürzesten Wege. Die ganze Reise dauerte 9 Tage, nämlich vom 7. bis 15. Mai 1903.

---

[1]) Ann. d. Phys. Bd. 2. 1900. S. 425--446.

Im Laufe der Reise stellte sich heraus, dass bei stärkerem Seegang (mehr als 3 der neunteiligen Skala) trotz der kardanischen Aufhängung zuverlässige Messungen am Elektroskop wegen zu heftiger Bewegung der Blättchen nicht ausgeführt werden konnten. Da auf der Hinfahrt nach Memel östlich des Meridians von Kopenhagen frische nordöstliche Winde einen ziemlich lebhaften Seegang erzeugten, so mussten auf diesem Teil der Fahrt, zwischen Rügen und Memel, elektrische Messungen unterbleiben. Jedoch gelang es, auf der Rückfahrt zwischen Memel und Bornholm auf hoher See einige zuverlässige Werte zu gewinnen (Beobachtungssätze IV^a, IV^b und V der Tabelle). Die meisten Beobachtungen liessen sich in dem geschützteren Teil der südwestlichen Ostsee erhalten.

Die Aufstellung des Apparats an Bord des Dampfers konnte im Windschutze einer überragenden Segeltuchverkleidung des Geländers auf der Kommandobrücke erfolgen. Hier, in 8 m Höhe über dem Meeresspiegel, war der Apparat gegen Spritzwasser ausreichend geschützt und die Zufuhr reiner, vom Dampfer unbeeinflusster Meeresluft am meisten gewährleistet. Ausser bei der ersten Beobachtungsreihe wurden sämtliche Messungen an der bezeichneten Stelle vorgenommen. An der ersten Station stand der Apparat auf Deck vor dem Steuermannshaus in 3 m Seehöhe. Dieser Platz erwies sich aus mehreren Gründen nicht als günstig, wenn das Schiff in Fahrt war.

Die Messungen geschahen im Allgemeinen nach einem von Herrn Dr. Lüdeling entworfenen Schema, das auf den Vorschlägen Elsters und Geitels basiert. Zuerst wurde eine Isolationsprobe mit positiver Ladung in der Weise ausgeführt, dass zwei Minuten nach der Ladung und einer vorläufigen Ablesung der Blättchendivergenz die erste definitive Ablesung erfolgte und nach 15 Minuten die zweite. Darauf wurde der Zerstreuungskörper aufgesetzt, mit positiver Ladung versehen, dann eine vorläufige und nach 2 Minuten eine definitive Ablesung vorgenommen, der die zweite wiederum nach 15 Minuten folgte. Dasselbe Messverfahren wurde darauf mit negativer

Ladung eingehalten, und die ganze Beobachtungsreihe mit einer Isolationsprobe auf negative Elektrizität beschlossen. Der allgemeine Witterungscharakter und der Zustand der Luft wurden gleichzeitig notiert.

Die Reduktion der elektrischen Messungen erfolgte nach den von Elster und Geitel abgeleiteten Formeln unter Einführung der Konstanten des Apparats. In der nachstehenden Zusammenstellung der Resultate bezeichnen

a_+ und a_- die in 1 Minute vom Zerstreuungskörper neutralisierte Elektrizitätsmenge in Prozenten der ursprünglichen positiven bezw. negativen Ladung, unabhängig von den Dimensionen des Apparats und der Höhe der Anfangsladung,

$q = \frac{a_-}{a_+}$ das Mass für die Unipolarität der beobachteten Leitfähigkeit der Luft.

Die Werte a_- und q sind bei der ersten Station unsicher, da gegen Schluss der Beobachtungen der Apparat, der bis dahin beschattet war, von der Sonne getroffen wurde. Der Wert q in der Reihe VI ist vielleicht anfechtbar, weil die Messungen der positiven und negativen Zerstreuung durch einen einstündigen Zwischenraum von einander getrennt waren.

Als Mittelwert ergibt sich aus den Reihen II bis V für q 1.43.

Nummer und Lage der Station	Datum Mai	Stunde	a_+	a_-	q	Luft-Temperatur	Luftfeuchtigkeit abs.	Luftfeuchtigkeit rel.	Wind	Bewölkung	Bemerkungen
I Nördl. v. Fehmarn	8.	10—11 1/2 a	0.46	(0.64)	(1.39)	9.0	7.6	89	SSW 1 —SSE 1	1^0 Cu, A Str.	$\odot^1$ ∞^0 Gegen Schluss Apparat von der Sonne bestrahlt.
II Östl. v. Fehmarn	8.	2—3 1/4 p	0.26	0.35	1.35	9.8	7.6	84	ESE 1	3^1 Cu, A Cu	$\odot^1$, Hor. ∞^0 Wegen fast glatter See ohne kard. Aufhängung.
III Nördl. v. Wismar	8.	6 1/2—7 3/4 p	1.26	1.40	1.11	9.4	6.7	76	ENE 3	2^0 Ci	$\odot^1$ klar Wolkenbank im NW, Nachts $\equiv^2$ bei E 5—7.
IV a 55°.6 N. 19°.5 O.	13.	4—5 1/2 p	0.61	1.07	1.75	6.4	6.4	90	W 1	1 am Hor.	$\odot^2$ klar. Horizont sehr scharf. Wind auffrischend.
IV b 55°.5 N. 18°.7 O.	13.	7 1/2—8 1/2 p	0.75	1.24	1.65	5.6	5.6	83	W 3—4	1 am Hor.	$\odot$ Unterg. sehr klar. 7[45] p Sonnenunterg während der Messung.
V 55°.2 N. 16°.7 O.	14.	4 1/2—6 a	0.74	0.96	1.30	6.1	6.1	87	W 2	1	$\odot^2$, sehr klar. Zunehmende Bewölkung. Nachm. bedeckt und leichter Regen.
VI Zwischen Fehmarn und Laaland	15.	12 1/4—2 1/2 p	0.73	0.68	(0.93)	{ 9.5 11.8	8.0 7.4	91 72	WSW 4 W 5	10^1 Str. Cu A Str.	Hor. trübe. Wegen Schlingern d. Schiffes zunächst Ablesung erschwert, später ruhigere See. Zuletzt Sonne schwach durch A Str. durchschimmernd.

Registrierung der Niederschlags-Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut.

Von H. Gerdien.

(Eingelaufen 18. Juni.)

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen beschloss im Jahre 1901 Beobachtungen der Niederschlags-Elektrizität ausführen zu lassen. Die Vorarbeiten wurden im Januar 1902 mit der Errichtung einer besonderen Beobachtungshütte auf dem Grundstück des damals im Bau befindlichen neuen geophysikalischen Institutes begonnen. Die luftelektrische Hütte liegt mitten in einer jungen Kiefernwaldung ausserhalb des Wind- und Regenschattens des Hauptgebäudes; ihr Platz scheint insofern sehr günstig, als einerseits bei den hierorts vorzüglich in Verbindung mit Niederschlägen auftretenden Winden aus dem Süd-West-Quadranten der Wind über mehrere 100 m Waldbestand hinwegstreichen muss, wodurch seine Geschwindigkeit in den unteren Luftschichten derart herabgemindert wird, dass selbst bei heftigen Böen der Einfallswinkel der Regentropfen, Graupeln und Hagelkörner nur ausnahmsweise 30° überschreitet. Andererseits ist der Ausblick bis zum Horizont nach Süden über Westen, Norden bis Nordnordosten ein ungehinderter — ein Umstand, der die Durchführung einer Experimentaluntersuchung der Niederschlags-Elektrizität in erster Linie ermöglicht, handelt es sich doch für den Beobachter darum, beim Herannahen einer Böe oder eines Gewitters rechtzeitig zur Stelle zu sein und sein Instrumentarium stets zur Beobachtung bereit zu halten.

Vorversuche. Die grundlegenden Untersuchungen von Elster und Geitel[1]) machten es möglich, die hiesigen Arbeiten sogleich mit einer erprobten Versuchsanordnung zu beginnen; so wurden denn auch die ersten Beobachtungen der Niederschlagselektrizität und des Potentialgefälles im wesentlichen nach der von Elster und Geitel ausgearbeiteten Methode durchgeführt. Bald stellte es sich aber heraus, dass es für einen einzelnen Beobachter schlechterdings unmöglich ist, gleichzeitig den schnell veränderlichen Verlauf der Niederschlagselektrizität und des Potentialgefälles zu verfolgen und dann noch seine Aufmerksamkeit in gebührendem Masse den meteorologischen Erscheinungen zuzuwenden; da ferner auch eine in kurzen Intervallen ausgeführte Beobachtung der Niederschlagsmenge im Zusammenhang mit den elektrischen Messungen nicht unwichtig erschien, begann ich im Juli 1902 mit der Konstruktion einer photographischen Registriervorrichtung für Niederschlagselektrizität, Potentialgefälle und Niederschlagsmenge. Aus den Vorarbeiten ist die folgende Versuchsanordnung hervorgegangen, die sich bisher bewährt hat.

Versuchsanordnung.

Niederschlagselektrizität.

Das Dach der Hütte (Grundriss: 2,1 × 2,1 m, Höhe 2,0 m) wird überragt von vier 1,7 m langen Stangen, die einen oben offenen Drahtnetzkäfig tragen; dieser hat die Bestimmung, die in der Mitte des Daches angebrachte, mit Zinkblech eingefasste kreisrunde Öffnung (Durchmesser 55 cm) der Auffangvorrichtung nach Möglichkeit dem elektrischen Erdfelde zu entziehen, damit nicht Tropfen, die von dem Rande der Öffnung abspritzen, merkliche Ladungen auf die im Innern der Hütte stehende Auffangschale bringen. Die Öffnung wird mit einem Deckel verschlossen, sobald die Beobachtungen beendigt sind — eine Vorsichtsmassregel, die sich besonders im Sommer als notwendig herausgestellt hat, da bei unverschlossener Öffnung sehr bald durch Spinnengewebe die Isolation der

---

[1]) Terr. Magn. IV. S. 15 u. ff. 1899.

Auffangschale zerstört zu werden pflegt. Zwischen der Auffangschale und der Öffnung im Dache ist 35 cm unterhalb dieser eine aus konisch gedrücktem Kupferblech hergestellte Blende von 200 cm^2 Querschnitt eingesetzt; die Anordnung ist so getroffen, dass noch Niederschläge von 30^0 Einfallswinkel durch die Blende fallen können, ohne den Rand der oberen Öffnung und das Drahtnetz des Schutzkäfigs gestreift zu haben. Unterhalb der Blende befindet sich in einem an der Decke der Hütte lichtdicht befestigten Kasten die Auffangschale aus Zinkblech, die auf einem den Boden des Kastens in enger Bohrung frei durchsetzenden Metallfuss ruht; im Innern der Hütte endigt dieser in einem sorgfältig mit Natrium getrockneten und vor Staub geschützten Bernsteinisolator. Die Auffangschale ist mit einem hinreichend hohen Rande versehen, der es verhindert, dass die beim Aufprall zerspritzenden Tropfen die Schale verlassen. Von dem Metallfuss der Auffangschale führt in lockeren Windungen ein feiner Draht zu einem zweiten ebenfalls mit Natriumtrocknung versehenen Bernsteinisolator und von diesem zu der Nadel eines Quadrantenelektrometers nach Elster und Geitel, dessen Quadrantenpaare auf entgegengesetzt gleichen Potentialen gehalten werden; die Nadel ist durch einen fünf verschiedene grosse Widerstände enthaltenden Rheostaten zur Erde abgeleitet. Der Rheostat besteht aus Hartgummistäbchen, die mit Graphit eingerieben sind und von Bernsteinsäulen getragen werden; die Widerstände sind in einem mit Natriumtrocknung versehenen Zinkblechkasten untergebracht, in dessen Deckel eine Anzahl Öffnungen zur Vornahme beliebiger Schaltungen mittelst geeigneter Kontaktstifte vorgesehen sind.

Es lassen sich so Widerstände von der gewünschten Grössenordnung (etwa 10^{11} Ohm) mit geringer Mühe herstellen, die sich, solange es nicht auf Präzisionsmessungen ankommt, sehr gut bewähren; die Graphitwiderstände werden mit der Zeit sehr langsam grösser und müssen daher hin und wieder neu geaicht werden, ihr Temperaturkoeffizient kann für die vorliegende Untersuchung ausser Acht gelassen werden.

Niederschlagsmenge.

Der Bernsteinisolator, der die Auffangschale trägt, ruht unten auf der Schale einer kleinen Dezimal-Wirtschaftswage auf, von deren längerem Arme aus ein Zugdraht über zwei Winkelhebel zu einem um eine vertikale Achse drehbaren Spiegel führt; der Zugdraht greift seitlich von der Drehungsachse des Spiegels an und wird durch eine kleine Wurmfeder gespannt gehalten. Die kleinere, sonst zur Aufnahme der Gewichte bestimmte Wagschale ist zu einer starken Flüssigkeitsdämpfung umgeändert — sie trägt unten eine fast den ganzen Querschnitt eines mit Paraffinöl gefüllten Becherglases einnehmende Metallscheibe — wodurch eine aperiodische Dämpfung der Federwage bewirkt wird. Die maximale Senkung der Auffangschale infolge Belastung mit Niederschlägen beträgt etwa 0,5 mm, was durch Vermittlung des Zugdrahtes einer Drehung des Spiegels um 3,5° entspricht.

Potentialgefälle.

Durch die östliche Wand der Hütte ist innerhalb eines langen Zinkblechrohres horizontal ein Bambusstab ins Freie geführt, der an seinem äusseren Ende eine in ein dünnwandiges Glasröhrchen eingeschmolzene Quantität Radiumbromid (1 mgr) trägt und sich im Innern der Hütte auf drei mit Natriumtrocknung versehene Bernsteinisolatoren stützt. Von der Radiumelektrode führt an dem Bambusstab entlang ein Draht ins Innere der Hütte zu der Nadel eines sehr unempfindlichen Quadrantenelektrometers, das besonders für diesen Zweck erbaut wurde. Die Nadel ist durch ein entsprechendes Gewicht so beschwert, dass sie selbst bei Potentialen von 5000 Volt nicht merklich aus ihrer zentrischen Lage zu den Quadrantenpaaren herausweicht, und ist ausserdem mit einem Magnetstäbchen versehen, das sich in dem Felde eines aussen am Elektrometergehäuse verschiebbaren starken Hufeisenmagneten befindet. Die Schwingungen der Nadel sind durch Paraffinöldämpfung nahezu aperiodisch gemacht.

Ein kleiner Spiegel, der unterhalb des Spiegels der registrierenden Wage auf einem festen Stativ angeordnet ist, zieht auf dem photographischen Papier eine Basislinie.

Photographische Registrierung.

Gegenüber den letztgenannten Spiegeln und den beiden Elektrometern ist der photographische Registrierapparat[1]) nebst der Beleuchtungsvorrichtung aufgestellt. Drei kleine elektrische Glühlampen von je 12 Volt Betriebsspannung sind in lichtdichten Laternen eingeschlossen und werfen ihr Licht durch je eine Beleuchtungslinse auf drei vertikale Spalte und durch diese hindurch auf die Spiegel der registrierenden Instrumente; vor jedem dieser Spiegel ist im Abstande ihrer Brennweite von dem betreffenden Spalt eine Linse befestigt, die unter Zwischenschaltung geeigneter Blenden ein Bild des Spaltes im Innern des Registrierapparates entwirft. Dieser besteht im wesentlichen aus drei in einem lichtdichten Holzkasten untergebrachten Walzen mit horizontalen Achsen; das photographische Papier[2]) von 13 cm Breite und 800 cm Länge[2]) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 0,1 mm/sec. unter einer 12 cm langen Zylinderlinse[3]) von 3 cm Brennweite hinweg, welche die Spaltbilder zu intensiv beleuchteten Lichtpünktchen auf dem Papier verdichtet. Die Papiergeschwindigkeit kann durch Wahl einer passend grossen Luftflügelbremse, die das gleichmässige Ablaufen des Papiers gewährleistet, beliebig verändert werden.

Zu jeder vollen Minute wird einer der drei Spalte durch eine kleine Weckeruhr abgeblendet (auf etwa 2 Sek.), die an ihrem verlängerten Sekundenzeiger einen kleinen, gut ausbalanzierten Papierflügel an dem Spalte vorüberführt.

---

[1]) Derselbe wurde nach den Angaben des Verfassers von der Firma Voigt und Hochgesang (Inhaber Herr Richard Brunnée) in Göttingen erbaut.

[2]) Höchst empfindliches Bromsilberpapier von Dr. Stolze und Co., Westend.

[3]) Bezogen von Reinfelder und Hertel, München.

Batterie.

Zum Laden der Elektrometerquadranten und zu Aichungszwecken dient eine Batterie von 100 Bornhäuserschen Flaschen-Akkumulatoren, die zu je 20 in paraffinierten Holzkästen wohl isoliert untergebracht und zur Erleichterung des Arbeitens von 5 zu 5 Elementen mit Kontaktstiften verbunden sind, so dass sich mittelst geeigneter Steckkontakte schnell alle erforderlichen Schaltungen vornehmen lassen.

Beobachtungsmethode nnd Aichung.

Zur Beobachtung der Niederschlagselektrizität fingen Elster und Geitel die Niederschläge auf einer isolierten Schale auf, verschlossen dann durch einen Deckel die Öffnung des Auffangapparates und beobachteten am Elektrometer das Potential, bis zu welchem sich das aus Elektrometer und Schale bestehende System aufgeladen hatte. Das Produkt aus Kapazität des Systems und Potential ergab nach Berücksichtigung des Isolationsverlustes unmittelbar die während der Dauer der Beobachtung dem System von aussen zugeführte Elektrizitätsmenge. Diese Methode ist zweifellos die sicherste und, solange nicht die Niederschlagselektrizität durch erhebliche Vergrösserung der Apparatdimensionen oder Erhöhung der bisher erreichten Galvanometerempfindlichkeit galvanometrisch gemessen werden kann, die bei weitem einfachste. Die automatische Durchführung dieser Methode würde sich jedoch recht schwierig gestalten und die Wahrscheinlichkeit des Versagens der ganzen Anordnung nur noch erhöht werden; auch ist die Methode der diskontinuierlichen Entladung des Systems für die photographische Registrierung ziemlich ungeeignet, da durch das Abbrechen der Kurven bei der schnell veränderlichen Natur der zu registrierenden Erscheinungen die Übersicht sehr erschwert wird. Es erwies sich als vorteilhaft, die Auffangschale dauernd durch einen grossen Widerstand abzuleiten und mittelst des Elektrometers das Potential zu registrieren, bis zu welchem die Schale durch die Niederschläge aufgeladen wird. Dass die Auffangschale durch ihre Aufstellung im Innern der Hütte unterhalb

der Blende und der durch den Drahtkäfig geschützten oberen Öffnung dem elektrischen Felde der Atmosphäre hinreichend entzogen ist, wurde durch besondere Versuche geprüft, ergibt sich aber ausserdem noch aus einigen Diagrammen von Nahgewittern, bei welchen das Potentialgefälle-Elektrometer gewaltige Feldänderungen registrierte, während die Kurve des Niederschlags-Elektrometers, solange keine Niederschläge fallen, auch keine merkliche Ausbiegung aufweist. Die Empfindlichkeit des Auffangapparates konnte innerhalb weiter Grenzen variiert werden durch Wahl eines der fünf vorhandenen grossen Widerstände und der Quadrantenspannung des Elektrometers. Aus der registrierten Kurve lässt sich leicht die zu jeder Zeit der Auffangschale zufliessende Stromstärke ermitteln, denn es gilt

$$d\varepsilon = C \cdot dV + \Omega \cdot V \cdot dt,$$

worin $d\varepsilon$ die in der Zeit dt zuströmende Elektrizitätsmenge, C die Kapazität, V das Potential des Systems und Ω den ableitenden Widerstand bezeichnet. Die Kapazität des Systems ist durch Vergleichung mit einer Normalkapazität zu 84,2 cm ermittelt worden; die Aichung der Widerstände geschieht in einfachster Weise dadurch, dass man das System auf ein bekanntes Potential ladet und (zweckmässig bei vergrösserter Registriergeschwindigkeit) die Entladungskurve des betreffenden Widerstandes registriert, deren Ausmessung in bekannter Weise den Widerstand ergibt. Zum Beispiel ist der am meisten benutzte Widerstand zu $8{,}5 \cdot 10^{11}$ Ohm gemessen worden.

Ähnlich wurde von Zeit zu Zeit die Empfindlichkeit des zur Registrierung des Potentialgefälles dienenden Elektrometers durch Anlegen bekannter Potentiale an die Nadel, ferner die Isolation nach Entfernung der Radiumelektrode aus der Entladungskurve und endlich die Ladezeit der Elektrode bestimmt. Letztere ist imstande, das aus Bambusstab, Leitung und Elektrometer gebildete System innerhalb von etwa 10 Sekunden bis auf 50% des Endwertes aufzuladen; eine Abnahme in der Wirksamkeit der Elektrode konnte bisher nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Die Reduktion des an der Elektrode ge-

messenen Potentials auf das über der Ebene herrschende Potentialgefälle ergab, dass 1 Volt an der Elektrode 4,1 Volt pro Meter entspricht. Für die zu erwartenden Sommergewitter soll dieses Verhältnis durch Verkürzung des Bambusstabes noch ein wenig verändert werden, so dass dann etwa 20 Volt/Meter einem Potential von 1 Volt an der Elektrode entsprechen werden. Während der Reduktionsmessungen wird das empfindlichere, sonst zur Messung der Niederschlagselektrizität benutzte Elektrometer mit der Elektrode verbunden.

Die registrierende Wage ist so reguliert, dass 20 gr Belastung (also bei 200 cm^2 Blendenquerschnitt 1 mm Niederschlag) einen Ausschlag von etwa 60 mm auf dem photographischen Papier erzeugen. Es würde in manchen Fällen eine höhere Empfindlichkeit erwünscht sein, doch werden bei gesteigerter Empfindlichkeit die Störungen durch Windstösse, bei denen jetzt schon der Lichtpunkt oft um mehrere Millimeter hin und her bewegt wird, allzu gross. Ist während der Niederschläge der Lichtpunkt am Ende der Zylinderlinse angelangt, so wird er durch Abheben eines Gewichts, von denen stets mehrere auf der Wagschale in Bereitschaft liegen, wieder über die Zylinderlinse hinweggeführt. Die Reibung der Schneiden entspricht einem Ausschlag von etwa 1,5 mm auf dem Papier; die Aichung der Wage geschieht durch Auflegen von bekannten Gewichten. Die gesamte Niederschlagsmenge wird zur Kontrolle regelmässig auch an dem auf der meteorologischen Wiese des Instituts aufgestellten Regenmesser bestimmt.

Neben der photographischen Registrierung des Potentialgefälles während des Falles von Niederschlägen ist eine mechanische Registrierung mittelst eines Benndorfschen Elektrometers dauernd in Tätigkeit, aus dessen von 10 zu 10 Minuten erfolgenden Aufzeichnungen der Verlauf des Potentialgefälles in der von Niederschlägen freien Zeit sehr übersichtlich entnommen werden kann.

Messungen der Wolkenhöhe mittelst photographischer Stereoskopaufnahmen und einige weitere luftelektrische Messungen sind in Vorbereitung.

Resultate.

Bei der Beurteilung der Resultate, die mit der beschriebenen Versuchsanordnung zu erhalten sind, wird man beachten müssen, dass die atmosphärischen Niederschläge nach ihrem Ursprung und Verlauf zu den zeitlich und räumlich veränderlichsten Naturerscheinungen gehören, die wir kennen. Die Erforschung der elektrischen Erscheinungen, die mit dem Auftreten von Niederschlägen in der Atmosphäre verbunden sind, muss daher solange eine unvollkommene und unbefriedigende bleiben, als der Beobachter gezwungen ist, an einer gegebenen Stelle der Erdoberfläche die zu untersuchenden Phänomene über sich hinwegziehen zu lassen anstatt sie an Ort und Stelle aufzusuchen. Vorerst lässt sich nur erwarten, dass man aus vielen mit der beschriebenen Versuchsanordnung angestellten Beobachtungen vielleicht einige Erfahrungen allgemeinerer Art wird ableiten können, die geeignet sind, als Ausgangspunkte für eine vollkommenere Untersuchungsmethode zu dienen.

Es lassen sich in der Tat schon jetzt eine Reihe von Merkmalen angeben, die den verschiedenen Arten von Niederschlägen eigentümlich zu sein scheinen.

In vollem Umfange bestätigten sich die von Elster und Geitel in ihrer Arbeit „Beobachtungen über die Eigenelektrizität der atmosphärischen Niederschläge“ veröffentlichten Resultate. Man kann im allgemeinen bezüglich ihrer elektrischen Eigenschaften drei Gruppen von Niederschlägen unterscheiden — von Dunst, Nebel, Tau, Rauhreif u. dgl. wird hier abgesehen, — für welche die Schlagworte „Landregen“, „Böenregen“ und „Gewitterregen“ gebraucht werden mögen. Dabei sollen unter „Landregen“ auch schwache, lange andauernde Schneefälle, unter „Böenregen“ auch Graupel- und Hagelböen und unter „Gewitterregen“ alle mit sinnlich wahrnehmbaren Entladungen verbundenen Niederschläge verstanden sein. Durch diese Einteilung wird schon eines der auch von Elster und Geitel gefundenen Resultate vorweggenommen, nämlich die Tatsache, dass sich ein wesentlicher Unterschied in dem elektrischen Ver-

halten von Niederschlägen, die in Form von Regen, Schnee, Hagel oder Graupeln fallen, innerhalb jeder der drei genannten Gruppen nicht angeben lässt.

Der Landregen ist meist von negativem Potentialgefälle begleitet, das während des Falles von Niederschlägen bis auf etwa 1000—2000 Volt/Meter anwachsen kann; charakteristisch ist das seltene Vorkommen starker positiver Felder. Das Vorzeichen der Niederschlagselektrizität wechselt, doch überwiegt im allgemeinen die negative Ladung; die bei Landregen der Erdoberfläche zufliessenden Stromstärken gehen bis etwa 10^{-14} Amp./cm² herauf, sind jedoch meistens bedeutend geringer, zeitweise scheint merklich unelektrischer Regen vorkommen zu können.

Der Böenregen ist charakterisiert durch periodisch wechselnde Feldrichtungen; die Feldstärke zeigt oft Schwankungen kürzerer Periode, die sich den Änderungen von längerer Dauer und grösserem Betrage superponieren. Nicht selten werden bei Böen, namentlich kurz vor dem Falle grosser Tropfen oder Graupel- und Hagelkörner Feldstärken von 4000—6000 Volt/Meter erreicht, die oft innerhalb einiger Sekunden das Vorzeichen wechseln. Bei der überwiegenden Anzahl aller bisher registrierten Böen wurde beim Heranziehen der Front starkes positives Potentialgefälle beobachtet; die Beantwortung der Frage, ob hierin eine gesetzmässige Beziehung liegt, bezw. wodurch diejenigen seltener auftretenden Böen mit anfänglich negativem Potentialgefälle von denjenigen mit positivem ihrer meteorologischen Natur nach unterschieden sind, muss vorerst bis nach Ansammlung eines reichhaltigeren Beobachtungsmaterials verschoben werden. Die Niederschlagselektrizität wechselt in ähnlich periodischer Weise ihr Vorzeichen wie das Potentialgefälle, die Stromdichte ist bei Böen etwa von der Grössenordnung 10^{-13} Amp./cm². Häufig wurden Böen mit anfänglich positiver Niederschlagsladung beobachtet, doch überwiegt ihre Zahl diejenige der anfänglich negative Ladungen zur Erde fördernden nicht so sehr, wie die Anzahl der Böen mit anfänglich positivem Potentialgefälle diejenige der Böen

mit negativem Potentialgefälle überwiegt. Es kommen Böen vor, während deren Verlauf das Vorzeichen des Feldes fast regelmässig das entgegengesetzte ist, als das der Niederschlagsladungen, in den weitaus meisten Fällen ist aber ein Wechsel in dem Vorzeichen des Feldes nicht mit einem Vorzeichenwechsel bei der Niederschlagselektrizität verbunden. Häufig ist beim Abziehen einer Böe das Vorzeichen des Feldes dem der zuletzt gefallenen Niederschlagselektrizität entgegengesetzt, doch sind auch schon eine Reihe von Böen beobachtet, bei denen Niederschlagselektrizität und Potentialgefälle zum Schlusse gleiches Vorzeichen hatten. Auch bei den Böenregen überwiegt im allgemeinen die zur Erde geförderte negative Ladung die positive.

Die Gewitterregen sind vor Allem quantitativ von den Böenregen dadurch unterschieden, dass bei ihnen Felder von 10 000 Volt/Meter nicht zu den Seltenheiten gehören und die durch die Niederschläge der Erde zugeführten Ströme oft 10^{-12} Amp./cm^2 übersteigen. Das Ansteigen des Feldes zu einem Maximalwert geschieht hier innerhalb weniger Sekunden, erfolgt dann eine Entladung, so ist oft in kurzer Zeit schon wieder der gleiche Wert des Feldes erreicht oder überschritten oder es erfolgt schnell ein Vorzeichenwechsel und rapides Anwachsen des Feldes im entgegengesetzten Sinne. Solange noch Entladungen stattfinden, kann man häufig beobachten, dass die Niederschlagselektrizität nicht wesentlich die bei Böenregen vorkommenden Werte überschreitet, erst wenn das Gewitter schon abzuziehen beginnt, nimmt dann meist sehr schnell die Niederschlagselektrizität grosse Werte an. In dem vorhergehenden Stadium scheinen kurz aufeinander Niederschläge von verschiedenen Vorzeichen zu folgen, die vielleicht sehr grosse Eigenladungen mitführen; leider aber folgen diese Vorzeichenwechsel so schnell aufeinander, dass es grosse Schwierigkeiten bieten dürfte, sie getreu ihrem wahren Verlaufe zu registrieren. Etwas ähnliches gilt auch von der Registrierung des Potentialgefälles bei Gewittern, besonders bei heftigen Nahgewittern, wo oft die einzelnen Entladungen so schnell aufeinander folgen,

dass die Elektrode nicht imstande ist, das angehängte System von tunlichst kleiner Kapazität auch nur angenähert auf das im Momente der Entladung erreichte Potential aufzuladen. Vielfach wurde bei Gewittern das merkwürdige Phänomen beobachtet, dass Niederschläge, deren Ladung das entgegengesetzte Vorzeichen hatte als das momentan bestehende Feld, beim Anwachsen des Feldes schwächer und schwächer niedergingen, um dann im Momente der Entladung oder gar des Umschlagens der Feldrichtung in die entgegengesetzte mit grosser Intensität herabzustürzen und dass andererseits Niederschläge von einer Ladung gleichen Vorzeichens beim Anwachsen des Feldes äusserst heftig niedergehen, während sie sofort nach der Entladung oder Feldumkehr fast aussetzen. In der Tat zeigt eine oberflächliche Schätzung der Tropfen- bezw. Körnergewichte, dass das bestehende Feld bei der vorhandenen Eigenladung der Niederschläge sehr wohl imstande gewesen sein muss, diese merklich in ihrem Fall zu verzögern bezw. zu beschleunigen. Bei einzelnen Gewittern überwog die insgesamt der Erde zugeführte negative Ladung nur wenig die positive, bei den übrigen bisher beobachteten Gewittern war deutlich ein Überschuss an negativer Ladung zu konstatieren.

Die Registrierung der Niederschlagsmenge im Zusammenhange mit den elektrischen Erscheinungen bei Niederschlägen hat es möglich gemacht, unter Schätzung der Wolkenhöhe eine angenäherte Berechnung der bei den betreffenden Niederschlägen in andere Energieformen umgesetzten potentiellen Gravitationsenergie vorzunehmen. Bei allen bisher nach dieser Richtung hin untersuchten Niederschlägen hat sich herausgestellt, dass selbst bei sehr ungünstigen Annahmen über die Fallhöhe und die Konfiguration des Feldes die Gravitationsenergie die bei weitem ausreichende Energiequelle für die Erzeugung der zeitweise vorhandenen elektrischen Energie ist. Bei Landregen scheint im allgemeinen der kleinste Bruchteil der Gravitationsenergie in elektrische umgesetzt zu werden, bei Böenregen ein grösserer und bei Gewitterregen der grösste Bruchteil. Vorbehaltlich einer späteren Bestätigung durch Ver-

arbeitung weiteren Beobachtungsmaterials mag endlich konstatiert werden, dass die von C. P. R. Wilson gefundene Tatsache, dass die negativen Ionen vorzugsweise, d. h. schon bei geringerer Übersättigung dem Wasserdampf als Kondensationskerne dienen können, qualitativ wie quantitativ — soweit hier Schätzungen der räumlichen Ausdehnung der in Betracht kommenden Wolkengebilde einen Schluss zulassen — zur Erklärung der bei Niederschlägen auftretenden elektrischen Erscheinungen auszureichen scheint.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

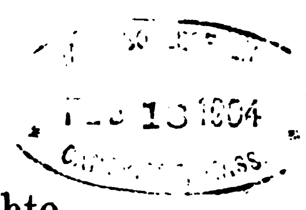
K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1903. Heft III.

München.
Verlag der K. Akademie.
1903.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 4. Juli 1903.

1. Herr H. v. Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Arthur Korn, Privatdozenten für Physik an der hiesigen Universität: „Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes, I. Abhandlung“ vor.

Die von dem Verf. vor einiger Zeit aufgestellte mechanische Theorie der Gravitation wird auf den Fall verallgemeinert, dass das Zwischenmedium nicht genau den hydrodynamischen Gleichungen folgt, sondern mit Absorption begabt ist.

2. Herr Carl v. Linde macht Mitteilungen: „Über Erscheinungen beim Ausfluss erhitzten Wassers.“ Dieselben werden anderweit veröffentlicht.

Herr C. Linde berichtet dabei über Erscheinungen beim Ausströmen erhitzter Flüssigkeiten, welche im Laboratorium für technische Physik beobachtet wurden. Lässt man Wasser durch eine Mündung mit der dem Drucke angehörenden Sättigungstemperatur ausfliessen, so zeigt sich bei der Drucksenkung nicht die der jeweiligen Sättigung entsprechende Temperatursenkung und Dampfentwicklung, sondern bis zum kleinsten

Ausflussquerschnitte bleibt die Temperatur trotz abnehmenden Druckes konstant. Es ist noch nicht aufgeklärt, ob diese Anomalie eine Funktion der Zeit oder eine Folge rein dynamischer Verhältnisse ist.

3. Herr RICHARD HERTWIG überreicht zwei Arbeiten des Herrn ALBERT SCHULZ über Hymenopteren:

a) „Beiträge zur näheren Kenntnis der Schlupfwespenfamilie der Pelecinidea."

b) „Materialien zu einer Hymenopterenfauna der westindischen Inseln."

Der Autor behandelt in der ersten die durch ihre geographische Verbreitung bemerkenswerte Schlupfwespenfamilie der Pelecinidea und weist nach, dass die bisher dazu gestellte Gattung Pharsalia zu einer anderen Familie, den Ophioniden (Subfamilie Nototrachinen) gehört.

In der zweiten Arbeit wird eine Anzahl Stechimmen von den westindischen Inseln erläutert und zum Teile neubeschrieben. Pepsis rubra und P. stellata, die bisher nur in je einem Geschlechte bekannt waren, werden als dimorphe Geschlechter zu einer Art (rubra) vereinigt. Im ganzen sind von den Antillen nur erst rund 1300 verschiedene Hymenopterenformen bekannt, und es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese Zahl nur einen winzigen Bruchteil der dort wirklich vorkommenden Arten bildet.

Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes.

I. Abhandlung.

Von A. Korn.

(Eingelaufen 4. Juli.)

Einige Schwierigkeiten, welche der Allgemeingiltigkeit der Newtonschen Form:

$$K = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

des Gravitationsgesetzes entgegenstehen, lassen sich heben, wenn man das Gesetz in der Form:

$$K = G \frac{m_1 m_2}{r^2} e^{-\mu r}$$

oder in der Form:

$$K = - G \cdot m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right)$$

annimmt, entsprechend einer Art von Absorption in dem die Gravitation vermittelnden Zwischenmedium. Diese Fragen sind in neuester Zeit von H. v. Seeliger angeregt und diskutiert worden.[1])

Die folgenden Untersuchungen sollen zeigen, dass auch in der von mir aufgestellten Gravitationstheorie, welche auf der

[1]) H. Seeliger, Astr. Nachr. 137, p. 129, 1895; Münch. Ber. 26, p. 373, 1896.

C. Neumann, Allg. Unters. über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig 1896.

Theorie der universellen Schwingungen[1]) beruht, eine solche Erweiterung des Gravitationsgesetzes leicht zu begründen ist und zu einem mathematisch höchst interessanten Problem führt, welches ich als das Problem der universellen Schwingungen bei absorbierendem Zwischenmedium bezeichnen will.

Bei dem einfachen Problem der universellen Schwingungen handelt es sich um die Auffindung der Eigenschwingungen eines aus schwach kompressibeln Teilchen und einem idealen, inkompressibeln Zwischenmedium zusammengesetzten Systems. In den Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} u = U \sin \frac{t}{T} 2\pi \\ v = V \sin \frac{t}{T} 2\pi \\ w = W \sin \frac{t}{T} 2\pi \end{cases}$$

für die Schwingungsgeschwindigkeiten des Systems müssen U, V, W Ableitungen eines Geschwindigkeitspotentials Φ sein:

$$2)\qquad \begin{cases} U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ W = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{cases}$$

das im Innern der Teilchen der Gleichung:

$$3^{a})\qquad \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

in dem Zwischenmedium der Gleichung:

$$3^{b})\qquad \Delta \Phi = 0$$

[1]) A. Korn, Les vibrations universelles de la matière. Ann. de l'Ec. Norm. 20, 1903.

genügt, wobei k^2 mit der gesuchten Schwingungsdauer T durch die Relation

$$4)\qquad k^2 = 4\,\pi^2\,\frac{a^2}{T^2}$$

verbunden ist (a^2 eine der Kompressibilität der Teilchen zugehörige Konstante).

Φ muss mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig sein und im Unendlichen verschwinden.

Wenn wir nun eine Absorption des Zwischenmediums in dem in den einleitenden Sätzen angedeuteten Sinne voraussetzen, so ändert sich bei der Stellung des Problems nur die Gleichung 3^b); dieselbe ist, wenn μ eine der Absorptionsfähigkeit des Zwischenmediums entsprechende Konstante ist, durch die folgende Gleichung zu ersetzen:

$$5)\qquad \Delta\,\Phi - \mu^2\,\Phi = 0.$$

Indem wir die Gleichung 3) durch die Gleichung 5) ersetzen, geht das Problem der universellen Schwingungen in das allgemeinere Problem „der universellen Schwingungen bei absorbierendem Zwischenmedium" über.

Ähnlich, wie dies für das einfache Problem möglich war,[1]) werden wir auch für dieses allgemeinere Problem den Beweis erbringen, dass stets eine unendliche Reihe positiver, unbegrenzt wachsender Zahlen

$$k_0^2,\; k_1^2,\; k_2^2\;\ldots\ldots\; k_j^2\;\ldots$$

und entsprechender Funktionen

$$\Phi_0^\mu,\; \Phi_1^\mu,\; \Phi_2^\mu\;\ldots\ldots\; \Phi_j^\mu\;\ldots$$

existieren, welche als Lösungen des Problemes zu betrachten sind.

Der Grundschwingung k_0^2, Φ_0, d. h. der Schwingung mit kleinstem k_0^2 entsprechen Pulsationen der einzelnen Teilchen,

---

[1]) A. Korn, le problème mathématique des vibrations universelles; Commun. de la Soc. Math. de Kharkow 1903. Wir bedienen uns auch hier einer von H. Poincaré gegebenen Methode (Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 1894).

in ihr haben wir die Ursache der Gravitation zu erblicken. Während sich für $\mu = 0$ für die Wechselwirkung zweier Teilchen infolge dieser Grundschwingung das Gravitationsgesetz in der Newtonschen Form ergibt, folgt bei von null verschiedenem μ für die Wechselwirkung ein verallgemeinertes Gravitationsgesetz, das wir als das Schlussresultat dieser Untersuchungen aussprechen werden.

I. Abschnitt.

Über die universellen Funktionen bei absorbierendem Zwischenmedium.

§ 1.

Wir stellen uns das folgende sehr allgemeine Problem:

Es sei f eine mit ihren ersten Ableitungen in dem Innenraum i einer stetig gekrümmten, geschlossenen Oberfläche ω (die sich auch aus mehreren getrennten Teilen zusammensetzen kann) eindeutige und stetige Funktion.

Wir suchen eine mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutige und stetige Funktion U, die im Unendlichen verschwindet und den Bedingungen genügt:

6ᵃ) $\Delta U + k^2 U = f$, im Innenraume,[1])

6ᵇ) $\Delta U - \mu^2 U = 0$, im Aussenraume,

wenn k^2 und μ^2 gegebene positive Zahlen vorstellen.

---

[1]) Die Untersuchung ist leicht auf den Fall anwendbar, dass 6ᵃ) allgemeiner so lautet:

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f$$

und φ^2 eine überall von null verschiedene, im übrigen beliebige mit ihren ersten Ableitungen im Innenraume eindeutige und stetige Funktion darstellt.

Wir bilden successive die Funktionen:

$$7)\quad \begin{cases} u_0(x,y,z) = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_i f(\xi,\eta,\zeta)\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau, \\ u_j(x,y,z) = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_i u_{j-1}(\xi,\eta,\zeta)\frac{e^{-\mu r}}{r}.d\tau, \quad (j=1,2,3\ldots), \end{cases}$$

indem wir unter r die Entfernung von (x, y, z) nach einem Elemente $d\tau\ (\xi, \eta, \zeta)$ verstehen.

Alle diese Funktionen sind mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig und verschwinden im Unendlichen; sie genügen ferner den Gleichungen:

$$8^a)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u_0 &= \mu^2 u_0 + f, \\ \Delta u_j &= \mu^2 u_j - u_{j-1}, \\ &(j = 1, 2, 3\ldots) \end{aligned} \right\} \text{ im Innenraume,}$$

$$8^b)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u_0 &= \mu^2 u_0, \\ \Delta u_j &= \mu^2 u_j, \\ &(j = 1, 2, 3\ldots) \end{aligned} \right\} \text{ im Aussenraume.}$$

Die Funktion:

$$u_0 + \varkappa u_1 + \varkappa^2 u_2 + \cdots \qquad (\varkappa = \mu^2 + k^2)$$

wird somit eine Lösung der gestellten Aufgabe sein, wenn wir beweisen können, dass diese Reihe eine mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutige und stetige Funktion darstellt.

Diese Konvergenzbetrachtungen werden uns im besonderen auch zur Lösung des in der Einleitung gestellten Problemes führen.

§ 2.

Wir bilden successive die Funktionen:

$$9)\quad \begin{cases} w_0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_i [a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - .. - a_p u_{p-1}] \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ w_j = +\frac{1}{4\pi}\int\limits_i w_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau, \\ \qquad (j = 1, 2, 3 \ldots) \end{cases}$$

wobei wir unter p eine endliche, ganze Zahl, unter $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_p$ p Konstanten verstehen wollen, die der Gleichung:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2 = 1$$

genügen, und über die wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten.

Wir wollen zeigen, dass $a_0\, a_1 \ldots a_p$ bei genügend gross gewähltem p stets so bestimmt werden können, dass

$$10)\qquad \text{abs.}\ (\varkappa^j \cdot w_j) \overline{<} A \cdot L^j \quad \begin{pmatrix} A \text{ endliche Konstante,} \\ L \text{ echter Bruch} \end{pmatrix}$$

wenn $\varkappa$ eine beliebig grosse, aber von vornherein fest gegebene positive Zahl vorstellt. Die Funktion

$$11)\qquad w = w_0 + \varkappa\, w_1 + \varkappa^2\, w_2 + \ldots$$

wird dann die Lösung des Problems:

$$12)\quad \begin{cases} \Delta w + k^2{}^{*)} w = a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \ldots - a_p u_{p-1} & \text{im Innenraume,} \\ \Delta w - \mu^2 w = 0 \quad \text{im Aussenraume} \end{cases}$$

darstellen.

Zum Beweise suchen wir eine obere Grenze für den Quotienten:

$$\frac{\int\limits_i w_m^2\, d\tau}{\int\limits_i w_{m-1}^2\, d\tau},$$

*) $k^2 = \varkappa - \mu^2$.

wobei wir vorläufig unter m eine von vornherein beliebig gross, aber fest gegebene endliche Zahl verstehen wollen.

Es ist:

$$\int_{i+a}\left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau=-\int_{i+a} w_m\,\varDelta\,w_m\,d\tau,$$

$$=-\int_i w_m\,\varDelta\,w_m\,d\tau-\int_a \mu^2 w_m^2\,d\tau$$

oder:

$$\int_{i+a}\left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau+\int_a \mu^2 w_m^2\,d\tau=-\int_i w_m\,\varDelta\,w_m\,d\tau.$$

Hieraus folgt (nach der bekannten Ungleichung

$$\left[\int_i X\cdot Y\,d\tau\right]^2 \leqq \int_i X^2\,d\tau\cdot\int_i Y^2\,d\tau):$$

$$\int_{i+a}\left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\int_{i+a}\mu^2 w_m^2\,d\tau \leqq \sqrt{\int_i w_m^2\,d\tau\int_i w_{m-1}^2\,d\tau}$$

und hieraus:

$$\frac{\int_i w_m^2\,d\tau}{\int_i w_{m-1}^2\,d\tau}$$

13)
$$\leqq\left[\frac{\int_i w_m^2\,d\tau}{\int_{i+a}\left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau+\int_{i+a}\mu^2 w_m^2\,d\tau}\right]^2.$$

Nun kann man nach einem bekannten Satze von Poincaré[1]) bei genügend grossem p die Konstanten $a_0\,a_1\,a_2\ldots a_p$ stets so wählen, dass

---

[1]) H. Poincaré, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 1894, A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie, Berlin 1901—1902, Abh. 4 S. 6 und 7.

$$\frac{\int_i w_m^2\, d\tau}{\int_i \left\{\left(\frac{\partial w_m}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

(a^2 eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante), und um so mehr:

$$\frac{\int_i w_m^2\, d\tau}{\int_{i+a} \left\{\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau + \int_{i+a} \mu^2 w_m^2\, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}},$$

da

$$w_m = a_0\, u_{m-1} + a_1\, u_m + a_2\, u_{m+1} + \ldots + a_p\, u_{m+p-1},$$

unter der Voraussetzung, dass $u_{m-1}\, u_m \ldots u_{m+p-1}$ linear unabhängig[1]) sind.

Man kann somit unter der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Funktionsreihe:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots$$

stets

14) $$\frac{\int_i w_m^2\, d\tau}{\int_i w_{m-1}^2\, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{a^4}{\sqrt[3]{p^4}}$$

machen, für ein beliebig grosses, aber fest gegebenes m, indem man $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_p$ geeignete Werte $a_0^{(m)}\, a_1^{(m)}\, a_2^{(m)} \ldots a_p^{(m)}$ erteilt.

Da:

$$\begin{aligned}\int_i w_{m-1}^2\, d\tau &= -\int_i w_{m-1}\, \Delta w_m\, d\tau + \mu^2 \int_i w_{m-1}\, w_m\, d\tau,\\ &= -\int_i w_m\, \Delta w_{m-1}\, d\tau + \mu^2 \int_i w_{m-1}\, w_m\, d\tau,\\ &= \int_i w_m\, w_{m-2}\, d\tau,\end{aligned}$$

so folgt:

---

[1]) D. h. unter der Voraussetzung, dass sich nicht Konstanten $\beta_0\, \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_p$ so finden lassen, dass:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1$$

und:

$$\beta_0\, u_{m-1} + \beta_1\, u_m + \beta_2\, u_{m+1} + \ldots + \beta_p\, u_{m+p-1} \equiv 0.$$

$$\left[\int_i w_{m-1}^2\, d\tau\right]^2 < \int_i w_m^2\, d\tau \int_i w_{m-2}^2\, d\tau,$$

oder:

$$15)\qquad \frac{\int_i w_{m-1}^2\, d\tau}{\int_i w_{m-2}^2\, d\tau} \leqq \frac{\int_i w_m^2\, d\tau}{\int_i w_{m-1}^2\, d\tau} \qquad (m = 1,^{*)}\, 2, 3 \ldots)$$

und in derselben Weise successive:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\int_i w_0^2\, d\tau}{\int_i \{a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \ldots - a_p u_{p-1}\}^2 d\tau} \leqq \dfrac{\int_i w_1^2\, d\tau}{\int_i w_0^2\, d\tau} \leqq \ldots \\ \leqq \dfrac{\int_i w_{m-1}^2\, d\tau}{\int_i w_{m-2}^2\, d\tau} \leqq \dfrac{\int_i w_m^2\, d\tau}{\int_i w_{m-1}^2\, d\tau} \leqq \dfrac{a^4}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{cases}$$

Dieses Resultat, das für endliche m abgeleitet ist, lässt sich auch für unendlich wachsende m beweisen: Man denke sich $a_0^{(m)}\, a_1^{(m)} \ldots a_p^{(m)}$ als Koordinaten eines Punktes der Kugel:

$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

in einem $(p+1)$ dimensionalen Raume, es wird dann (16) für ein gewisses Gebiet δ_m dieser Kugel erfüllt sein. Wir können nun durch geeignete Wahl der Werte

$$a_0^{(m+1)}\, a_1^{(m+1)} \ldots a_p^{(m+1)}$$

die Ungleichungen:

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\int_i w_0^2\, d\tau}{\int_i \{a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \ldots - a_p u_{p-1}\}^2 d\tau} \leqq \dfrac{\int_i w_1^2\, d\tau}{\int_i w_0^2\, d\tau} \leqq \ldots \\ \leqq \dfrac{\int_i w_m^2\, d\tau}{\int_i w_{m-1}^2\, d\tau} \leqq \dfrac{\int_i w_{m+1}^2\, d\tau}{\int_i w_m^2\, d\tau} \leqq \dfrac{a^4}{\sqrt[3]{p^4}} \end{cases}$$

---

*) Für $m = 1$ ist

$$-w_{m-2} = a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \ldots - a_p u_{p-1}$$

zu setzen.

erreichen; die Punkte $a_0^{(m+1)}\, a_1^{(m+1)} \ldots a_p^{(m+1)}$, welche dieser Bedingung 17) genügen, werden einem Gebiete δ_{m+1} angehören, das ganz in δ_m enthalten ist, da 16) eine Folge von 17) ist. Wenn man in dieser Weise fortgeht, wird man finden, dass das folgende Gebiet δ_{m+2} ganz in δ_{m+1} enthalten ist, δ_{m+3} in δ_{m+2} u. s. w.; daraus folgt die Existenz von Werten

$$a_0 \;\; a_1 \;\; a_2 \ldots a_p,$$

für welche die Ungleichungen:

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\int\limits_i w_0^2\, d\tau}{\int\limits_i \{a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \ldots - a_p u_{p-1}\}^2\, d\tau} < \frac{\int\limits_i w_1^2\, d\tau}{\int\limits_i w_0^2\, d\tau} \overset{=}{<} \ldots \\ &\overset{=}{<} \frac{\int\limits_i w_2^2\, d\tau}{\int\limits_i w_1^2\, d\tau} \overset{=}{<} \text{in inf.} < \frac{a^4}{\sqrt[3]{p^4}} \end{aligned}\right.$$

bestehen.

Setzt man:

$$19)\qquad L_p = \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}},$$

so kann man nach 18) folgern:

$$\int\limits_i w_j^2\, d\tau \overset{=}{<} B \cdot L_p^{2j}, \quad j = 1, 2, 3 \ldots$$

(B endliche Konstante), und da:

$$w_j = \frac{1}{4\pi} \int\limits_i w_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau,$$

$$w_j^2 \overset{=}{<} \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_i w_{j-1}^2\, d\tau \int\limits_i \frac{e^{-2\mu r}}{r^2}\, d\tau,$$

auch:

$$20)\qquad \text{abs. } w_j \overset{=}{<} A \cdot L_p^j, \quad (j = 1, 2, 3 \ldots),$$

wenn A wieder eine endliche Konstante vorstellt. Indem wir bei gegebenem $\varkappa$ die Zahl p genügend gross wählen, können wir stets erreichen, dass $\varkappa\, L_p$ kleiner wird als ein echter Bruch L, und dann wird:

21) $$\text{abs.}\,(\varkappa^j w_j) \overline{<} A \cdot L^j; \quad (0 < L < 1)$$

die Funktion 11) löst somit das Problem 12) bei geeignet gewählten $a_0\, a_1 \ldots a_p$ unter Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Funktionsreihe:

$$u_0\; u_1\; u_2\; u_3 \ldots .$$

§ 3.

Die $p + 1$ linearen Gleichungen:

22) $$\begin{cases} a_0\, U + a_1\, U' + a_2\, U'' + \cdots + a_p\, U_p = w, \\ U - \varkappa\, U' = u_0 \\ U' - \varkappa\, U'' = u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U^{(p-1)} - \varkappa\, U^{(p)} = u_{p-1} \end{cases}$$

definieren für den Fall des Nicht-Verschwindens der Determinante:

23) $$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ 1 & -\varkappa & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\varkappa & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & -\varkappa \end{vmatrix}$$

$p + 1$ Funktionen

$$U\; U'\; U'' \ldots U^{(p)};$$

die erste derselben löst das Problem 6^a), 6^b), wie wir leicht zeigen können: Wir schreiben die zweite bis $(p+1)^{\text{te}}$ Gleichung 22) in der Form:

24) $$U^{(j-1)} - \varkappa\, U^{(j)} - u_{j-1} = 0, \quad (j = 1,^{*})\, 2 \ldots p)$$

und folgern hieraus durch die Operation Δ im Innenraume:

25) $$\Delta\, U^{(j-1)} - \varkappa\, \Delta\, U^{(j)} + u_{j-2} - \mu^2 u_{j-1}, \quad (j = 1,^{**})\, 2 \ldots p).$$

---

*) $U^{(j-1)}$ steht im Falle $j = 1$ für U.

**) u_{j-2} steht im Falle $j = 1$ für $(-f)$.

Während die erste Gleichung 22) mit Rücksicht auf die Eigenschaft 12) von w die Relation liefert:

$$26^{a})\begin{cases} a_0(\Delta U + k^{2*}) U - f) + a_1(\Delta U' + k^2 U' + u_0) \\ \qquad + a_2(\Delta U'' + k^2 U'' + u_1) \\ \qquad + \dots\dots\dots \\ \qquad + a_p(\Delta U^{(p)} + k^2 U^{(p)} + u_{p-1}) = 0 \\ \qquad\qquad \text{(im Innenraume)}, \end{cases}$$

folgen, wenn man 24) mit k^2 multipliziert und zu 25) addiert, die folgenden Gleichungen, die wir für $j = 1, 2 \dots p$ explicite hinschreiben wollen:

Es ist im Innenraume:

$$26^{b})\begin{cases} (\Delta U + k^2 U - f) - \varkappa(\Delta U' + k^2 U' + u_0) = 0, \\ (\Delta U' + k^2 U' + u_0) - \varkappa(\Delta U'' + k^2 U'' + u_1) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\Delta U^{(p-1)} + k^2 U^{(p-1)} + u_{p-1}) - \varkappa(\Delta U^{(p)} + k^2 U^{(p)} + u_p) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen 26^{a}) und 26^{b}) bilden zusammen ein System von $p+1$ linearen, homogenen Gleichungen in bezug auf die $p+1$ Grössen:

$$\begin{aligned} &\Delta U + k^2 U - f, \\ &\Delta U' + k^2 U' + u_0, \\ &\Delta U'' + k^2 U'' + u_1, \\ &\dots\dots\dots \\ &\Delta U^{(p)} + k^2 U^{(p)} + u_p; \end{aligned}$$

ist ihre Determinante D (das ist wieder die Determinante 23)) $\neq 0$, so müssen sie einzeln verschwinden, im besonderen ist also:

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad \text{im Innenraume.}$$

Dass U mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume stetig ist, im Unendlichen verschwindet und dass

$$\Delta U - \mu^2 U = 0, \quad \text{im Aussenraume}$$

*) $k^2 = \varkappa - \mu^2$.

ist, ergibt sich daraus, dass sich U linear aus den $w, u_0, u_1 \dots u_{p-1}$ zusammensetzt, die alle diese Eigenschaften besitzen.

Die Formel:

27) $$U = \frac{P}{D},$$

in der:

28) $$P = \begin{vmatrix} w & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_p \\ u_0 & -\varkappa & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -\varkappa & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\varkappa \end{vmatrix}$$

und D durch 23) gegeben ist, stellt daher die Lösung unseres allgemeinen Problems 6^a), 6^b) dar, unter den beiden Voraussetzungen, dass $\varkappa$ nicht grade eine Lösung der algebraischen Gleichung

$$D = 0$$

ist und dass keine lineare Abhängigkeit zwischen den Funktionen der Reihe:

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \dots$$

besteht.

Diese beiden Fälle haben wir noch zu diskutieren.

§ 4.

Zur Untersuchung des ersteren Falles wollen wir $\varkappa$ nicht mehr, wie bisher, als eine bestimmte fest gegebene Zahl, sondern als eine Variable unterhalb dieser festen Zahl auffassen. Die Funktion P und ihre ersten Ableitungen nach x, y, z sind bei einem beliebigen Werte von $\varkappa$ stetig, aber die Lösung

$$U = \frac{P}{D}$$

wird unendlich wachsen, wenn $\varkappa$ sich einer Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert und nicht etwa gleichzeitig auch P zu null konvergiert.

Was geschieht nun mit P, wenn $\varkappa$ sich einer der Wurzeln[1])

$$\varkappa_1 \quad \varkappa_2 \ldots \varkappa_p$$

der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert? Es folgt aus 28):

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta w & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ \Delta u_0 & -\varkappa & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -\varkappa & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\varkappa \end{vmatrix},$$

somit

29[a]) $$\Delta P - \mu^2 P = 0, \quad \text{im Aussenraume,}$$

und:

$$\Delta P + k^2 P$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 f - a_1 u_0 - a_2 u_1 - \cdots - a_p u_{p-1} & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ f + \varkappa u_0 & -\varkappa & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -u_0 + \varkappa u_1 & 1 & -\varkappa & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ -u_{p-2} + \varkappa u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\varkappa \end{vmatrix}$$

oder:

29[b]) $$\Delta P + k^2 P = f \cdot D, \quad \text{im Innenraume.}$$

Lassen wir $\varkappa$ in eine der Wurzeln $\varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p$ der Gleichung $D = 0$ übergehen, so wird:

30) $$\begin{cases} \Delta P - \mu^2 P = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta P + k^2 P = 0 & \text{im Innenraume.} \end{cases}$$

P bleibt dabei nach wie vor mit seinen ersten Ableitungen nach x, y, z im ganzen Raume eindeutig und stetig und verschwindet im Unendlichen.

---

[1]) Es kommen dabei nur reelle, positive Wurzeln in betracht.

Definition. Wir sagen, eine mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutige und stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion Φ_j^μ ist eine der Oberfläche eines oder mehreren Teilchen entsprechende universelle Funktion bei absorbierendem Zwischenmedium, wenn Φ_j^μ die Bedingungen erfüllt:

$$31)\quad \begin{cases} \Delta \Phi_j^\mu - \mu^2 \Phi_j^\mu = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta \Phi_j^\mu + k_j^2 \Phi_j^\mu = 0 & \text{im Innenraume;} \end{cases}$$

k_j^2 bezeichnen wir als die der universellen Funktion Φ_j^μ zugehörige Zahl.

Wir können, wenn wir noch die Festsetzung:

$$32)^{1)}\quad \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau + \mu^2 \int_a (\Phi_j^\mu)^2 d\tau = 1$$

hinzufügen,[2]) folgendes aussagen:

Für $\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_p$ wird P entweder identisch null oder eine universelle Funktion Φ_j^μ, multipliziert mit einer von null verschiedenen Konstanten.

Die Wurzeln $\varkappa_j$, denen universelle Funktionen Φ_j^μ entsprechen, können nicht Doppelwurzeln der Gleichung $D = 0$ sein. Für eine solche wäre:

$$\frac{dD}{d\varkappa} = 0,$$

somit nach 30):

---

[1]) Oder, was dasselbe ist:

$$32')\quad k_j^2 \int_i (\Phi_j^\mu)^2 \, d\tau = 1.$$

[2]) Auch für die einfachen universellen Funktionen erweist sich diese Festsetzung mit Rücksicht auf die physikalischen Anwendungen am zweckmässigsten; ich möchte daher die 2. Gleichung 61) meiner p. 385 zitierten Arbeit durch die Gleichung:

$$\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = 1$$

ersetzen, entsprechend der Definition in den Comptes rendus 136, p. 31, 1903.

$$\left.\begin{array}{l} k_j^2 P_j = -\Delta P_j, \\ \Delta\left(\frac{d P_j}{d\varkappa}\right) = -k_j^2 \frac{d P_j}{d\varkappa} - P_j, \end{array}\right\} \text{ im Innenraume;}$$

multipliziert man diese beiden Gleichungen und integriert über i, so folgt mit Rücksicht auf:

$$\int_i [P_j \Delta\left(\frac{dP_j}{d\varkappa}\right) - \frac{dP_j}{d\varkappa}\Delta P_j]\, d\tau = -\int_a [P_j \Delta \frac{dP_j}{d\varkappa} - \frac{dP_j}{d\varkappa} d P_j]\, d\tau,$$

$$= -\int_a [P_j \cdot \mu^2 \frac{dP_j}{d\varkappa} - \frac{dP_j}{d\varkappa} \cdot \mu^2 P_j]\, d\tau,$$

$$= 0,$$

dass:

$$\int_i P_j \Delta P_j\, d\tau = 0,$$

oder:

$$\int_i P_j^2\, d\tau = 0,$$

d. h.

$$P_j \equiv 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist, dass einer Doppelwurzel $\varkappa_j$ keine universelle Funktion Φ_j'' entspricht.

Es ist ferner leicht zu sehen, dass die Wurzeln $\varkappa_j$ der Gleichung $D = 0$, denen identisch verschwindende P_j entsprechen, nicht Pole für die Lösung:

$$U = \frac{P}{D}$$

sein können, da in diesem Falle — wenn das betreffende $\varkappa_j$ eine m fache Wurzel der Gleichung $D = 0$ ist ($m = 1, 2 \ldots p$):

$$D = \frac{dD}{d\varkappa} = \frac{d^2 D}{d\varkappa^2} = \ldots = \frac{d^{m-1} D}{d\varkappa^{m-1}} = 0,\ \frac{d^m D}{d\varkappa^m} \neq 0,$$

$$U = \frac{\frac{d^m P}{d\varkappa^m}}{\frac{d^m D}{d\varkappa^m}} \quad ^{1)}$$

[1]) Für $m = 1$ folgt das unmittelbar; für $m = 2$ folgt aus 29) und $\frac{dD}{d\varkappa} = 0$:

und $\frac{d^m P}{d\varkappa^m}$ an den Stellen $\varkappa = \varkappa_j$ stetig ist. Wir können unser bisheriges Resultat in folgender Weise aussprechen:

I. Wählt man die Zahl p gross genug und setzt man:

$$\varkappa \equiv k^2 + \mu^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

voraus, so kann man stets eine (für jeden Wert $\mu^2 \leq \varkappa < \sqrt[3]{p^2}$) mit ihren ersten Ableitungen nach x, y, z eindeutige und stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion:

$$V(\varkappa, x, y, z)$$

so finden, dass der Ausdruck:

$$33) \qquad U = \frac{V(\varkappa, x, y, z)}{(\varkappa - \varkappa_1)(\varkappa - \varkappa_2)\ldots(\varkappa - \varkappa_n)}, \quad (0^*) \leq n \leq p)$$

eine Lösung des Problems:

$$34) \qquad \begin{cases} \varDelta\, U + k^2\, U = f & \text{im Innenraume,} \\ \varDelta\, U - \mu^2\, U = 0 & \text{im Aussenraume} \end{cases}$$

darstellt, wo $\varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ bestimmte, von einander verschiedene positive Zahlen ($\mu^2 \leq \varkappa_j < \sqrt[3]{p^2}$) sind, und dass für

$$\varkappa = \varkappa_j \quad (j = 1, 2 \ldots n)$$

V (abgesehen von einem von null verschiedenen, konstanten Faktor) in eine universelle Funktion Φ_j^μ mit zugehöriger Zahl $k_j^2 = \varkappa_j - \mu^2$ übergeht.

Wir haben diesen Satz unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Funktionen (7)

$$\frac{dP}{d\varkappa} = 0, \text{ somit } U = \frac{\frac{d^2 P}{d\varkappa^2}}{\frac{d^2 D}{d\varkappa^2}}$$

und so fort, für $m = 3, 4 \ldots p$.

*) Im Falle $n = 0$ soll die rechte Seite einfach $V(\varkappa, x, y, z)$ sein.

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; u_3 \ldots$$

keine Relation von der Form zulassen:

35) $$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p \equiv 0,$$

wo p irgend eine endliche Zahl, $\beta_0 \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p$ reelle Konstanten vorstellen, die der Gleichung:

36) $$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügen.

Wir werden in dem folgenden Paragraphen zeigen, dass auch in diesen singulären Fällen der Satz I richtig bleibt.

§ 5.

Wir wollen zunächst zeigen, dass man aus 35) stets eine Relation:

37) $$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \equiv 0$$

ableiten kann, wo $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{p-1}$ reelle Konstanten vorstellen, die der Gleichung:

38) $$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 = 1$$

genügen, in folgenden drei Fällen:

1. Wenn die Gleichung:

39) $$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \beta_2 x^{p-2} + \cdots + \beta_p = 0$$

eine imaginäre Wurzel

$$x_1 + i x_2 \quad (x_2 \neq 0)$$

besitzt;

2. wenn diese Gleichung eine reelle Wurzel $\leq \mu^2$ hat;

3. wenn diese Gleichung eine Doppelwurzel besitzt.

In der Tat, berechnen wir die $p + 2$ Konstanten

$$\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_{p-1} \, x \, a$$

so, dass:

40)
$$\begin{cases} a\gamma_0 &= \beta_0, \\ a\gamma_1 &= \beta_1 + a x \gamma_0, \\ a\gamma_2 &= \beta_2 + a x \gamma_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a\gamma_{p-1} &= \beta_{p-1} + a x \gamma_{p-2}, \qquad (a \neq 0) \\ 0 &= \beta_p + a x \gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 &= 1, \end{cases}$$

was auf p Weisen möglich ist, entsprechend den p Wurzeln der Gleichung 39), so folgt aus 35):

41ᵃ)
$$\begin{cases} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \\ = x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p) \end{cases}$$

und hieraus

41ᵇ)
$$\begin{aligned} &\Delta(\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1}) \\ &= -(x - \mu^2)(\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1}) \end{aligned} \quad \text{(im Innenraume).}$$

Hat die Gleichung 39) eine imaginäre Wurzel

$$x = x_1 + i x_2 \quad (x_2 \neq 0),$$

so setzen wir:

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = X + iY,$$

multiplizieren 41ᵇ) mit $(X - iY)$ und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\begin{aligned} -\int_{i+a} \Big[&\frac{\partial(X - iY)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(X + iY)}{\partial x} + \frac{\partial(X - iY)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(X + iY)}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial(X - iY)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(X + iY)}{\partial z} \Big] d\tau \end{aligned}$$

$$-\mu^2 \int_a (X - iY)(X + iY)\, d\tau = -(x_1 + i x_2 - \mu^2) \int_i (X^2 + Y^2)\, d\tau,$$

somit, da die linke Seite reell ist

$$\int_i (X^2 + Y^2)\, d\tau = 0, \quad \text{falls } x_2 \neq 0,$$

oder:

$$X = Y \equiv 0,$$

42)
$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \equiv 0.$$

Hat die Gleichung 39) eine reelle Wurzel $x_0 \overline{<} \mu^2$, so dass:

$$x_0 - \mu^2 = -a^2 \quad (a^2 \overline{\gtrless} 0),$$

so folgt aus 41[b]), wenn wir mit

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \equiv X$$

multiplizieren und über den Innenraum integrieren:

$$-\int\limits_{i+a} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2\right]^2 d\tau - \mu^2 \int\limits_a X^2 \, d\tau$$
$$= a^2 \int\limits_i X^2 \, d\tau,$$

und hieraus wieder

$$X \equiv 0,$$

also 42).

Hat schliesslich die Gleichung 39) eine Doppelwurzel:

43) $$x = \bar{x},$$

so können wir die p Konstanten $\delta_0 \, \delta_1 \ldots \delta_{p-2} \, b$ so bestimmen, dass sie zusammen mit $\bar{x}$ die Gleichungen erfüllen:

44) $$\begin{cases} b\,\delta_0 = \gamma_0 \\ b\,\delta_1 = \gamma_1 + b\,\bar{x}\,\delta_0, \\ b\,\delta_2 = \gamma_2 + b\,\bar{x}\,\delta_1, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b\,\delta_{p-2} = \gamma_{p-2} + b\,\bar{x}\,\delta_{p-3}, \quad (b \neq 0) \\ 0 = \gamma_{p-1} + b\,\bar{x}\,\delta_{p-2}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_{p-2}^2 = 1, \end{cases}$$

und wir können die Gleichung 41[a]) in der Form schreiben:

45) $$F - 2\,\bar{x}\,F_1 + \bar{x}^2\,F_2 = 0,$$

wo:

46) $$\begin{cases} F = \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\ F_1 = \delta_0 u_1 + \delta_1 u_2 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-1}, \\ F_2 = \delta_0 u_2 + \delta_1 u_3 + \cdots + \delta_{p-2} u_p. \end{cases}$$

Es folgt aus 45) im Innenraume:

$$\Delta F - 2\bar{x}(\mu^2 F_1 - F) + \bar{x}^2(\mu^2 F_2 - F_1) = 0$$

oder, da wiederum nach 45)

$$\bar{x}^2 F_2 = -(F - 2\bar{x} F_1)$$

ist:

$$\Delta F - \mu^2 F + 2\bar{x} F - \bar{x}^2 F_1 = 0;$$

diese Gleichung multiplizieren wir mit $(-F_1)\,d\tau$ und integrieren über den Innenraum, dann ergibt sich:[1])

$$\int_i (F^2 - 2\bar{x} F F_1 + \bar{x}^2 F_1^2)\,d\tau = 0$$

und hieraus:

47) $$F - \bar{x} F_1 = 0,$$

und das ist eine Gleichung von der Form:

$$\Gamma_0 u_0 + \Gamma_1 u_1 + \cdots + \Gamma_{p-1} u_{p-1} = 0,$$

wobei man die $\Gamma_0 \Gamma_1 \ldots \Gamma_{p-1}$ noch der Bedingung:

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \cdots + \Gamma_{p-1}^2 = 1$$

unterwerfen kann.

Wir sind damit zu dem Resultat gelangt, dass man eine Gleichung von der Form 35) stets auf eine Gleichung:

48) $$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m \equiv 0, \quad (m \leqq p)$$

reduzieren kann, wo die $\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_m$ reelle Konstanten vorstellen, die der Gleichung:

49) $$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_m^2 = 1$$

genügen und so beschaffen sind, dass die Gleichung:

50) $$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m = 0$$

m reelle, einfache Wurzeln besitzt, die den Ungleichungen:

51) $$\mu^2 < \frac{1}{x_j}, \quad (j = 1, 2 \ldots m)$$

in strengem Sinne genügen.

---

[1]) Mit Rücksicht auf:

$$\int_i F_1 \Delta F\,d\tau = \int_i F \Delta F_1\,d\tau = \int_i F(\mu^2 F_1 - F)\,d\tau.$$

Da hiernach die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

können wir mit Hilfe der m Gleichungen:

$$52)\quad \begin{cases} u_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_m, \\ u_1 = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_m U_m, \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_{m-1} = x_1^{m-1} U_1 + x_2^{m-1} U_2 + \dots + x_m^{m-1} U_m \end{cases}$$

die Funktionen $U_1\, U_2 \dots U_m$ linear durch die $u_0\, u_1 \dots u_{m-1}$ definieren. Aus 52) und 48) folgt nun, da $x_1\, x_2 \dots x_m$ die Gleichung 50) erfüllen, auch:

$$u_m = x_1^m U_1 + x_2^m U_2 + \dots + x_m^m U_m,$$

so dass wir $U_1\, U_2 \dots U_m$ auch durch die m Gleichungen:

$$53)\quad u_j = x_1^j U_1 + x_2^j U_2 + \dots + x_m^j U_m \quad (j = 1, 2 \dots m)$$

definieren können.

Nach 53) ist im Innenraume:

$$54^a)\quad \mu^2 u_j - u_{j-1} = x_1^j \Delta U_1 + x_2^j \Delta U_2 + \dots + x_m^j \Delta U_m \quad (j = 1, 2 \dots m).$$

Andererseits folgt aus 53) und den Gleichungen 52), die wir auch so schreiben können:

$$u_{j-1} = x_1^{j-1} U_1 + x_2^{j-1} U_2 + \dots + x_m^{j-1} U_m \quad (j = 1, 2 \dots m):$$

$$54^b)\quad \mu^2 u_j - u_{j-1} = x_1^j \left(\mu^2 - \frac{1}{x_1}\right) U_1 + x_2^j \left(\mu^2 - \frac{1}{x_2}\right) U_2 + \dots + x_m^j \left(\mu^2 - \frac{1}{x_m}\right) U_m,$$

und durch Vergleichung von 54^a) und 54^b):

55) $$0 = x_1^j\left\{\varDelta U_1 - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_1}\right) U_1\right\} + x_2^j\left\{\varDelta U_2 - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_2}\right) U_2\right\}$$
$$+ \cdots + x_m^j\left\{\varDelta U_m - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_m}\right) U_m\right\},$$
$$(j = 1, 2 \ldots m), \quad \text{im Innenraume.}$$

Das sind m lineare, homogene Gleichungen für die m Grössen:

$$\varDelta U_1 - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_1}\right) U_1, \ \ldots, \quad \varDelta U_m - \left(\mu^2 - \frac{1}{x_m}\right) U_m,$$

es folgt somit, da die Determinante dieser Gleichungen $\neq 0$ ist, einzeln:

56) $\varDelta U_j + k_j^2 U_j = 0, \quad (j = 1, 2 \ldots m)$ (im Innenraume)

wobei

57) $$k_j^2 = \frac{1}{x_j} - \mu^2, \quad (j = 1, 2 \ldots m)$$

gesetzt ist.

Damit ist bewiesen, dass wir (mit Rücksicht auf die erste Gleichung 52)) u_0 in der Form darstellen können:

58) $u_0 = C_1 \Phi_1^\mu + C_2 \Phi_2^\mu + \cdots + C_n \Phi_n^\mu, \quad (0 \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} m \overline{\gtrless} p)$

wo $\Phi_1^\mu \ldots \Phi_n^\mu$ universelle Funktionen in dem S. 397 eingeführten Sinne sind, $C_1\, C_2 \ldots C_n$ Konstanten.

Aus 58) folgt im Innenraume:

$$\varDelta u_0 \equiv \mu^2 u_0 + f = -\sum_1^n {}^j k_j^2 C_j \Phi_j^\mu,$$

also:

59) $$f = -\sum_1^n {}^j (k_j^2 + \mu^2) C_j \Phi_j^\mu,$$

und die Funktion:

60) $$U = -\sum_1^n {}^j \frac{k_j^2 + \mu^2}{k^2 - k_j^2} C_j \Phi_j^\mu, \quad (0 \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} p)$$

wird bei unserer Voraussetzung 35) offenbar eine Lösung des Problems:

$$61)\qquad \begin{cases} \Delta U + k^2 U = f, & \text{im Innenraume,} \\ \Delta U - \mu^2 U = 0, & \text{im Aussenraume.} \end{cases}$$

Dieses Resultat 60) ordnet sich als Spezialfall dem Satze I unter, so dass dieser Satz I jetzt ohne jede Einschränkung bewiesen ist.[1])

II. Abschnitt.

Über die Reihenentwickelungen nach den neuen universellen Funktionen Φ_j^μ.

§ 1.

Wir werden zeigen, dass man jedes Raumintegral:

$$\int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

in dem f eine mit ihren ersten Ableitungen im Innenraum eindeutige und stetige Funktion vorstellt, in eine nach den Φ_j^μ fortschreitende Reihe verwandeln kann:

$$\int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = C_1 \Phi_1^\mu + C_2 \Phi_2^\mu + \cdots$$

genau, wie dies — Spezialfall $\mu = 0$ — für das Newtonsche Potential:

$$\int_i f \frac{d\tau}{r} = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \cdots$$

($\Phi_1 \Phi_2 \ldots$ gewöhnliche universelle Funktionen) möglich ist.

Wir müssen, um diese Untersuchung streng durchzuführen, zunächst einige Sätze über die Φ_j^μ vorausschicken:

Hilfssatz I. Die einer universellen Funktion Φ_j^μ zugehörige Zahl k_j^2 muss reell und > 0 sein.

---

[1]) Ich weise hier noch kurz darauf hin, dass sich zwei Lösungen des Problemes 61) nur um eine universelle Funktion Φ_i^μ unterscheiden können, das Problem ist daher stets eindeutig, wenn sich zu k^2 keine zugehörige universelle Funktion konstruieren lässt.

Es folgt nämlich aus

$$\Delta \Phi_j^\mu = -k_j^2 \Phi_j^\mu \quad \text{im Innenraume,}$$
$$\Delta \Phi_j^\mu = \mu^2 \Phi_j^\mu \quad \text{im Aussenraume:}$$

$$\int\limits_{i+a} \left[\left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{d z} \right)^2 \right] d\tau + \mu^2 \int\limits_a (\Phi_j^\mu)^2 \, d\tau$$
$$= k_j^2 \int\limits_i (\Phi_j^\mu)^2 \, d\tau.$$

Wäre k_j^2 imaginär oder reell $\overline{\overline{<}}\ 0$, so würde aus dieser Formel stets

$$\Phi_j^\mu \equiv 0$$

folgen.

Hilfssatz 2. Ist p eine genügend grosse Zahl, so ist die Zahl der überhaupt möglichen, der Fläche ω entsprechenden universellen Funktionen Φ_j^μ mit zugehörigen Zahlen

$$k_j^2 < \sqrt[3]{p^2} - \mu^2$$

jedenfalls kleiner oder höchstens $= p$.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes bemerken wir zunächst, dass die Lösung des Problems:

$$1) \qquad \begin{cases} \Delta U - \mu^2 U = \quad 0, & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta U + k^2 U = -\Phi_j^\mu & \text{im Innenraume,} \end{cases}$$

wenn also $(-f)$ eine gegebene universelle Funktion mit zugehöriger Zahl k_j^2 darstellt, durch die Formel:

$$2) \qquad U = u_0 + \varkappa\,{}^{*)}\, u_1 + \varkappa^2 u_2 + \cdots = \frac{\Phi_j^\mu}{k_j^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_j^2)$$

gegeben ist.

Denn es ist in diesem Falle:

---

*) $\varkappa = k^2 + \mu^2$.

$$u_0 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \Phi_j^\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \frac{\Phi_j^\mu}{k_j^2 + \mu^2}$$

$$u_1 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \Phi_j^\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \frac{\Phi_j^\mu}{(k_j^2 + \mu^2)^2}$$

$$u_2 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \Phi_j^\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \frac{\Phi_j^\mu}{(k_j^2 + \mu^2)^4}$$

. . . .

In analoger Weise wird das Problem:

3) $$\begin{cases} \Delta U - \mu^2 U = 0, & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta U + k^2 U = - \sum_1^p {}^j a_j \Phi_j & \text{im Innenraume,} \end{cases}$$

wenn $\Phi_1^\mu \Phi_2^\mu \dots \Phi_p^\mu$ p gegebene universelle Funktionen mit zugehörigen Zahlen $k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2$; $a_1 a_2 \dots a_p$ Konstanten vorstellen, durch die Funktion:

4) $$U = u_0 + \varkappa u_1 + \varkappa^2 u_2 + \cdots = \sum_1^p {}^j \frac{a_j \Phi_j^\mu}{k_j^2 - k^2}$$

gelöst, solange k^2 kleiner als die kleinste der Zahlen $k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2$ ist; $u_0 u_1 u_2 \dots$ sind in 4) durch die Gleichungen:

$$u_0 = + \frac{1}{4\pi} \int_i \sum_1^p {}^j a_j \Phi_j^\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

$$u_1 = + \frac{1}{4\pi} \int_i u_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

$$u_2 = + \frac{1}{4\pi} \int_i u_1 \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

. . . .

gegeben.

Nach einem früheren Resultate kann man nun, bei genügend grossem p, $a_1 a_2 \dots a_p$ so wählen, dass

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

und die Reihe 4) jedenfalls für ein beliebiges

$$\varkappa < \sqrt[3]{(p-1)^2}$$

konvergent ist. Wären nun alle

$$k_j^2 < \sqrt[3]{(p-1)^2} - \mu^2,$$

so würde die Gleichung:

$$U = \sum_1^p j \frac{a_j \Phi_j^\mu}{k_j^2 - k^2}$$

diesem Resultate widersprechen, es muss somit wenigstens eines der $k_j^2 > \sqrt[3]{(p-1)^2} - \mu^2$ sein, wenn $\Phi_1^\mu \Phi_2^\mu \ldots \Phi_p^\mu$ p linear unabhängige universelle Funktionen vorstellen, und wenn p eine genügend grosse Zahl ist.

Wir können dem Hilfssatz 2 sofort die folgenden Zusätze hinzufügen:

Zusatz 1. Ist m eine gegebene endliche, positive Zahl, so kann man aussagen, dass die Zahl der überhaupt möglichen, linear unabhängigen universellen Funktionen Φ_j^μ mit zugehörigen Zahlen $k_j^2 < m$ endlich ist.

Zusatz 2. Die Zahl der möglichen, linear unabhängigen universellen Funktionen Φ_j^μ mit derselben zugehörigen, endlichen Zahl k_j^2 ist stets endlich.

Hilfssatz 3. Jede universelle Funktion Φ_j^μ mit zugehöriger Zahl k_j^2 entspricht der Ungleichung:

$$5) \qquad (\Phi_j^\mu)^2 \overline{\underset{<}{=}}\, a \frac{(k_j^2 + \mu^2)^2}{k_j^2},$$

wo a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche und von μ^2 abhängende Konstante ist.

Es ist in der Tat jedes:

$$6) \qquad \Phi_j^\mu = \frac{k_j^2 + \mu^2}{4\pi} \int_i \Phi_j^\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

somit:

$$7) \qquad (\Phi_j^\mu)^2 \overline{\underset{<}{=}} \left\{\frac{k_j^2 + \mu^2}{4\pi}\right\}^2 \int_i \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} d\tau \int_i (\Phi_j^\mu)^2 d\tau;$$

nun ist:

$$\int_i (\Phi_j^\mu)^2 \, d\tau = -\frac{1}{k_j^2} \int_i \Phi_j^\mu \, \Delta \, \Phi_j^\mu \, d\tau,$$

$$= \frac{1}{k_j^2} \left[\int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \right.$$

$$\left. + \mu^2 \int_a (\Phi_j^\mu)^2 \, d\tau \right],$$

$$\leqq \frac{1}{k_j^2} \text{*)};$$

nunmehr folgt die Behauptung 5) unmittelbar aus 7).

Hilfssatz 4. Sind Φ_j^μ und $\Phi_\varkappa^\mu$ zwei universelle Funktionen mit den von einander verschiedenen zugehörigen Zahlen k_j^2 und $k_\varkappa^2$, so ist:

8) $$\int_i \Phi_j^\mu \, \Phi_\varkappa^\mu \, d\tau = 0, \quad (k_j^2 \neq k_\varkappa^2).$$

Zum Beweise multiplizieren wir die Gleichung:

$$\Delta \, \Phi_j^\mu = - k_j^2 \, \Phi_j^\mu \quad \text{im Innenraume}$$

mit $(-\Phi_\varkappa^\mu)$ und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$k_j^2 \int_i \Phi_j^\mu \, \Phi_\varkappa^\mu \, d\tau = - \int_i \Phi_\varkappa^\mu \, \Delta \, \Phi_j^\mu \, d\tau,$$

$$= - \int_i \Phi_j^\mu \, \Delta \, \Phi_\varkappa^\mu \, d\tau,$$

$$= k_\varkappa^2 \int_i \Phi_j^\mu \, \Phi_\varkappa^\mu \, d\tau,$$

und hieraus die Behauptung 8).

Dieser Hilfssatz 4 gestattet den für uns wichtigen Zusatz. Ist die Entwickelung einer gegebenen, mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutigen und stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion F nach universellen Funktionen Φ_j^μ:

9) $$F = C_1 \, \Phi_1^\mu + C_2 \, \Phi_2^\mu + \cdots$$

---

*) Cf. Gleichung 32, p. 397.

überhaupt möglich, so haben die Koeffizienten C_j die Werte:

10) $$C_j = k_j^2 \int_i F \cdot \Phi_j^{\mu}\, d\tau.$$

Wir multiplizieren zum Beweise die Formel 9) mit Φ_j^{μ} und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\int_i F \cdot \Phi_j^{\mu}\, d\tau = C_j \int_i (\Phi_j^{\mu})^2\, d\tau,$$

$$= \frac{C_j}{k_j^2} \quad \text{(cf. 32') p. 397).}$$

Jetzt können wir daran gehen, auch die Möglichkeit der Entwickelung 9) nachzuweisen, wenn:

11) $$F = \int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau$$

und f eine beliebige gegebene, im Innenraume mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion darstellt.

In diesem Falle werden wir übrigens den Gleichungen 10) noch eine etwas einfachere Form geben können:

Es ist dann:

$$\int_i F \cdot \Phi_j^{\mu}\, d\tau = -\frac{1}{k_j^2} \int_i F \Delta \Phi_j^{\mu}\, d\tau,$$

$$= -\frac{1}{k_j^2} \int_i \Phi_j^{\mu} \Delta F\, d\tau,$$

$$= -\frac{1}{k_j^2} \int_i \Phi_j^{\mu} (\mu^2 F - 4\pi f)\, d\tau,$$

somit:

$$(k_j^2 + \mu^2) \int_i F \cdot \Phi_j^{\mu}\, d\tau = 4\pi \int_i f \cdot \Phi_j^{\mu}\, d\tau$$

und:

12) $$C_j = 4\pi \frac{k_j^2}{k_j^2 + \mu^2} \int_i f \cdot \Phi_j^{\mu}\, d\tau.$$

§ 2.

Um die Möglichkeit der Entwickelung 9) in dem Falle 11) zu beweisen, gehen wir wieder auf die im I. Abschnitt gegebene Lösung des Problemes:

$$\Delta U - \mu^2 U = 0 \quad \text{im Aussenraume,}$$
$$\Delta U + k^2 U = f \quad \text{im Innenraume}$$

zurück, die wir (bei genügend grossem p) in der Form

$$U = \frac{V(k^2 + \mu^2, x, y, z)}{(k^2 - k_1^2) \ldots (k^2 - k_n^2)}, \quad (0 \overline{\overline{<}} n \overline{\overline{<}} p)$$

angeben können, wenn

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2} - \mu^2,$$

und wo V für jedes solche k^2 mit seinen ersten Ableitungen nach x, y, z im ganzen Raume eindeutig und stetig ist, im Unendlichen verschwindet und für

$$k^2 = k_j^2 \quad (j = 1, 2 \ldots n)$$

in eine universelle Funktion Φ_j^μ mit zugehöriger Zahl k_j^2 übergeht.

Wir setzen nun:

13) $$R_p = f - (c_1 \Phi_1^\mu + c_2 \Phi_2^\mu + \cdots + c_p \Phi_p^\mu),$$

wo:

14) $$\begin{cases} c_j = k_j^2 \int_i f \Phi_j^\mu \, d\tau, & j = 1, 2 \ldots n \\ c_j \Phi_j^\mu = 0, & j = n + 1, n + 2, \ldots p. \end{cases}$$

Wir werden von dem Ausdruck

$$\int_i R_p^2 \, d\tau$$

nachweisen, dass er durch Vergrösserung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Lösung V des folgenden Problems:

$$15)\qquad \begin{cases} \Delta V - \mu^2 V = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta V + k^2 V = R_p & \text{im Innenraume,} \end{cases}$$

wir werden sehen, dass die Reihe:

$$16)[1]\qquad V = v_0 + \varkappa v_1 + \varkappa^2 v_2 + \cdots,$$

in der:

$$17)\qquad \begin{cases} v_0 = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau, \\ v_j = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_i v_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau, \quad (j = 1, 2 \,..) \end{cases}$$

für jedes

$$\varkappa < \sqrt[3]{p^2}$$

konvergent ist und die Lösung des Problems 15) darstellt.

Wir können — man vergl. den Beweis des Hilfssatzes 2 S. 407 — die Lösung des Problems 15) zunächst in der Form darstellen:

$$18)\qquad V = U + \sum_1^p {}_j \frac{c_j \Phi_j^\mu}{k_j^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_1^2),$$

wenn k_1^2 das kleinste der $k_1^2\, k_2^2 \ldots k_n^2$ ist, U unsere frühere Reihe:

$$19)\qquad U = u_0 + \varkappa u_1 + \varkappa^2 u_2 + \cdots,$$

in der:

$$20)\qquad \begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau, \\ u_j = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_i u_{j-1} \frac{e^{-\mu r}}{r}\, d\tau, \quad (j = 1, 2 \,..). \end{cases}$$

Für einen genügend kleinen Wert von $k_1^2 - k^2$ ist nun nach unseren früheren Resultaten (vergl. Satz I S. 399):

$$21)\qquad U = \frac{\gamma_1 \Phi_1^\mu}{k_1^2 - k^2} + U',$$

wo γ_1 eine Konstante, U' eine Grösse darstellt, die auch für $\lim (k_1^2 - k^2) = 0$ endlich bleibt; es folgt somit aus 18):

[1]) $\varkappa = k^2 + \mu^2$.

$$V = (\gamma_1 + c_1)\frac{\Phi_1^{\mu}}{k_1^2 - k^2} + U' + \sum_2^p j \frac{c_j \Phi_j}{k_j^2 - k^2}, \quad (k^2 < k_1^2)$$

oder:

22) $$(k_1^2 - k^2)\, V = (\gamma_1 + c_1)\, \Phi_1^{\mu} + \varepsilon, \quad (k^2 < k_1^2),$$

wo ε durch Verkleinerung von $(k_1^2 - k^2)$ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Multiplizieren wir nun die zweite Gleichung 15) mit Φ_1^{μ}, so folgt durch Integration über den Innenraum:

$$\int_i \Phi_1^{\mu}(\Delta V + k^2 V)\, d\tau = \int_i f \cdot \Phi_1^{\mu}\, d\tau - \frac{c_1}{k_1^2} = 0 \quad \text{(nach 14))}$$

oder:

23a) $$\int_i V(\Delta \Phi_1^{\mu} + k^2 \Phi_1^{\mu})\, d\tau = 0;$$

andererseits ist auch nach der Grundeigenschaft der Φ_j^{μ}:

23b) $$\int_i V(\Delta \Phi_1^{\mu} + k_1^2 \Phi_1^{\mu})\, d\tau = 0,$$

somit:

24) $$(k_1^2 - k^2) \int_i V \Phi_1^{\mu}\, d\tau = 0.$$

Diese Gleichung wird gelten, wie nahe wir auch k^2 an k_1^2 heranrücken lassen. Berücksichtigen wir nun in 24) die Relation 22), so folgt durch Übergang zur Grenze $\lim (k_1^2 - k^2) = 0$:

$$\gamma_1 + c_1 = 0$$

und:

25) $$V = U' + \sum_2^p j \frac{c_j \Phi_j^{\mu}}{k_j^2 - k^2},$$

wo U' endlich bleibt, wie nahe wir auch k^2 an k_1^2 heranrücken lassen.

Damit ist gezeigt, dass $k^2 = k_1^2$ kein Pol der Lösung V des Problemes 15) ist, die Reihe 16) somit einen Konvergenzradius

$$> k_1^2 + \mu^2$$

hat.

In genau analoger Weise folgt jetzt successive, dass auch die Stellen

$$k^2 = k_2^2,\ k_3^2, \ldots k_n^2$$

nicht Pole der Lösung V des Problemes 15) sein können, die Reihe 16) somit einen Konvergenzradius

$$\overline{>} \sqrt[3]{p^2}$$

besitzt und demgemäss für alle

$$\varkappa < \sqrt[3]{p^2}$$

die Lösung des Problemes 15) darstellt.

Da die aufeinander folgenden Funktionen

$$R_p,\ v_0,\ v_1,\ v_2 \ldots$$

die Eigenschaft haben:

$$\frac{\int\limits_i v_0^2\, d\tau}{\int\limits_i R_p^2\, d\tau} \overline{<} \frac{\int\limits_i v_1^2\, d\tau}{\int\limits_i v_0^2\, d\tau} \overline{<} \frac{\int\limits_i v_2^2\, d\tau}{\int\limits_i v_1^2\, d\tau} \overline{<} \cdots \quad \text{(vergl. S. 391)},$$

so ergibt sich:

$$\frac{\int\limits_i v_0^2\, d\tau}{\int\limits_i R_p^2\, d\tau} \overline{<} \frac{\int\limits_i v_1^2\, d\tau}{\int\limits_i v_0^2\, d\tau} \overline{<} \frac{\int\limits_i v_2^2\, d\tau}{\int\limits_i v_1^2\, d\tau} \overline{<} \cdots \overline{<} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}}, \tag{26}$$

denn sonst würde die Reihe 16) bereits für Werte von $\varkappa$

$$< \sqrt[3]{p^2}$$

divergieren. Im besonderen folgt aus 26):

$$\int\limits_i v_0^2\, d\tau \overline{<} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}} \cdot \int\limits_i R_p^2\, d\tau. \tag{27}$$

Andererseits haben wir nach der ersten Gleichung 17)

$$R_p = \Delta v_0 - \mu^2 v_0, \quad \text{im Innenraume,}$$

somit:

$$\int_i R_p^2\, d\tau = \int_i R_p (\Delta v_0 - \mu^2 v_0)\, d\tau,$$

$$= -\int_{i+a} \left\{ \frac{\partial R_p}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial R_p}{\partial y}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial R_p}{\partial z}\frac{\partial v_0}{\partial z} + \mu^2 R_p v_0 \right\} d\tau,$$

wenn wir R_p [1]) auch im Aussenraume durch die Gleichung

28) $$R_p = f_a - (c_1 \Phi_1^\mu + c_2 \Phi_2^\mu + \cdots + c_p \Phi_p^\mu)$$

definieren und unter f_a die Lösung des Problemes:

29) $$\begin{cases} \Delta f_a - \mu^2 f_a = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ f_a = f & \text{an } \omega \end{cases}$$

verstehen.

Es folgt:

$$\left\{\int_i R_p^2\, d\tau\right\}^2 \overline{<} \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 R_p^2 \right\} d\tau$$

$$\cdot \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 v_0^2 \right\} d\tau$$

$$\overline{<} \int_i (-v_0 R_p)\, d\tau \cdot J_p,$$

wenn wir

30) $$J_p = \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 R_p^2 \right\} d\tau$$

setzen. Nun ist:

$$\int_i (-v_0) R_p\, d\tau \overline{<} \sqrt{\int_i v_0^2\, d\tau \cdot \int_i R_p^2\, d\tau},$$

$$\overline{<} \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \cdot \int_i R_p^2\, d\tau, \quad \text{(nach 27));}$$

wir können daher die Ungleichung vor 30) auch so schreiben:

31) $$\int_i R_p^2\, d\tau \overline{<} \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \cdot J_p,$$

---

[1]) Das durch 13) nur im Innenraume definiert ist.

und wir werden schliesslich beweisen, dass J_p auch bei unendlich wachsendem p stets unter einer endlichen Grenze bleibt.

Es ist nämlich nach 30), wenn wir für R_p seinen Wert 13) resp. 28) einsetzen:

$$J_p = \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau$$
$$+ c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_p^2$$
$$-2 \int_{i+a} \sum_1^p {}^j c_j \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial z} + \mu^2 f \Phi_j \right\} d\tau,$$

oder, da das in der dritten Zeile rechts stehende Integral

$$= \quad 2 \int_i \sum_1^p {}^j c_j f \Delta \Phi_j^\mu \, d\tau,$$
$$= -2 \sum_1^p {}^j c_j k_j^2 \int_i f \Phi_j^\mu \, d\tau,$$
$$= -2 \sum_1^p {}^j c_j^2$$

gesetzt werden kann:

$$32) \qquad J_p = \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau$$
$$- c_1^2 - c_2^2 - \cdots - c_p^2 .$$

J_p ist eine nach 30) stets positive Grösse, die nach 32) mit wachsendem p nur abnehmen kann; es ist:

$$33) \qquad J_p \overline{<} \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau$$

und nach 31):

$$34) \qquad \int_i R_p^2 \, d\tau \overline{<} \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \int_{i+a} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \mu^2 f^2 \right\} d\tau .$$

Das Integral rechts ist bei unseren Voraussetzungen über f eine bestimmte, endliche Grösse, und wir haben somit bewiesen, dass

$$\int_i R_p^2 \, d\tau$$

durch Vergrösserung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Da nun:

$$F = \int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = \int_i \sum_1^p{}^j c_j \Phi_j^\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau + \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

$$= C_1 \Phi_1^\mu + C_2 \Phi_2^\mu + \cdots + C_p \Phi_p^\mu + \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau,$$

wo:

$$C_j = 4\pi \frac{k_j^2}{k_j^2 + \mu^2} \int_i f \cdot \Phi_j^\mu \, d\tau, \quad j = 1, 2, 3 \ldots$$

und:

$$\text{abs.} \int_i R_p \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau \leqq \sqrt{\int_i R_p^2 \, d\tau \cdot \int_i \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} d\tau}$$

$$\leqq \text{endl. Konst.} \frac{1}{\sqrt[3]{p}},$$

so haben wir das folgende Resultat bewiesen:

II. Ist f mit seinen ersten Ableitungen im Innenraume eindeutig und stetig, so gilt stets die Reihenentwickelung:

$$\int_i f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau = C_1 \Phi_1^\mu + C_2 \Phi_2^\mu + \cdots, \tag{35}$$

wo:

$$C_j = 4\pi \frac{k_j^2}{k_j^2 + \mu^2} \int_i f \cdot \Phi_j^\mu \, d\tau, \quad j = 1, 2, 3, \cdots \tag{36}$$

Die $\Phi_1^\mu \Phi_2^\mu \ldots$ sind gerade die universellen Funktionen, welche sich nach dem Satze 1 bei der Lösung des Problemes:

$$\Delta U - \mu^2 U = 0 \quad \text{im Aussenraume,}$$
$$\Delta U + k^2 U = f \quad \text{im Innenraume}$$

konstruieren lassen.

III. Abschnitt.

Die einer Kugelfläche entsprechenden universellen Funktionen Φ_j^μ.

§ 1.

Die Differentialgleichungen der universellen Funktionen:

$$1)\quad \begin{cases} \Delta \Phi_j^\mu - \mu^2 \Phi_j^\mu = 0 & \text{im Aussenraume,} \\ \Delta \Phi_j^\mu + k_j^2 \Phi_j^\mu = 0 & \text{im Innenraume} \end{cases}$$

gehen durch die Transformation in sphärische Polarkoordinaten:

$$2)\quad \begin{cases} x = r\cos\Theta, \\ y = r\sin\Theta\cos\varphi, \\ z = r\sin\Theta\sin\varphi \end{cases}$$

in die folgenden Gleichungen über:

$$3)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 \Phi^\mu}{\partial\varphi^2} \\ \qquad - \mu^2 r^2 \Phi_j^\mu = 0, \quad \text{im Aussenraume,} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial \Phi_j^\mu}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 \Phi_j^\mu}{\partial\varphi^2} \\ \qquad + k_j^2 r^2 \Phi_j^\mu = 0, \quad \text{im Innenraume.} \end{cases}$$

Wenn wir uns jetzt auf den Fall beschränken, dass ω eine Kugelfläche vom Radius R um den Anfangspunkt ist, können wir sagen: die 1. Gleichung 3) muss für

$$r > R,$$

die 2. Gleichung 3) für

$$r < R$$

erfüllt sein. Da die Φ_j^μ, wie wir wissen, im ganzen Raume mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, so sind sie für jede Kugelfläche vom Radius r nach Kugelfunktionen entwickelbar:

4) $$\Phi_{\lambda}^{\mu} = \sum_{0}^{\infty} {}^{j} f_j(r)\, Y_j(\Theta, \varphi),$$

wobei die Y_j der bekannten Differentialgleichung der Kugelfunktionen:

5) $$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial Y_j}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 Y_j}{\partial\varphi^2} + j(j+1)\, Y_j = 0$$

genügen.

Setzen wir die Reihenentwickelung 4) für Φ_j^{μ} in den Gleichungen 3) ein,[1]) dann folgt mit Rücksicht auf 5):

6) $$\begin{cases} \sum_{0}^{\infty} {}^{j}\, Y_j\left\{\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_j') - j(j+1) f_j\right] - \mu^2 f_j\right\} = 0, & (r > R), \\ \sum_{0}^{\infty} {}^{j}\, Y_j\left\{\frac{1}{r_2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_j') - j(j+1) f_j\right] + k_i^2 f_j\right\} = 0, & (r < R). \end{cases}$$

Die $f_j(r)$ müssen somit jedenfalls von der Form sein ($j = 0, 1, 2 \ldots$)

7) $$\begin{cases} f_j = c_{j1}^i f_{j1}^i + c_{j2}^i f_{j2}^i, & (r < R), \\ f_j = c_{j1}^a f_{j1}^a + c_{j2}^a f_{j2}^a, & (r > R), \end{cases}$$

wenn $f_{j1}^i f_{j2}^i$ zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung:

8ᵃ) $$r^2 f_j'' + 2 r f_j' + k_i^2 r^2 - j(j+1) f_j = 0$$

f_{j1}^a, f_{j2}^a zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung:

8ᵇ) $$r^2 f_j'' + 2 r f_j' = [\mu^2 r^2 + j(j+1)] f_j$$

vorstellen.

Eine partielle Lösung von 8ᵃ) ist die Besselsche Funktion $J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)$ dividiert durch $\sqrt{k_j r}$:

---

[1]) Es ist dies gestattet, weil auch $\Delta\, \Phi_j^{\mu}$ mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Innen- (Aussen)-raume eindeutig und stetig, also nach Kugelfunktionen an jeder Kugelfläche (r) entwickelbar ist.

$$9^{a})\qquad f_{j1}^{i} = \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda r)}{\sqrt{k_\lambda r}}\ ^{1)},$$

und es ist bekannt, dass die Differentialgleichung 8ᵃ) keine von diesem f_{j1}^{i} unabhängige, für $r = 0$ endliche Lösung zulässt; es ist daher

$$c_{j2} = 0$$

und:

$$10^{a})\qquad f_j = c_j^i \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda \cdot r)}{\sqrt{k_\lambda \cdot r}}, \quad (r < R)$$

wobei die Konstanten c_j^i willkürlich bleiben.

Eine partielle Lösung von 8ᵇ) ist[2]) die Funktion:

$$9^{b})\qquad \begin{aligned} f_{j1}^{a} &= \mathfrak{D}_j(\mu r) \\ &= \sum_0^j{}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \cdot \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)} \left(\frac{1}{\mu r}\right)^{\varkappa+1} e^{-\mu r}, \end{aligned}$$

wie wir leicht durch Substitution dieser Funktion in 8ᵇ) verifizieren können; wir werden diese Verifikation zugleich mit dem Beweis verbinden, dass die Differentialgleichung 8ᵇ) keine von diesem f_{j1}^{a} unabhängige, für $r = \infty$ mit seiner ersten Ableitung verschwindende Lösung zulässt, so dass:

$$c_{j2}^{a} = 0$$

und:

$$10^{b})\qquad f_j = c_j^a\, \mathfrak{D}_j(\mu r)$$

sein muss. Die Konstanten c_j^a werden mit den c_j^i, wie wir weiterhin sehen werden, infolge der Stetigkeit von Φ_j^μ und

---

1)
$$J_{j+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_0^i{}^{\lambda} \frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(i-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda} \cos\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2} - x\right]$$

(man vergl. z. B. Pockels, Über die partiellen Differentialgleichungen $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 110 und 98).

2) Man vergl. C. Neumann, Allg. Unters. über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkung, Leipzig 1896, p. 105 und 90—100.

seiner ersten Ableitungen bei dem Durchgange durch die Kugelfläche (R) durch gewisse Relationen verbunden sein.

Wir setzen zur Verifikation der Lösung 9[b]) von 8[b]):

11) $$F_j = f_{j1}^a \, e^{\mu r},$$

dann folgt aus 9[b]):

12) $$F_j(r) = \sum_0^j {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)} \left(\frac{1}{\mu r}\right)^{\varkappa+1},$$

und wir haben zu zeigen, dass dieses $F_j(x)$ der aus 8[b]) folgenden Differentialgleichung:

13) $$x^2 F_j'' - 2(\mu x^2 + x) F_j' = [2\mu x + j(j+1)] F_j$$

genügt.

Es ist nach 12)

14[a]) $$x^2 F_j'' = \sum_0^j {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}(\varkappa+1)(\varkappa+2) \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} \cdot a_j,$$

14[b]) $$x\, F_j' = -\sum_0^j {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}(\varkappa+1) \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)} \cdot \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} \cdot a_j,$$

14[c]) $$\mu x^2 F_j' = -\sum_{-1}^{j-1\,*)} {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa-1}(\varkappa+2) \frac{\Pi(j+\varkappa+1)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} \cdot a_j,$$

14[d]) $$\mu x\, F_j = \sum_{-1}^{j-1} {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa-1} \frac{\Pi(j+\varkappa+1)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} \cdot a_j,$$

wenn:

15) $$a_j = \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)},$$

somit:

---

*) Wir haben $\varkappa$ mit $\varkappa + 1$ vertauscht.

$$
14^{e})\left\{\begin{aligned}
&-2\mu x^2 F_j' - 2\mu x F_j\\
&=\sum_{-1}^{j-1}{}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}(\varkappa+1)\frac{\Pi(j+\varkappa+1)}{\Pi(\varkappa+1)\Pi(j-\varkappa-1)}\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1}\cdot a_j\\
&=\sum_{0}^{j-1}{}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}(\varkappa+1)\frac{(j+\varkappa+1)(j-\varkappa)}{\varkappa+1}\cdot\frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)}\\
&\qquad\qquad\cdot\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1}\cdot a_j
\end{aligned}\right.
$$

und:

$$
\begin{aligned}
&x^2 F_j'' - 2(\mu x^2 + x)F_j' - [2\mu x + j(j+1)]F_j\\
&=\sum_{0}^{j-1}{}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}\cdot a_j\frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)}\cdot\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1}[(\varkappa+1)(\varkappa+2)-j(j+1)\\
&\qquad\qquad + (j-\varkappa)(j+\varkappa+1) - 2(\varkappa+1)]\\
&+a_j\frac{\Pi(2j)}{\Pi(j)}\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{j+1}[(j+1)(j+2)-j(j+1)-2(j+1)]=0,
\end{aligned}
$$

da die beiden eckigen Klammern identisch verschwinden. Denken wir uns nun eine andere Funktion G_j, welche auch derselben Differentialgleichung, wie F_j, genüge:

16) $$x^2 G_j'' - 2(\mu x^2 + x)G_j' = [2\mu x + j(j+1)]G_j;$$

wir multiplizieren diese Gleichung mit F_j, die Gleichung 13) mit G_j und subtrahieren, dann folgt, wenn wir:

17) $$G_j' F_j - F_j' G_j = \Omega_j$$

setzen:

$$\Omega_j' - 2\left(\mu + \frac{1}{x}\right)\Omega_j = 0$$

hieraus

$$l\,\Omega_j = 2\mu x + l\,x + l\,C_j\,{}^{*})$$

18) $$\Omega_j = C_j\, x\, e^{2\mu x}.$$

Setzen wir nun analog 11):

19) $$G_j = g_j\, e^{\mu r}$$

---

*) C_j eine unbekannte Konstante.

und verlangen von der Funktion $g_j(r)$, dass sie mit ihrer ersten Ableitung für $r = \infty$ verschwinde, so muss auch

$$G_j\, e^{-\mu r} \quad \text{und} \quad G_j'\, e^{-\mu r}$$

also auch

$$\lim_{r=\infty} \cdot [\Omega_j\, e^{-2\mu r}] = \lim_{r=\infty} [C_j\, r]$$

$= 0$ sein, es folgt somit

$$C_j = 0,$$

$$\Omega_j = 0,$$

20) $$G_j = \text{const. } F_j,$$

damit sind aber unsere Behauptungen bewiesen, und wir wissen jetzt, dass die universellen Funktionen die allgemeine Gestalt haben müssen:

21ᵃ) $$\Phi_\lambda^\mu = \sum_0^\infty {}^j\, c_j^a\, \mathfrak{D}_j(\mu\, r)\, Y_j(\Theta, \varphi) \quad \text{(im Aussenraume)},$$

21ᵇ) $$\Phi_\lambda^\mu = \sum_0^\infty {}^j\, c_j^i\, \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda\, r)}{\sqrt{k_\lambda\, r}}\, Y_j(\Theta, \varphi), \quad \text{(im Innenraume)};$$

die Y_j können wir schon im Hinblick auf die Stetigkeit von Φ_λ^μ bei dem Durchgang durch die Kugelfläche als dieselben Funktionen für den Innen- und Aussenraum voraussetzen.

§ 2.

Wir haben nun zur weiteren Bestimmung der Φ_λ^μ die Bedingungen, dass

$$\Phi_\lambda^\mu \quad \text{und} \quad \frac{d\,\Phi_\lambda^\mu}{d\,r}$$

beim Durchgang durch die Kugelfläche stetig sein müssen.

Es folgen somit die Gleichungen ($j = 0, 1, 2 \ldots$):

22ᵃ) $$c_j^a\, \mathfrak{D}_j(\mu\, R) = c_j^i\, \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda\, R)}{\sqrt{k_\lambda\, R}}$$

23) $$\mu\, c_j^a\, \mathfrak{D}_j'(\mu\, R) = c_j^i \left[\frac{k_\lambda\, J_{j+\frac{1}{2}}'(k_\lambda\, R)}{\sqrt{k_\lambda\, R}} - \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda\, R)}{2\, R\sqrt{k_\lambda\, R}}\right].$$

Die Gleichung 23) können wir infolge der Eigenschaft der Besselschen Funktionen:[1])

$$k_\lambda R\, J'_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R) + (j+\tfrac{1}{2})\, J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R) = k_\lambda R\, J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R)$$

auch so schreiben:

$$24)\quad \mu\, c_j^a\, \mathfrak{D}_j'(\mu R) = c_j^i \left[\frac{k_\lambda}{\sqrt{k_\lambda R}} \cdot J_{j\;\frac{1}{2}}(k_\lambda R) - (j+1)\frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R)}{R\sqrt{k_\lambda R}}\right],$$

oder mit Rücksicht auf 22^a):

$$25)\quad c_j^a \left(\mu\, \mathfrak{D}_j'(\mu R) + (j+1)\frac{\mathfrak{D}_j(\mu R)}{R}\right) = c_j^i \frac{J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R)}{\sqrt{k_\lambda R}} \cdot k_\lambda .$$

Wir können auch der linken Seite noch eine einfachere Gestalt geben:

Setzen wir wieder

$$\mathfrak{D}_j(\mu x) = F_j(x)\, e^{-\mu x},$$

so ist:

$$\mu x\, \mathfrak{D}_j'(\mu x) + (j+1)\, \mathfrak{D}_j(\mu x) = (x F_j' + (j+1) F_j - \mu x F_j)\, e^{-\mu x},$$

$$= \sum_0^{j-1}{}_\varkappa\, 2^{j-\varkappa}(j-\varkappa) \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} e^{-\mu x}$$

$$- \sum_{-1}^{j-1}{}_\varkappa\, 2^{j-\varkappa-1} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+\varkappa+1)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} e^{-\mu x},$$

(nach den Formeln S. 422)

$$= \sum_{-1}^{j-1}{}_\varkappa\, 2^{j-\varkappa-1} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa)}\, e^{-\mu x} [2(\varkappa+1)(j-\varkappa)$$

$$- (j+\varkappa+1)(j-\varkappa)] \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1},$$

---

[1]) Es ist allgemein:

$$x\, J_n'(x) + n\, J_n(x) = x \cdot J_{n-1}(x);$$

man vergl. z. B. Riemann-Weber, Die part. Differentialgleichungen der math. Physik. Braunschweig 1900, p. 161. I. Bd.; für $n = 0$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x .$$

$$= -\sum_{-1}^{j-2}{}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa-1} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa-2)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1} e^{-\mu x},$$

$$= -\sum_{0}^{j-1}{}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa} \frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)} \frac{\Pi(j+\varkappa-1)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa-1)} \left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa} e^{-\mu x},$$

und:

26) $$\frac{\mu x\, \mathfrak{D}_j'(\mu x) + (j+1)\,\mathfrak{D}(\mu x)}{\mu x} = -\frac{1}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu x).^{*)}$$

Wir können daher 25) auch so schreiben:

22b) $$-\frac{c_j^a \mu}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu R) = c_j^i k_\lambda \frac{J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R)}{\sqrt{k_\lambda R}}.$$

Es sind nun nach 22a), 22b) zwei Fälle möglich; es ist entweder

26a) $$c_j^a = c_j^i = 0,$$

oder es verschwindet die Determinante:

26b) $$k_\lambda\, \mathfrak{D}_j(\mu R)\, J_{j-\frac{1}{2}}(k_\lambda R) + \frac{\mu}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu R)\, J_{j+\frac{1}{2}}(k_\lambda R) = 0.$$

Wenn wir beweisen können, dass zwei Gleichungen

27) $$\begin{cases} k\,\mathfrak{D}_\sigma(\mu R)\, J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2\sigma-1} \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R)\, J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0, \\ k\,\mathfrak{D}_\tau(\mu R)\, J_{\tau-\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2\tau-1} \mathfrak{D}_{\tau-1}(\mu R)\, J_{\tau+\frac{1}{2}}(kR) = 0 \end{cases}$$

$$(\sigma, \tau = 0, 1, 2 \ldots, \quad \sigma \neq \tau)$$

keine gemeinsame Wurzel k haben, ist unser Gesamtresultat in folgender Weise auszusprechen:

---

*) Für $j = 0$ ist:

$$\mathfrak{D}_{j-1}(\mu x) = -\frac{e^{-\mu x}}{\mu x}$$

zu definieren.

III. Die universellen Funktionen Φ_j^μ, welche der Kugelfläche (R) entsprechen, sind, abgesehen von einem konstanten Faktor:[1])

$$
28)\quad \begin{cases} \Phi_j^\mu = \mu^{j+1}\, \mathfrak{D}_j(\mu r)\, Y_j(\Theta, \varphi), \quad \text{(im Aussenraume)} \\ \Phi_j^\mu = \mu^{j+1}\, \mathfrak{D}_j(\mu R) \dfrac{\sqrt{k_j R}}{\sqrt{k_j r}} \dfrac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)}\, Y_j(\Theta, \varphi), \\ \qquad \text{(im Innenraume).} \end{cases}
$$

Dabei ist k_j irgend eine Wurzel der Gleichung:

$$
29)\quad k_j \mathfrak{D}_j(\mu R)\, J_{j-\frac{1}{2}}(k_j R) + \frac{\mu}{2j-1} \mathfrak{D}_{j-1}(\mu R)\, J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R) = 0,
$$

$Y_j(\Theta, \varphi)$ eine beliebige allgemeine Kugelfunktion j^{ter} Ordnung.

§ 3.

Wie wir ausdrücklich bemerkten, bleibt uns noch der nachträgliche Beweis dafür zu liefern übrig, dass zwei Gleichungen von der Form 27) keine gemeinsame Wurzel k haben können.

Für den Fall $\mu = 0$ ist dies ein in der Theorie der Besselschen Funktionen wohlbekanntes Resultat: 2 Gleichungen:

$$
\left.\begin{aligned} J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \\ J_{\tau-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \end{aligned}\right| \begin{aligned} \sigma, \tau = 1, 2, 3 \ldots \\ \sigma \neq \tau \end{aligned}
$$

können keine gemeinsame Wurzel k haben.

Der Beweis für diesen Spezialfall möge hier kurz folgen, da wir den Beweis für den allgemeinen Fall ganz analog geben können und durch den Vergleich mit dem einfacheren Falle die Übersichtlichkeit des allgemeinen Beweises erhöht werden dürfte.

---

[1]) Wir setzen willkürlich $c_j^a = \mu^{j+1}$; der konstante Faktor wäre nach der Definition 32') S. 14 noch so zu wählen, dass

$$
k_j^2 \int_i (\Phi_j^\mu)^2\, d\tau = 1;
$$

doch kommt es auf die Bestimmung desselben nicht weiter an.

Nehmen wir an, es gäbe einen Wert von k, für den

$$\left.\begin{aligned} J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) &= 0, \\ J_{\tau-\frac{1}{2}}(kR) &= 0, \end{aligned}\right. \quad \tau < \sigma$$

dann ergibt die successive Anwendung der Rekursionsformel:[1])

$$30)\qquad J_n(x) = \frac{x}{2n} J_{n-1}(x) + \frac{x}{2n} J_{n+1}(x),$$

dass auch jedes:

$$J_{\varrho-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad (\tau < \varrho < \sigma),$$

wobei wir natürlich unter σ, τ, ϱ ganze Zahlen verstehen; im besonderen folgt:

$$J_{\tau+\frac{1}{2}}(kR) = 0;$$

nunmehr folgt aber aus derselben Rekursionsformel successive, da wir k stets $\neq 0$ haben müssen:

$$\begin{aligned} J_{\tau-\frac{1}{2}}(kR) &= 0, \\ J_{\tau-\frac{3}{2}}(kR) &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ J_{\frac{3}{2}}(kR) &= 0, \\ J_{\frac{1}{2}}(kR) &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist (man vergl. Anm. 1 S. 421):

$$J_{\frac{1}{2}}(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \sin kR,$$

$$J_{\frac{3}{2}}(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \left\{\frac{\sin kR}{kR} - \cos kR\right\},$$

es müsste somit

$$\sin kR = \cos kR = 0$$

sein, was für keinen Wert von k möglich ist.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle über, dass μ eine beliebige positive Zahl ist und setzen allgemein $(n = 0, 1, 2, 3 \ldots)$

---

[1]) Man vergl. z. B. Riemann-Weber l. c. p. 160, 1. Bd.

31) $\Psi_n = k\,\mathfrak{D}_n(\mu R)\,J_{n-\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2n-1}\,\mathfrak{D}_{n-1}(\mu R)\,J_{n+\frac{1}{2}}(kR)$;

wir wollen annehmen, es gäbe einen Wert von k, für den:

32) $$\begin{cases} \Psi_\sigma = 0, \\ \Psi_\tau = 0, \end{cases} \quad \tau < \sigma.$$

Wir werden, um die Unmöglichkeit dieser Annahme nachzuweisen, für die Ψ_n eine ähnliche Rekursionsformel ableiten, wie die Formel 30) für die J_n.

Es ist:

$$\Psi_{n+1} = k\,\mathfrak{D}_{n+1}{}^{*)} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2n+1}\,\mathfrak{D}_n\,J_{n+\frac{3}{2}}(kR),$$

$$\Psi_{n-1} = k\,\mathfrak{D}_{n-1} \quad \cdot J_{n-\frac{3}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2n-3}\,\mathfrak{D}_{n-2}\,J_{n-\frac{1}{2}}(kR);$$

wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\mathfrak{D}_{n-1}$, die zweite mit $\mathfrak{D}_{n+1}$ und addieren, dann folgt:

$$\mathfrak{D}_{n-1}\,\Psi_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1}\,\Psi_{n-1}$$

$$= \frac{\mu}{2n-3}\,\mathfrak{D}_{n+1}\,\mathfrak{D}_{n-2}\,J_{n-\frac{1}{2}}(kR) + k\,\mathfrak{D}_{n+1}\,\mathfrak{D}_{n-1}\,J_{n+\frac{1}{2}}(kR)$$

$$+ \frac{\mu}{2n+1}\,\mathfrak{D}_n\,\mathfrak{D}_{n-1}\,J_{n+\frac{3}{2}}(kR) + k\,\mathfrak{D}_{n+1}\,\mathfrak{D}_{n-1}\,J_{n-\frac{3}{2}}(kR);$$

nun ist nach 30):

$$\frac{kR}{2n+1}\,J_{n+\frac{3}{2}}(kR) = J_{n+\frac{1}{2}}(kR) - \frac{kR}{2n+1}\,J_{n-\frac{1}{2}}(kR),$$

$$\frac{kR}{2n-1}\,J_{n-\frac{3}{2}}(kR) = J_{n-\frac{1}{2}}(kR) - \frac{kR}{2n-1}\,J_{n+\frac{1}{2}}(kR),$$

somit:

---

*) Die Argumente von $\mathfrak{D}_n\,\mathfrak{D}_{n+1}\,\mathfrak{D}_{n-2}\,\mathfrak{D}_{n-1}$ sollen stets μR sein; wir schreiben diese der Kürze halber nicht jedesmal hin.

$$\mathfrak{D}_{n-1}\,\Psi_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1}\,\Psi_{n-1}$$
$$= J_{n-\frac{1}{2}}(kR)\left\{\frac{\mu}{2n-3}\mathfrak{D}_{n+1}\mathfrak{D}_{n-2} - \frac{\mu}{2n+1}\mathfrak{D}_n\mathfrak{D}_{n-1} + \frac{2n-1}{R}\mathfrak{D}_{n+1}\mathfrak{D}_{n-1}\right\}$$
$$+ J_{n+\frac{1}{2}}(kR)\left\{k\,\mathfrak{D}_{n+1}\mathfrak{D}_{n-1} + \frac{\mu}{kR}\mathfrak{D}_n\mathfrak{D}_{n-1} - k\,\mathfrak{D}_{n+1}\mathfrak{D}_{n-1}\right\}.$$

Bedenken wir jetzt, dass auch die $\mathfrak{D}_n$ eine Rekursionsformel [1]) erfüllen:

---

[1]) Setzen wir wieder:

$$\mathfrak{D}_j(\mu x) = F_j(x)\,e^{-\mu x},$$

dann ist nach 12):

$$F_j = \sum_0^j {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}\frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)}\,\frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(j-\varkappa)}\cdot\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1},$$

nach 14 d)

$$\mu x\, F_{j-1} = \sum_{-1}^{j-2} {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa-2}\frac{\Pi(j-1)}{\Pi(2j-2)}\,\frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa-2)}\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1},$$

somit:

$$F_j + \frac{\mu x}{(2j-1)(2j+1)}F_{j-1}$$
$$= \sum_{-1}^{j} {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}\frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)}\,\frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa)}\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1}\left\{\varkappa+1 + \frac{1}{2(2j+1)}(j-\varkappa)(j-\varkappa-1)\right\},$$
$$= \sum_{-1}^{j} {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}\frac{\Pi(j)}{\Pi(2j)}\,\frac{\Pi(j+\varkappa)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa)}\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1}\frac{(j+\varkappa+1)(j+\varkappa+2)}{2(2j+1)},$$
$$= \sum_{-1}^{j} {}^{\varkappa}\, 2^{j-\varkappa}\frac{\Pi(j+1)}{\Pi(2j+2)}\,\frac{\Pi(j+\varkappa+2)}{\Pi(\varkappa+1)\,\Pi(j-\varkappa)}\left(\frac{1}{\mu x}\right)^{\varkappa+1},$$
$$= \mu x\, F_{j+1}, \quad \text{wieder nach } 14^{d}),$$

und daher auch:

$$\mathfrak{D}_j(\mu x) + \frac{\mu x}{(2j-1)(2j+1)}\mathfrak{D}_{j-1}(\mu x) = \mu x\,\mathfrak{D}_{j+1}(\mu x).$$

$$33) \quad \begin{cases} \mu R \mathfrak{D}_{n+1} = \mathfrak{D}_n + \dfrac{\mu R}{(2n-1)(2n+1)} \mathfrak{D}_{n-1}, \\ \mu R \mathfrak{D}_{n-2} = (2n-1)(2n-3)\{\mu R \mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_{n-1}\}, \end{cases}$$

so können wir die letzte Formel auch so schreiben:

$$\mathfrak{D}_{n-1} \Psi_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} \Psi_{n-1}$$

$$= J_{n-\frac{1}{2}}(kR)\Big[\frac{2n-1}{\mu R^2}\Big\{\mathfrak{D}_n + \frac{\mu R}{(2n-1)(2n+1)}\mathfrak{D}_{n-1}\Big\}\Big\{\mu R \mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_{n-1}\Big\}$$

$$- \frac{\mu}{2n+1}\mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} + \frac{2n-1}{\mu R^2}\mathfrak{D}_{n-1}\Big\{\mathfrak{D}_n + \frac{\mu R}{(2n-1)(2n+1)}\mathfrak{D}_{n-1}\Big\}$$

$$+ \frac{\mu}{kR}\mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(kR),$$

$$= J_{n-\frac{1}{2}}(kR)^{*)} \cdot \frac{1}{R}(2n-1)\mathfrak{D}_n^2 + \frac{\mu}{kR}\mathfrak{D}_n \mathfrak{D}_{n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(kR),$$

oder:

$$\mathfrak{D}_{n-1} \Psi_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} \Psi_{n-1} = \frac{2n-1}{kR}\mathfrak{D}_n \Psi_n,$$

oder schliesslich:

$$34) \quad \Psi_n = \frac{kR}{2n-1}\frac{\mathfrak{D}_{n-1}(\mu R)}{\mathfrak{D}_n(\mu R)}\Psi_{n-1} + \frac{kR}{2n-1}\frac{\mathfrak{D}_{n+1}(\mu R)}{\mathfrak{D}_n(\mu R)}\Psi_{n+1};$$

diese Formel, in der die Koeffizienten von Ψ_{n-1} und $\Psi_{n+1} \neq 0$ (übrigens stets positiv**)) sind, ist das für uns brauchbare Analogon der Formel 30).

Es ergibt die successive Anwendung der Formel 34), dass auch jedes

$$\Psi_\varrho = 0$$

sein muss ($\tau < \varrho < \sigma$), wenn die beiden Formeln 32) erfüllt sind, wobei wir natürlich unter σ, τ, ϱ ganze Zahlen verstehen; im besonderen folgt:

$$\Psi_{\sigma-1} = 0.$$

*) Alle übrigen mit $J_{n-\frac{1}{2}}(kR)$ multiplizierten Glieder heben sich fort.

**) Nur das Anm. S. 421 definierte $\mathfrak{D}_{j-1}$ für $j = 0$ ist negativ, was für die folgenden Schlüsse nicht in Betracht kommt.

Nun ist:

$$\Psi_{\sigma-1} = k\mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R)\, J_{\sigma-\frac{3}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2\sigma-3}\mathfrak{D}_{\sigma-2}(\mu R)\, J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR)$$

oder, wenn wir bedenken, dass:

$$\frac{kR}{2\sigma-1} J_{\sigma-\frac{3}{2}}(kR) = J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) - \frac{kR}{2\sigma-1} J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR), \quad \text{(nach 30))}$$

$$\mu R\, \mathfrak{D}_{\sigma-2}(\mu R) = (2\sigma-1)(2\sigma-3)\{\mu R \mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) - \mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R)\},$$

(2. Formel 33)),

auch:

$$\Psi_{\sigma-1} = \mu(2\sigma-1)\mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R)\, J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) - k\mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R)\, J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR).$$

Die beiden Gleichungen

$$\Psi_{\sigma} \equiv k\mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) + \frac{\mu}{2\sigma-1}\mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0,$$

$$\Psi_{\sigma-1} \equiv \mu(2\sigma-1)\mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R) J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) - k\mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0$$

können nun nicht gleichzeitig bestehen, weil weder gleichzeitig

$$J_{\sigma-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad J_{\sigma+\frac{1}{2}}(kR) = 0,$$

noch die Determinante:

$$(k^2 + \mu^2)\mathfrak{D}_{\sigma}(\mu R)\mathfrak{D}_{\sigma-1}(\mu R) = 0$$

sein kann.

Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

§ 4.

Von allen durch den allgemeinen Satz III gegebenen Schwingungen wird uns vor allem der Spezialfall

$$j = 0$$

interessieren. In diesem Falle ist

$$Y_j \text{ eine Konstante} = c,$$

$$\mathfrak{D}_j(\mu r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$

$$J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sin k_0 r,$$

und die Gleichungen 28), 29) werden:

$$35)\quad \begin{cases} \Phi_0^\mu = c \cdot \dfrac{e^{-\mu r}}{r}, & \text{(im Aussenraume)}, \\[2ex] \Phi_0^\mu = c \cdot e^{-\mu R} \dfrac{\sin k_0 r}{\sin k_0 R} \cdot \dfrac{1}{r} & \text{(im Innenraume)}, \end{cases}$$

$$36)\quad k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0.$$

Die Schwingung, der die kleinste Wurzel k_0 der Gleichung 36) entspricht, werden wir als die Grundschwingung des Systems bezeichnen. Sie besteht in einer Pulsation der Kugel und geht für $\mu = 0$ in die Grundschwingung der gewöhnlichen universellen Schwingungen über, für die:

$$37)\quad \begin{cases} \Phi_0 = \dfrac{c}{r}, & \text{(im Aussenraume)}, \\[2ex] \Phi_0 = c \dfrac{\sin k_0 r}{r}, & \text{(im Innenraume)}, \end{cases}$$

$$38)\quad k_0 = \frac{\pi}{2R}.$$

Vernachlässigt man bei der Grundschwingung erst die zweiten Potenzen von μ, so folgt:

$$39)\quad \begin{cases} \Phi_0^\mu = \dfrac{c\, e^{-\mu r}}{r} & \text{(im Aussenraume)}, \\[2ex] \Phi_0^\mu = \dfrac{c}{r}(1 - \mu R) \dfrac{\sin k_0 r}{\sin k_0 R} & \text{(im Innenraume)}, \\[2ex] k_0 = \dfrac{\pi}{2R} + \varepsilon, \end{cases}$$

wobei ε der Gleichung zu genügen hat:

$$40)\quad - k_0 \sin(\varepsilon R) + \mu \cos(\varepsilon R) = 0$$

oder in erster Annäherung:

$$41)\quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{2\mu}{\pi}, \\[2ex] \sin k_0 R = 1, \\[2ex] \sin k_0 r = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{r}{R}\right) + \dfrac{2\mu r}{\pi} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{r}{R}\right); \end{cases}$$

Wir können somit für die Grundschwingung das folgende Resultat aussprechen:

Zusatz zu III. Für die Grundschwingung ist:

$$\Phi_0^\mu = c\,\frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \text{(im Aussenraume)},$$

$$\Phi_0^\mu = c\,\frac{e^{-\mu R}}{\sin k_0 R}\cdot\frac{\sin k_0 r}{r}, \quad \text{(im Innenraume)},$$

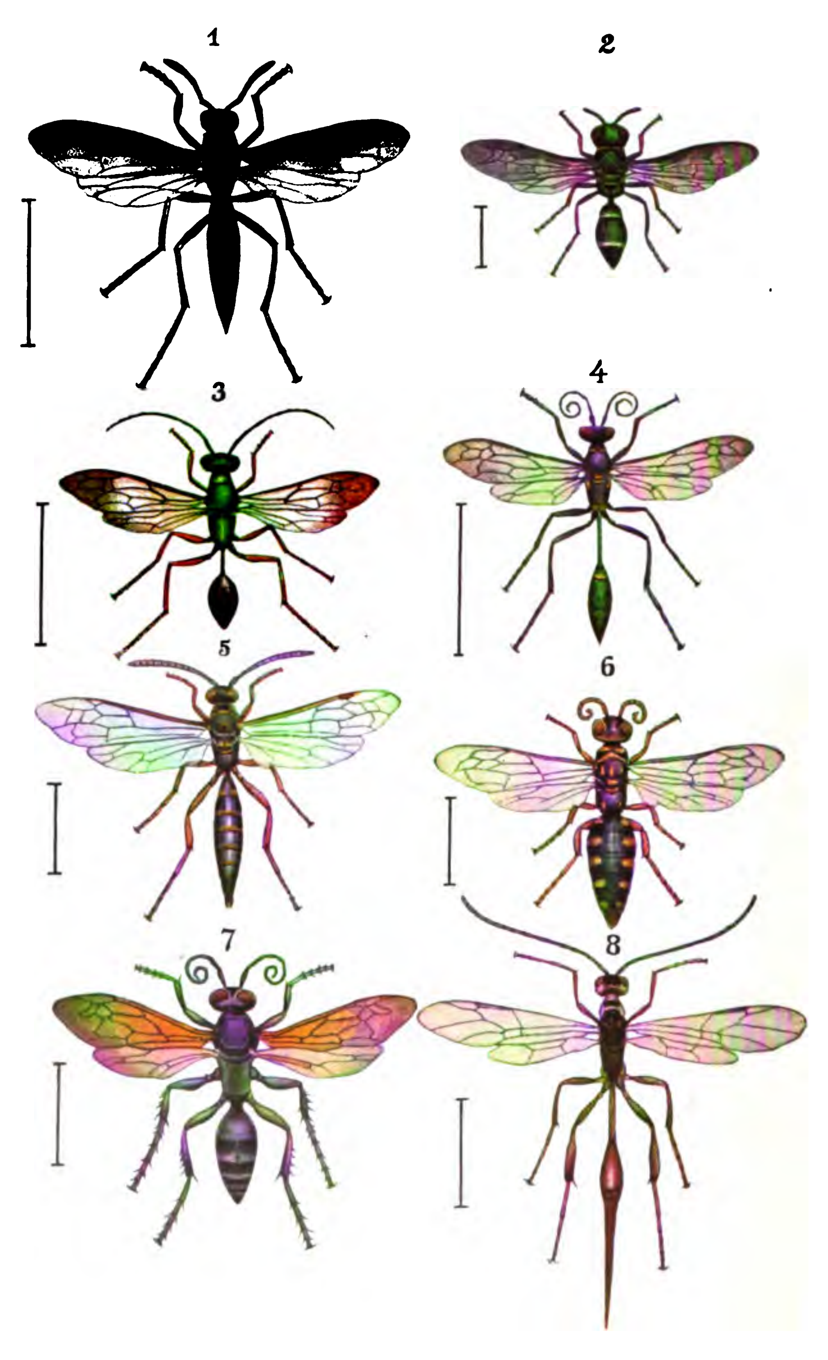
und k_0 die kleinste positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0.$$

Ist μ sehr klein, und vernachlässigen wir bereits zweite Potenzen von μ, so wird:

$$42)\quad \begin{cases} \Phi_0^\mu = c\,\dfrac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \text{(im Aussenraume)}, \\ \Phi_0^\mu = \dfrac{c}{r}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{r}{R}\right) + c\mu\left[\dfrac{2}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{r}{R}\right) - \dfrac{R}{r}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{r}{R}\right)\right], \\ \qquad\qquad \text{(im Innenraume)}, \\ k_0 = \dfrac{\pi}{2R} + \dfrac{2\mu}{\pi}. \end{cases}$$

Die mit k_0 umgekehrt proportionale Schwingungsdauer der Grundschwingung wird durch die Absorption des Zwischenmediums verkleinert.


1
2
3
4
5
6
7
8

Beiträge zur näheren Kenntnis der Schlupfwespen-Familie Pelecinidae Hal.

Von **W. A. Schulz.**

(*Eingelaufen 4. Juli.*)

(Mit Taf. I.)

Die Peleciniden sind eine kleine Gruppe eigentümlich gestalteter, geschlechtsdimorpher Schlupfwespen, die in der Neuen Welt, vornehmlich in deren äquatorialen Gegenden, und, nur in einer bekannten Art, in Australien heimaten. Monographisch sind sie zuletzt von dem verdienstvollen österreichischen Hymenopterologen August Schletterer im Jahrgange 1889 der Berliner entomologischen Zeitschrift bearbeitet worden, der unter ihnen die drei Genera Pelecinus Latr., Ophionellus Westw. und Monomachus Klug begriffen wissen wollte. Ophionellus ist seither als Synonym der älteren Pharsalia Cress. erkannt und mit Recht als aberrante Gattung zu den Ophioniden (Nototrachinen) gestellt worden. Von den übrigbleibenden beiden Gattungen war es Monomachus, gegen deren Angliederung an Pelecinus früher lange Bedenken gehegt wurden. Namentlich machte Cameron in der Biologia Centrali-Americana, 1887, S. 422 geltend, dass jenes Genus zwei, dieses aber nur einen Schenkelring besitzt, gewiss ein, bei Hymenopteren schwer ins Gewicht fallendes Moment. Allein bei Untersuchung der sonstigen morphologischen Verhältnisse ergibt sich doch eine hinreichend grosse, schon im ganzen Habitus zum Ausdruck gelangende Verwandtschaft, um die Zusammenstellung der beiden

letztgenannten Gattungen in eine eigene Familie, die Peleciniden, zu rechtfertigen.

Zweifelhaft bleibt nun einstweilen noch, welchen Platz im Immensysteme die Peleciniden einnehmen. Während die meisten älteren Autoren sie den Evaniiden beigesellten, ohne indes für dieses Vorgehen Gründe von Belang anzuführen, wurden sie von Haliday, Cameron und Ashmead den Proctotrupiden, von Dalla Torre endlich in seinem grossen neuen Catalogus Hymenopterorum der Familiengruppe um die Ichneumoniden angegliedert. Am natürlichsten scheint ihre Stellung immerhin, nach der Bildung des weiblichen Hinterleibsendes und dem sonstigen Habitus zu urteilen, bei den Proctotrupiden, etwa in der Nähe von Epistenia Westw. und Thaumasura Westw., zu sein, genaueres wird sich aber erst durch anatomische Untersuchung, die mir mangels Spiritusexemplare jetzt nicht möglich ist, feststellen lassen.

Unklar ist, was Ashmead in seiner Tabelle: Classification of the Ichneumon-Flies, 1900, p. 3 unter den Peleciniden versteht, denn das von ihm in der Rubrik c angegebene Merkmal: „trochanters always one jointed" passt, wie wir oben gesehen haben, nur auf Pelecinus selbst, nicht aber auch auf Monomachus.

Es erübrigt nunmehr nur noch, ein höchst seltsames Schlupfwespen-Genus kurz zu erwähnen, das früher mit Pelecinus verglichen wurde und im Systeme bisher ebenfalls nicht zwanglos untergebracht werden konnte, nämlich den von Smith aus Panama beschriebenen, seither jedoch anscheinend nie mehr wiedergefundenen Leptofoenus. Soweit die Originalbeschreibung ein Urteil zulässt, steht diese Gattung den Evaniiden, speziell der Subfamilie der Gasteruptioninen, näher als den Peleciniden und ist denn auch bereits von Dalla Torre dorthin verwiesen worden. Wenn Smith auf das in der Anlage demjenigen von Pelecinus ähnelnde, gleichfalls verschwommene Flügelgeäder des Leptofoenus hindeutete, so ist dies bei der sonstigen grossen morphologischen Verschiedenheit beider Gattungen ein ziemlich bedeutungsloses Merkmal, werden doch auch Monomachus und Pelecinus selbst namentlich durch das

Flügelgeäder, das bei diesem verschwommen, bei jenem scharf ausgeprägt und anders angelegt ist, getrennt.

Nach dieser Einleitung dürfte es angezeigt sein, eine Definition der Peleciniden-Familie zu geben, sie lautet folgendermassen:

mono- oder ditroche, geschlechtsdimorphe Schlupfwespen von schlanker allgemeiner Körpergestalt. Kopf verhältnismässig flach, d. h. von vorn nach hinten zusammengepresst, von vorn betrachtet, entweder annäherungsweise dreieckig oder quadratisch erscheinend; Wangen deutlich; Oberkiefer gross, am Vorderrande gezähnt; Fühler fadenförmig, beim ♂ 14-, beim ♀ 14- bis 15-gliedrig, länger als Kopf und Bruststück mitsamt Mittelsegment; Schaft verdickt; Nebenaugen in ein Dreieck gestellt, mässig gross. Bruststück länger als breit und hoch; Hals (Prosternum) sehr kurz, Vorderrücken sattel- oder kantenförmig vom Halse abgeschieden, Mittelrücken höckrig, durch zwei deutlich geprägte, nach vorn divergierende Furchen in einen grösseren, mittleren und in zwei seitliche, kleinere Abschnitte geteilt; Schildchen durch starke Punktfurchen in zwei vordere und zugleich seitliche, kleinere Abschnitte und in einen grösseren, mittleren, hinteren Abschnitt zerlegt; Hinterrücken sehr verkürzt, seitlich rinnenartig vertieft; Metapleuren vom Mittelsegmente nur undeutlich abgegrenzt, dieses gross, von oben nach unten leicht zusammengedrückt, nach hinten über den Ursprung der Hüften III hinaus verlängert und dort kegelartig verschmälert, auf seinem hervorragenden Ende entspringt der Hinterleibsstiel; Beine beim ♂ schlanker als beim ♀, bei diesem Schienen III bis auf den dünnen Grund auffallend stark verdickt; Flügel glashell, Vorderflügel an der Spitze öfters rauchig gefleckt, Flügelgeäder entweder deutlich ausgeprägt oder verschwommen, mit verschiedenem Aderverlauf. Hinterleib beim ♂ gestielt, gegen das Ende hin verbreitert oder verdickt, beim ♀ beträchtlich länger, vorn oder in der Mitte verdickt, gegen das Ende sehr verdünnt, Spitze nach unten gebogen, ohne Legestachel.

Die Unterschiede zwischen den beiden einzigen Gattungen sind gross und sofort in die Augen springend; im einzelnen werden sie am besten in nachstehender Gegenüberstellung veranschaulicht:

Pelecinus.	Monomachus.
Kopf, von vorn gesehen, fast dreieckig, etwa von der Gestalt wie bei der Braconiden-Familie der Agathididen; Oberkiefer am Vorderrande mit einem stumpfen Zahn;	Kopf, von vorn und oben gesehen, viereckig, etwa wie bei den Braconiden-Familien der Alysiiden und Dacnusiden, dick und breit, d. h. so breit oder noch breiter als der Thorax; Oberkiefer mehr oder weniger flach, am Vorderrande mit zwei stumpfen, nebeneinander gelegenen Zähnen;
Kiefertaster sehr lang, 5-gliedrig;	Kiefertaster kurz;
Lippentaster kurz, 3-gliedrig;	Lippentaster sehr kurz;
Gesicht mit einer nasenartigen Erhebung in der Mitte;	Gesicht flach, manchmal mit Längskielen oder Vertiefungen, jedenfalls aber ohne nasenförmigen Höcker in der Mitte, vor der Ansatzstelle der Fühler erhebt sich, gewissermassen als Schutzwehr, ein mitten geteilter Wulst oder Wand;
Stirn gegen die Mitte hin eingedrückt;	Stirn flach oder leicht konvex;
Hinterkopf sehr verkürzt, hinten steil abfallend;	Hinterkopf sehr verlängert, Schläfen breit;
Netzaugen elliptisch;	Netzaugen rund-eiförmig;
Fühler in beiden Geschlechtern 14-gliedrig, ungefähr doppelt so lang wie Kopf und Bruststück samt Mittelsegment, beim ♀ vor der Spitze hell geringelt;	Fühler beim ♂ 14-gliedrig und länger als der ganze Körper, beim ♀ 15-gliedrig und ungefähr halb so lang wie der ganze Körper, in beiden Geschlechtern einfarbig;
Vorderrücken mit deutlich hervortretender Oberrandskante, die bogenförmig gewölbt, mitten sehr leicht ausgerandet ist und seitlich in Ecken vorspringt;	Vorderrücken sattelförmig;
Schildchen hochgewölbt;	Schildchen ziemlich flach;
Ein Schenkelring;	Zwei Schenkelringe;

Pelecinus.	Monomachus.
Glied 1, 4 und 5 der Tarsen III kurz, 3 länger, 2 am längsten;	Glied 1 der Tarsen III am längsten, 2, 3 und 5 kürzer, 4 am kürzesten;
Geäder im Vorderflügel teilweise verschwommen, im Hinterflügel gänzlich fehlend;	Vorder- und Hinterflügel mit scharf ausgeprägtem Geäder von anderer Anlage als bei Pelecinus;
Hinterleib (ausschliesslich Mittelsegments) in beiden Geschlechtern mit 6 Segmenten, beim ♂ deutlich keulenförmig, beim ♀ sehr stark verlängert und dünn, zylindrisch, Hinterleibsstiel verdickt.	Hinterleib (ausschliesslich Mittelsegments) beim ♂ mit 6, beim ♀ mit 7 Segmenten, bei erstem am Ende verbreitert, jedoch nicht keulenförmig, sondern abgeplattet, bei letztem lang gestreckt, mitten verdickt und gegen das Ende wieder verjüngt, seitlich, wie bei den Ophioniden, zusammengedrückt.

Was wir zur Zeit von der Biologie der Peleciniden wissen, beschränkt sich auf eine kurze Notiz bei Dalla Torre, Catalog. Hymenopt., vol. III, pars II, p. 1086, laut deren Pelecinus polyturator bei dem Käfer Aegeria acerni schmarotzen soll, wofür als Gewährsmann Ashmead genannt wird. Auffällig bleibt nun allerdings, dass dieser Autor in den erst vor wenigen Jahren erschienenen „Insects of New Jersey“, worin auch P. polyturator behandelt wird, von dessen Wirtstier nichts erwähnt.

Pelecinus Latr.

Von den beiden in Dalla Torres Katalog aufgeführten Spezies ist mir bruneipes Patton aus Tennessee unbekannt, weshalb ich über seine eventuelle Artberechtigung nichts zu sagen vermag. P. polyturator (Drury), die älteste Form, war früher unter einer ganzen Reihe von verschiedenen Namen beschrieben worden, bis Schletterer alle diese mit Recht unter der vorgenannten Drury'schen Artbezeichnung wieder vereinigte. Damit ist nun aber unsere systematische Kenntnis von polyturator keineswegs erschöpft, denn manche der vermeintlichen besonderen Spezies der älteren Autoren können gar wohl Lokalrassen oder geographische Subspezies darstellen, und Dalla Torre hat denn

auch die Romand'schen und Klug'schen Formen schon wieder als „Varietäten" hervorgezogen. Die Frage der geographischen Verbreitung ist durch die Vaterlandsangabe: „Nord-, Mittel- und Südamerika" auch nicht erledigt, denn während P. polyturator in den Ost- und Südstaaten der nordamerikanischen Union, ferner in Mejico, auf dem Isthmus von Panama und in Peru recht häufig sein muss, scheint er in den Tiefebenen des weiten Amazonasbeckens selten zu sein, wo nicht gar zu fehlen, wenigstens ist er mir während meines dreijährigen Aufenthalts am unteren Amazonenstrom nie zu Gesicht gekommen. Erst längs des Hochplateaus von Mattogrosso, dann weiter hinab nach den La Plata-Staaten zu und in Süd- und Ostbrasilien scheint die Art wieder aufzutreten. Ihr Entstehungszentrum dürfte, wie dasjenige mancher anderen Insektenformen, in der gebirgigen Nordwestecke Südamerikas zu suchen sein, von wo aus die Verbreitung in zwei mächtigen Bögen einerseits über Mittelamerika, Texas und Karolina bis nach Pennsylvanien und New York, andererseits über Perú, Bolivien und Mattogrosso nach Uruguay, Rio Grande do Sul und der Ostküste Brasiliens erfolgte. Wie weit P. polyturator dann hier nach Norden, etwa bis Bahia oder zu der Südgrenze der Hylaea am Rio Paranahyba, vorgedrungen ist, entzieht sich heute noch unserer Kenntnis.

Monomachus Klug.

Es war ehedem eine offene Frage, wer als Autor dieser Gattung zu gelten hat, Klug oder Westwood, die sie beide im gleichen Jahre (1841) aufstellten. Schletterer entschied sich für den letztgenannten, weil Klug keine Beschreibung gab, obwohl er erwiesenermassen der erste war, der Monomachus erwähnte. Nach den allgemein anerkannten Nomenklaturbestimmungen der Deutschen Zoologischen Gesellschaft hat Klug aber trotzdem das Autorrecht, da er eine Type, den Pelecinus fuscator Pty., nannte, welcher Auffassung sich auch offenbar Herr Prof. Dalla Torre anschloss, als er in Band III seines Riesenkatalogs Klugs Namen hinter Monomachus setzte.

Monomachus umfasste bisher nach Abzug der nicht oder

unzulänglich beschriebenen fuscator (Pty.), apicalis Westw., falcator Westw., Klugii Westw., lateralis Westw. und segmentator Westw. die hinreichend gekennzeichneten Arten antipodalis Westw. (die einzige australische), gladiator Brull. (non Westw.), megacephalus Schlett., pallescens Schlett., glaberrimus Schlett., ruficeps Brull., variegatus Schlett., eurycephalus Schlett. und viridis Stdlm. M. fuscator (Pty.) war von Schletterer fraglich zu seinem M. variegatus gestellt worden. Durch die Güte der Herren Prof. Dr. Hertwig und Konservator Dr. Doflein habe ich nun Einsicht in das in der hiesigen Staatssammlung aufbewahrte typische Exemplar von fuscator nehmen können und bin nach dessen sorgfältigster Untersuchung in der Lage zu erklären, dass diese Art mit M. variegatus Schlett. nichts zu schaffen hat, sondern mit M. ruficeps Brull., Schlett. identisch ist, worüber ich weiter unten einige Erläuterungen geben werde. Aus derselben Sammlung liegt mir ferner in mehreren Exemplaren das bisher unbekannte ♀ von M. pallescens Schlett. vor, dessen Beschreibung ich gleichfalls folgen lasse.

Ein wichtiges Merkmal für die Unterscheidung der Monomachus-Arten, das den früheren Autoren entgangen ist, liefert die Aussenkontur der Mandibeln. Diese zeigen nämlich am Grunde, unmittelbar bei den Wangen, ein mehr oder weniger breites und tiefes Loch oder Spalte, und die bis zur Spitze der Mandibeln verbleibende Aussenfläche ist bei den einzelnen Spezies verschieden gestaltet, entweder flach, ein wenig gewölbt oder auch ungeheuer, blasenförmig angeschwollen. M. pallescens ♀ hat die tiefste und breiteste Mandibelnspalte, die, von oben gesehen, als weites, tiefes Loch erscheint. Bei megacephalus ♀ ist sie kleiner, aber hinter ihr schwillt der Oberkiefer bis zur Hälfte seiner Aussenfläche ausserordentlich auf. Wie sich diese Verhältnisse bei den mir in natura unbekannten Arten ausnehmen, lässt sich zur Zeit nicht sagen, da die jeweiligen Originalbeschreibungen keinen Aufschluss darüber geben. Der Gedanke lag nahe, dass das besprochene Loch am Oberkiefergrunde ein generisches Merkmal von Monomachus sein könnte, allein auch bei Pelecinus erscheint bei Unter-

suchung daraufhin ein leichter Eindruck an der betreffenden Stelle, wieder ein Beweis für die Verwandtschaft beider Gattungen. Gleichzeitig ergibt sich aber meines Erachtens aus dieser Wahrnehmung, dass Pelecinus phylogenetisch die ältere, Monomachus die jüngere Gattung ist, wofür u. a. der weitere Umstand spricht, dass diese ein fast vollkommen ausgebildetes Flügelgeäder — nur im oberen Teile des Venenrohrs der Diskoidalquerader findet sich eine Unterbrechung —, jene hingegen solches nur unentwickelt, teilweise verschwommen, besitzt.

Ein zweites, für die Artunterscheidung gut verwendbares Kennzeichen habe ich in der verschiedenen Länge der inneren Submedialzelle des Vorderflügels, verglichen mit derjenigen der Medialzelle, gefunden, übrigens ein Verhältnis, das auch sonst bekanntlich vielfach bei Hymenopteren, namentlich auch bei Schlupfwespen, zur Auseinanderhaltung von Arten, bisweilen sogar von Gattungen, herangezogen wird.

Ich gebe jetzt zu einigen bis heute ungenügend bekannt gewesenen Spezies Erläuterungen und füge am Schlusse, unter Verwertung der durch meine Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse, einen neuzeitlichen Bestimmungsschlüssel der Weibchen aller sichergestellten Monomachus-Arten und -Subspezies bei. Männchen sind nur mehr erst von M. pallescens Schlett. und M. viridis Stdlm. beschrieben, und diese sind schon rein äusserlich, an der Körperfarbe, leicht zu unterscheiden. Bei letztgenannter Art fehlt, beiläufig bemerkt, im Dalla Torreschen Katalog die Geschlechtsangabe.

Monomachus fuscator (Pty.).

! Pelecinus fuscator Perty, Delect. anim. artic. Brasil. (1830—34), p. 131 (sine indicatione nec sexus nec patriae)

Monomachus fuscator Klug, Zeitschr. f. Entomologie, III. (1841), p. 378

Monomachus fuscator Westwood, Ann. a. Mag. Nat. Hist. VII. (1841), p. 536 ♀

Monomachus fuscator Westwood, Trans. Entom. Soc. London III. P. 4 (1843), p. 253, no. 4 ♀

Pelecinus fuscator Romand, Rev. zool. (1844), p. 98, no. 5 (per errorem ♂)

Monomachus ruficeps Brullé, Hist. nat. Ins. Hymén., tome IV (1846), p. 535, no. 1 ♀

Monomachus ruficeps Westwood, Trans. Entom. Soc. London (2) I. P. 7 (1851), p. 216 ♀

Monomachus ruficeps Schletterer, Berl. entom. Zeitschr., Bd. XXXIII (1889), p. 216 ♀

Monomachus ruficeps Dalla Torre, Catal. hymen. hucusque cognit., vol. III, p. II (1901/02), p. 1088 ♀

nec Monomachus variegatus Schletterer, Berl. entom. Zeitschrift, Bd. XXXIII (1889), p. 214

nec Monomachus variegatus Dalla Torre, Catal. hymen. hucusque cognit., vol. III, p. II (1901/02), p. 1088.

Die in der hiesigen zoologischen Staatssammlung aufbewahrte, leidlich gut erhaltene Type Pertys, welche auf einem angestecktem Zettel in der Originalhandschrift dieses Autors die Fundortsangabe „Brasil." trägt, liess sich nach der Tabelle und der, wie immer, vorzüglichen Beschreibung Schletterers sogleich mühelos als M. ruficeps Brull. deuten. Letzter Name ist posterior und muss dem älteren fuscator Pty. weichen. Nach dem Befunde an dieser Type ergänze ich die bisherigen Beschreibungen noch in folgenden Punkten:

in der Mitte des Gesichts zeigt sich eine deutlich abgegrenzte, glänzend glatte Stelle von dreieckiger Gestalt, mit dem clipeus zugekehrter Spitze. Dieser trägt dort, wo das Gesicht aufhört, beiderseits je einen tief eingestochenen Punkt. Der Kopfschild-Vorderrand ist, soweit sich durch Lupenuntersuchung erkennen lässt, unbewehrt, abgestutzt, höchstens vielleicht ein wenig krenuliert. Das übliche Loch am Oberkiefergrunde erscheint verhältnismässig nicht sehr breit, mehr spaltenförmig. Sein grösster Durchmesser in der Längsrichtung der Mandibeln beträgt etwa die Länge des ersten Fühlergeisselgliedes. Die übrige Oberkiefer-Aussenfläche ist nur

Monomachus fuscator Pty. ♀

schwach konvex und mit groben Punkten besetzt. Der Abstand der hinteren Nebenaugen von einander ist bei der Type um ein gewisses grösser als die Länge des ersten Fühlergeisselgliedes, ja selbst etwas beträchtlicher als die Entfernung der hinteren Nebenaugen von den Netzaugen. Die erste Submedialquerader mündet ein wenig hinter dem Abschlusse der Medialzelle.

Der nach der dürftigen Beschreibung Westwoods nicht zu deutende M. lateralis dieses Autors, den Schletterer und Dalla Torre als fraglich zu der soeben besprochenen Art ziehen, liesse sich meiner Meinung nach ebenso gut zu M. pallescens Schlett. stellen. Die ungefleckten Flügel wenigstens, die er besitzen soll, würden, wie wir weiter unten sehen werden, daran durchaus nicht hindern.

Monomachus pallescens Schlett.

Schletterer, Berl. entom. Zeitschr., Bd. XXXIII (1889), p. 224 (Colombien [Bogotá]) ♂,

Dalla Torre, Catal. hymen. hucusque cognit., vol. III, pars II (1901/02), p. 1088 ♂.

♀. Long. corp. 13—15 mm. Quoad corporis sculpturam et colorem mari similis, differt facie subgrosse nec rugosopunctata, pronoti angulis lateralibus punctulatis, scutello antice disperse punctato alisque anticis apice vix an haud affumatis. Clipei margo anterior in medio bidenticulatus, in lateribus sinuatus. Mandibularum foramen basale valde profundum et amplum, reliqua superficies planiuscula, mediocriter dense grosseque punctata. Impressio occipitalis media sat conspicua. Antennae unicolores, piceae. Cellula submedialis interior quam cellula mediali longior.

Caput et thorax lateraliter et subtus sordide flavido-alba, supra fusca aut fusco-nigra. Abdomen laete ferrugineum, nitidissimum. Pedes brunnei.

Hab. Callanga, Perú.

Die mir vorgelegene Reihe von 7 ♂♂ und 4 ♀♀, sämtlich vom gleichen Fundorte, zeigt, dass die Annahme Schletterers,

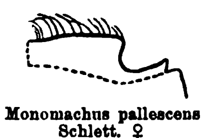
pallescens könnte möglicherweise nur das ♂ von M. ruficeps Brull. (recte fuscator [Pty.]) sein, unbegründet war. Die ♀♀ Exemplare stimmen in den Skulptur- und Färbungsverhältnissen so ziemlich miteinander überein und differieren auch von den ♂♂ nur in untergeordneten Punkten. Auffallend ist an ihnen das Zurückgehen der rauchigen Trübung der Vorderflügelspitze, eines Merkmals, auf das von Schletterer für die Artenunterscheidung Wert gelegt wurde. Allein dieses scheint bei den Peleciniden doch nur von bedingter Bedeutung zu sein, kommen doch auch bei Pelecinus polyturator neben den gewöhnlichen Stücken mit kaum angedeuteter Flügeltrübung solche mit scharf ausgeprägtem dunklen Vorderflügel-Spitzenfleck vor. So gezeichnete Individuen birgt das hiesige Staatsmuseum wie auch meine eigene Sammlung aus Peru und vom oberen Amazonenstrome.

M. pallescens ♀. Gleicht dem ♂ ausser in folgenden Punkten: Gesicht ziemlich dicht und grob, aber nicht runzlig punktiert. Vorderrücken nicht durchweg poliert glatt, sondern in den Aussenwinkeln der Seitenlappen ein wenig punktiert. Schildchen vorn mit einigen wenigen seichten Punkten, nicht vollkommen glatt. Flügel glashell, die vorderen an der Spitze nicht oder kaum getrübt. Fühler einfarbig pechschwarz.

Kopf und Thorax schmutzig weissgelb, Spitze, bisweilen auch ein Fleck in der Mitte, der Oberkiefer, das ganze Gesicht, Stirn und Scheitel mit Ausnahme der Netzaugen-Innenränder, Pro- und Mesosternum, ein Fleck auf dem Pronotum, Mesonotum, Schildchen und Mittelsegment schwarz oder verblasst schwarzbraun. Die Oberseite des Bruststücks, vom Mesonotum an, zeigt eine Neigung, ins Rotbraune überzugehen. Beine schokoladenbraun, I und II etwas heller, Hüften I und III schwarz. Hinterleib durchweg hellrostrot, lebhaft glänzend.

In beiden Geschlechtern ist die innere Submedialzelle der Vorderflügel länger als die Medialzelle und der nach dem Hinterkopfe zu abfallende Eindruck in der Mitte

des Scheitels deutlich ausgeprägt. Vorderrand des Kopfschildes in zwei kleine Zähnchen ausgezogen, seitlich eingebuchtet. Das Loch am Oberkiefergrunde, namentlich beim ♂, tief und breit, wie bei allen Monomachus-Arten, poliert glatt, die übrige Oberkiefer-Aussenfläche (Profil) ziemlich eben und mässig dicht und tief punktiert.


Monomachus pallescens Schlett. ♀

Beim ♂ geht das Schwarzbraun der Körperoberseite oft in Hellbraun über, eine Abänderung, die vorauszusehen war.

Profil des Oberkiefers nebenstehend.

Monomachus megacephalus Schlett.

Schletterer, Berl. entom. Zeitschr., Bd. XXXIII (1889), p. 220 ♀ („Brasilien")

Dalla Torre, Catal. hymen. hucusque cognit., vol. III, pars II (1901/02), p. 1088 ♀.

Ein ♀ im hiesigen Museum stammt aus Rio de Janeiro (Dr. Forel, 1877), womit als Vaterland der Art Südost-Brasilien festgestellt ist. Das Stück weist abweichend von der Beschreibung des Autors am Thorax kaum schwärzliche Färbung auf, nur am Prothorax und an den Mesopleuren ist eine solche in ganz geringer Ausdehnung angedeutet. Dagegen macht sich am unteren Teile der Schläfen und an den Wangen, sodann am Bruststück, namentlich auf der Unterseite, eine Neigung der braunen Grundfarbe, ins Gelbe überzugehen, bemerkbar. Die Länge des hinteren Fersengliedes finde ich entgegen Schletterers Feststellungen nicht grösser als diejenige der drei folgenden Fussglieder zusammen, was ebenso wie die Veränderlichkeit der rauchigen Trübung an der Vorderflügelspitze und der Körperfärbung, wiederum für die geringe Konstanz aller Artmerkmale bei Monomachus spricht.

Die Charakteristik vorliegender Spezies vervollständige ich in folgender Weise:

Das Loch am Oberkiefergrunde erscheint nur als eine verhältnismässig schmale Spalte, deren grösste

Breite die Länge des ersten Fühlergeisselgliedes nicht viel übertrifft, daran schliesst sich an der Aussenfläche des Oberkiefers eine ungeheuer blasen- oder würfelförmig angeschwollene Erhebung, die oben, d. h. nach dem Kopfschilde zu, ziemlich grob und dicht punktiert, unten poliert glatt und ungefähr so lang ist, als das bis zur Spitze verbleibende Stück des Oberkiefers. Dieses ist flach, an den Seiten runzlig punktiert, mitten glatt und mit gelben Borstenhaaren bestanden. Kopfschild in der Mitte des Vorderrandes bogenförmig ausgerandet. Erste Submedialquerader interstitial oder, mit anderen Worten, innere Submedialzelle so lang als die Medialzelle.



Monomachus megacephalus Schlett. ♀

Monomachus gladiator Brull. (non Westw.)

Synonymie wie bei Dalla Torre, Catal. hymen. hucusque cognit., vol. III, pars II (1901/02), p. 1088 (♀), nur hat als Autor Brullé, nicht Westwood zu stehen, da die von diesem 1843 gegebene Benennung mit keiner Beschreibung verbunden war.

Drei vom „Amazonenstrom“, ohne nähere Angabe, stammende ♀♀, die ich prüfen konnte, weichen von Schletterers Charakteristik in der Körperfärbung ab, indem bei ihnen nicht nur der Kopf, sondern auch das ganze Bruststück hellrotgelb und nur der Hinterleib an der Oberkante dunkelbraun bis pechschwarz ist. Mandibeln, ausser dem dunkelbraunen Endrande, Beinpaar I und II sowie die ganze Körperunterseite blassgelb. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass dies die von Brullé beschriebene Form ist, die mithin als typisch zu gelten hat, wohingegen das, was Cameron als ruficeps abbildet und beschreibt und Schletterer nach Umbenennung als gladiator charakterisiert, eine davon durch die dunkle Thoraxoberseite verschiedene Form darstellt, die wohl als Subspezies aufzufassen ist. Dieser Monomachus gladiator ruficeps Cam. ist vom Isthmus von Panama bekannt, ob er auch, worauf die

Angaben bei Schletterer zu deuten scheinen, in Bahia und am Amazonenstrome vorkommt, bleibt zum mindesten zweifelhaft. Ein gut umschriebenes Verbreitungsgebiet (Cayenne und Amazonenstrom) hat die zweite Subspezies, der die Bezeichnung Monomachus gladiator gladiator Brull. verbleibt. Wenn nicht alles trügt, vertritt sie in diesen Gegenden die erstgenannte, mehr nördliche Subspezies.

M. gladiator gladiator hat unter den mir bekannten Formen dieser Gattung den am stärksten gekrümmten Hinterleibsstiel.



Monomachus gladiator gladiator Brull. ♀

Der Kopfschild ist in der Mitte des Vorderrandes in einen starken Zahn vorgezogen. Das übliche Oberkieferloch ist nur eine schmale Spalte, die übrige Aussenfläche des Oberkiefers ist fast flach, nur sehr wenig gewölbt, poliert glatt, mit einigen wenigen zerstreuten, seichten Punkten. Erste Submedialquerader interstitial.

Bestimmungsschlüssel der Weibchen aller bis jetzt sichergestellten Spezies und Subspezies der Gattung Monomachus:

1. Bewohner Australiens. Hinterleibsstiel gerade, ziemlich kurz, untersetzt. (Flügel gänzlich glashell)
M. antipodalis Westw.

Bewohner Tropisch-Mittel- und Südamerikas. Hinterleibsstiel in der Mitte mehr oder weniger bogenförmig nach unten gekrümmt, verhältnismässig länger 2

2. Vorderflügel an der Spitze mit einem rauchbraunen, rundlichen, scharf abgegrenzten Fleck. Erste Submedialquerader interstitial 3

Vorderflügel in ihrer ganzen Ausdehnung vollkommen glashell oder an der Spitze nur schwach beraucht. Erste Submedialquerader interstitial oder ein wenig hinter dem Abschlusse der Medialzelle mündend 5

3. Körper schmächtig, 14—18 mm lang. Kopf von gewöhnlicher Grösse. Spalte am Grunde der Mandibeln schmal, deren übrige Aussenfläche fast eben. Kopfschild in der Mitte

des Vorderrandes in einen starken Zahn vorgezogen. Hinterkopf und Mittelrücken samt dem Schildchen poliert glatt (M. gladiator Brull.) 4

Körper kräftiger, 17—18 mm lang. Kopf auffallend gross. Spalte am Grunde der Mandibeln zwar schmal, aber dahinter ist die Aussenfläche der letzten zunächst gewaltig blasen- oder würfelförmig angeschwollen, am Ende flach. Kopfschild vorn bogenförmig ausgerandet. Hinterkopf seicht runzlig punktiert. Mittelrücken seicht und zerstreut punktiert, hinten poliert glatt. Skulptur des Kopfes und Mittelsegments gröber als bei gladiator.
M. megacephalus Schlett.

4. Thorax wie der Kopf hellrotgelb. Vorkommen: Amazonenstrom, Cayenne M. gladiator gladiator Brull.

Thorax oben schwarzbraun. Vorkommen: Panama.
M. gladiator ruficeps Cam.

5. Mittelsegment grösstenteils glänzend glatt, nur seitlich leicht punktiert runzlig. Vorderflügel an der Spitze sehr schwach, doch noch merklich rauchig getrübt. (Stirn mit reingestochenen Punkten mässig dicht besetzt. Scheitel, Mittelrücken und Schildchen poliert glatt.) Länge 20 mm.
M. glaberrimus Schlett.

Mittelsegment in seiner ganzen Ausdehnung sehr deutlich punktiert oder runzelig punktiert. Vorderflügel in ihrer ganzen Ausdehnung vollkommen glashell 6

6. Kopf und Thorax unten und seitlich blassgelb, oben dunkelbraun bis pechschwarz. Hinterleib glänzend rostrot. (Loch am Grunde der Mandibeln auffallend breit und tief, deren übrige Aussenfläche ziemlich eben. Vorderrand des Kopfschildes mitten mit zwei Zähnchen, zu beiden Seiten davon eingebuchtet. Eindruck auf der Mitte des Hinterrandes des Scheitels deutlich. Submedialzelle länger als Medialzelle.) Länge 13—15 mm. M. pallescens Schlett.

Körper anders gefärbt 7

7. Erstes hinteres Fussglied nur ungefähr so lang wie die drei folgenden Fussglieder zusammen. Hinterkopf seitlich nicht

weiter vorspringend als die Netzaugen und oben in seiner ganzen Ausdehnung mit mässig bis ziemlich dicht stehenden, reingestochenen Punkten besetzt. (Kopfschild-Vorderrand abgestutzt oder krenuliert. Erste Submedialquerader ein wenig hinter dem Abschlusse der Medialzelle mündend.) Länge 14—16 mm. M. fuscator (Pty.)

Erstes hinteres Fussglied sichtlich länger als die drei folgenden Fussglieder zusammen. Hinterkopf verbreitert, d. i. etwas weiter vorspringend als die Netzaugen und oben undeutlich, seicht skulpturiert, stellenweis vollkommen glatt 8

8. Vorderrand des Kopfschildes mit zwei kaum bemerkbaren Mittelzähnchen. Vorderrücken fast ganz glatt, bis auf eine sehr fein runzlig punktierte Stelle auf jeder Seite. Mittelsegment mit reingestochenen Punkten dicht besetzt. Länge 20 mm. M. variegatus Schlett.

Vorderrand des Kopfschildes mit zwei sehr deutlichen Mittelzähnchen. Vorderrücken seitlich fast in seiner ganzen Ausdehnung schräg gerunzelt. Mittelsegment runzelig bis punktiert runzelig, nach hinten sehr seicht skulpturiert. Länge 20 mm. M. eurycephalus Schlett.

Materialien zu einer Hymenopterenfauna der westindischen Inseln.

Von W. A. Schulz.

(*Eingelaufen 4. Juli.*)

Unsere Kenntnis von der Immenfauna der grossen und namentlich der kleinen Antillen ist noch immer äusserst dürftig. Von grossen Teilen dieses Archipels, beispielsweise von den Jungferninseln (mit Ausnahme von St. Thomas), Sta. Cruz, Anguilla, St. Martin, Barbuda, Montserrat, Dominica und St. Lucia dürfte meines Wissens bis heute auch nicht ein Hymenopteron bekannt sein. Nicht viel besser steht es mit anderen Inseln, wie Antigua und Barbados, von denen in der Literatur bloss ein oder zwei Hymenopteren-Arten aufgeführt sind.

Eine neuzeitliche Zusammenstellung des hymenopterologischen Wissensstandes von den westindischen Inseln wäre gewiss dankenswert. Mr. W. H. Ashmead hat nun 1900 eine solche im Anschluss an einen „report upon the Aculeate Hymenoptera of the Islands of St. Vincent and Grenada" in den Transactions of the Entomological Society of London, part II (July) auf Seite 299—367 unternommen, leider aber seine Aufgabe in unbefriedigender Weise durchgeführt. Nicht nur blieben in seinem Verzeichnis mehrere Quellenwerke, z. B. Smiths Xylocopa-Monographie, wodurch allein drei Arten dieser Gattung, fimbriata, colona und virginica hinzukommen, unberücksichtigt, auch die übrige Literatur erscheint in einer Weise benutzt, dass man seine Verwunderung darüber nicht zurückhalten kann. Muss es schon auffallen, dass in der Ashmeadschen Liste der

rätselhafte, noch immer nicht wiedergefundene Parapompilus naomi Sm. von S. Domingo, ferner Coelioxys tegularis Cress. (Cuba), Odynerus pruinosus Sm. (S. Domingo), Dielis tolteca Sauss. (Haiti), Plesia haemorrhoidalis (Fabr.) und andere Arten fehlen, so wird darin auch eine Anzahl Spezies unter verschiedenen Nummern und Gattungen doppelt aufgezählt. Ohne das ganze Verzeichnis daraufhin durchgegangen zu sein, finde ich folgende solche Fälle: 178 und 192 = Sphex ichneumoneus (L.) ab. aurifluus Pty., 194 und 198 = Podium fulvipes Cress., 255 und 257 = Polistes crinitus (Felt.) var. lineatus Fabr. und 259 und 264 = Polybia occidentalis (Oliv.). Nr. 190 und 191 sind lediglich Färbungsaberrationen oder auch Lokalrassen von Sceliphron figulus (Dhlb.), desgleichen gehören Nr. 273, 274 und 277—79 zu einer Art: Eumenes abdominalis (Drury). Auf der anderen Seite wird von Ashmead eine Fülle von Namen neuer, äusserst künstlicher Familien und Unterfamilien eingeführt; so zerreisst er die Scoliiden in die Subfamilie I: Scoliinae mit der Gattung Discolia und Subfamilie II: Elidinae mit Compsomeris (recte Elis), eine Anordnung, die jeder natürlichen Begründung entbehrt, denn bekanntlich lassen sich die Formenreihen Scolia und Elis nicht einmal als getrennte Gattungen halten, da sich Übergänge zwischen ihnen finden.

Im vorigen Jahre veröffentlichte dann Herr H. Friese auf Seite 197—210 der „Zeitschrift für systematische Hymenopterologie und Dipterologie“ eine Liste der von den vier grossen Antillen bekannten Bienenarten und beschrieb zwei neue. Rechnet man nun 5 weitere, bereits vordem von diesen Inseln bekannt gewesene Bienen, Xylocopa grossa, Podalirius tricolor, Epeolus rufoclipeatus, Temnosoma metallicum und Euglossa piliventris, hinzu, so ergibt sich ein Bestand von **99** bekannten Apidenarten auf den grossen Antillen, gewiss ein sehr mässiger, wenn die reiche Bienenfauna der paläarctischen Region, insbesondere der mediterranen Subregion, zum Vergleich herangezogen wird. Von der ganzen westindischen Inselwelt sind nach Vornahme der oben besprochenen Korrekturen in Ashmeads Arbeit rund **1300** verschiedene Hymenopterenformen bekannt,

und es bedarf wohl kaum eines besonderen Hinweises, dass diese Zahl nur einen winzigen Bruchteil der dort wirklich vorhandenen Formen darstellen wird.

Bei der Erörterung der zoogeographischen Verhältnisse findet es Friese a. a. O. auffallend, dass die Urbienen (Sphecodes, Temnosoma, Prosopis) und die Gattung Bombus auf den grossen Antillen fehlen. Diese Bemerkung bedarf aber zum mindesten einer Einschränkung, denn einmal ist ein Temnosoma, metallicum, schon von Jamaica bekannt, sodann legt das Vorkommen von drei durch Ashmead beschriebenen Sphecodes-Arten auf St. Vincent und von Bombus antiguensis auf Antigua den Gedanken nahe, dass beide letztgenannten Gattungen möglicherweise auch noch einmal auf den grossen Antillen werden aufgefunden werden. Mir selbst erscheint es für die Tierverbreitung bemerkenswert, dass noch von keiner Insel Westindiens, ausser Cuba und S. Domingo, Chrysididen und die Chalastogastren erst in sehr wenigen und lauter endemischen Formen nachgewiesen worden sind.

Da bei solcher Lage der Dinge einstweilen noch jeder, auch der geringste Beitrag zur Kenntnis der Hymenopteren-Fauna des in Rede stehenden Gebietes von Wert sein muss, war es mir sehr willkommen, als ich vom Konservatorium der hiesigen Königlichen Staatssammlung den Auftrag erhielt, deren Hymenopteren-Vorräte aus Westindien kritisch zu untersuchen und die dabei gewonnenen Ergebnisse zu veröffentlichen, welches Letzte ich hiermit tue.

Das mir vorgelegene Material bestand neben einigen Stücken aus alter Zeit aus der von Herrn Konservator Dr. F. Doflein auf einer zoologischen Studienreise nach Westindien und den Weststaaten der nordamerikanischen Union (1898) gemachten Ausbeute und einer kleinen vom Naturalienhändler Heyne erworbenen Sammlung aus Haiti.

Zitate gebe ich nur, soweit solche in den jeweiligen Bänden des Dalla Torre'schen Kataloges nicht oder noch nicht enthalten waren.

Scoliidae.

Plesia haemorrhoidalis (Fabr.)

1838 Guérin-Méneville, Revue Zoologique, p. 60, no. 11.

Eine zwar erstmalig schon vor 128 Jahren beschriebene, aber doch noch wenig bekannte Spezies. Fabricius gibt als deren Vaterland nur „Amerika", Guérin-Méneville (s. o.) Carolina, Lepeletier (1845) „Iles de l'Amerique" und Smith (1855) Nordamerika an. Daraus ergibt sich schon ihr Verbreitungsgebiet: die Südstaaten der nordamerikanischen Union, um den Golf von Mejico herum, und die westindischen Inseln; im einzelnen bleibt die Verbreitung allerdings noch festzustellen. Heute kann schon Haiti genannt werden, woher ich vier ♂♂ und ein ♀ zur Untersuchung habe.

Nur das Weibchen war bislang bekannt. Die Beschreibungen Guérin-Ménevilles und Lepeletiers reichen zu einer Erkennung aus, berücksichtigen aber zu wenig die plastischen Merkmale. Ich trage diese deshalb hier, soweit sie mir wichtig erscheinen, nach:

Weibchen. Die Netzaugen erreichen nicht ganz den Mandibelngrund, sondern lassen einen deutlichen, wenn auch nur schmalen Wangenraum frei. Kopfschild vorn abgestutzt, wie bei allen von mir bis jetzt daraufhin untersuchten Myzine- bezw. Plesia-Weibchen, kurz, dachförmig, d. h. mit einer kielartigen Längserhebung in der Mitte, von der aus die Seiten dachartig abfallen. Gesicht ziemlich stark gewölbt, grob und dicht punktiert, ohne Kanten an den inneren Augenrändern, Scheitel unmittelbar hinter den Nebenaugen glänzend glatt, seitlich und nach hinten zerstreut und mässig grob punktiert. Vorderrücken grob und dicht punktiert, seine horizontale Fläche bedeutend kürzer als das Dorsulum, an den Vorderecken abgerundet. Dorsulum mit je zwei parallelen, nach hinten konvergenten Punktfurchen vor den Flügelschuppen, wie das Schildchen und Hinterschildchen glänzend glatt und sparsam, mässig grob punktiert. Hinterschildchen an meinem Exemplare mit gelber Querbinde. Mittelsegment

matt, seitlich und oben abgerundet, oben sehr fein und dicht punktiert, die horizontale Fläche mitten zu einer stumpfen Spitze erhoben, um die herum mehrere grobe, reingestochene Punkte stehen. Hinterecken und Seiten des Mittelsegments mit sehr feiner, schiefer Querriefung. Hinterleib glänzend mit kaum wahrnehmbarer Punktierung, die nur gegen die Hinterränder der Segmente hin deutlicher wird. Endsegment grob längsrunzelig bezw. nadelrissig. An der Bauchseite sind die Segmente an den Hinterrändern in breiterer Ausdehnung und gröber punktiert, und die einzelnen Punkte senden dort lange abstehende Borsten aus.

Männchen. Länge 10—11 mm. Dem Weibchen in der Anlage der Körperzeichnung ähnlich, von gestreckterer Gestalt als dieses. Wangenraum schmal, aber deutlich. Kopfschild ziemlich lang, gewölbt, vorn abgerundet, grob und dicht punktiert. Gesicht schwach gewölbt, dicht runzlig punktiert, Scheitel in der Gegend der Ozellen glatt, glänzend, an den Seiten und hinten seicht, aber ziemlich dicht punktiert. Innenränder der Netzaugen ausgerandet. Vorderrücken wie beim Weibchen kurz, aber im Verhältnis zu der beim Männchen grösseren Länge des Dorsulums noch kürzer, gedrängt und grob punktiert, an den herabgezogenen Seitenecken querriefig; Hinterrand breit bogenförmig. Dorsulum wie beim Weibchen mit je zwei seitlichen Längsfurchen, nebst Schildchen und Hinterschildchen seicht, aber ziemlich dicht punktiert. Mittelbrustseiten runzlig punktiert. Mittelsegment kurz, seitlich und oben abgerundet, mit dichter runzeliger Punktierung, die an den Seiten die Neigung zeigt, in Querriefung überzugehen. Hinterleib glänzend glatt, mit feiner sparsamer Punktierung, die Vorder- und Hinterränder von Segment 2—5 gänzlich glatt; Bauchseite ebenfalls glänzend glatt, nur in der Mitte und gegen den Hinterrand der Segmente zeigt sich eine zerstreute feine Punktierung.

Körperbehaarung hellgelblich, ihre Dichtigkeit richtet sich, wie bei allen Scoliiden, nach der Stärke und Dichtigkeit der Punktierung.

Schwarz, Oberlippe, Unterseite der Fühlergeissel und Endsegment an der Spitze rotbraun. Beine orangerot, mit einer Neigung, namentlich an den Tarsen, ins Gelbe überzugehen; Hüften schwarz, gelb gefleckt.

Gelb sind: die Mandibeln ausser der schwarzen Spitze, der Kopfschild ausser zwei schwarzen Flecken an der Basis, ein Strich an den Innenrändern der Augen, der bis in die Ausrandung reicht, zwei Flecke zwischen den Fühlern, die Spitze des Fühlerschafts unten, eine mitten breit unterbrochene Querbinde am Vorderrande des horizontalen Teiles des Vorderrückens, eine solche längs dessen Hinterrandes, Innenhälfte der Flügelschuppen (Aussenhälfte rotbraun), drei kleine Flecke am Hinterende des Dorsulums, einer in der Mitte, zwei neben den Flügelschuppen, eine Querbinde auf dem Schildchen und Hinterschildchen, zwei Flecken an den Mittelbrustseiten, ein länglicher vorn, unter den Flügeln und ein rundlicher hinten, gegen die Metapleuren hin, zwei Flecke an den Hinterecken des Mittelsegments, endlich schmale Querbinden am Hinterrande von Segment 1—6, wovon nur die erste und letzte mitten schmal unterbrochen ist; diese Binden setzen sich bei Segment 2—6 auch auf die Bauchseite fort, sind aber dort mitten unterbrochen. Hinterleib oben irisierend. Flügel glashell, wie beim Weibchen, Stigma und Adern rotbraun.

Plesia ephippia (Fabr.) (non Guér.).

1793 Tiphia ephippium Fabricius, Entomologia systematica etc., tom. II, p. 225, no. 10,

1804 Tiphia ephippium Fabricius, Systema piezatorum p. 234, no. 14,

1838 Plesia ephippium Guérin-Méneville, Revue zoologique p. 57, no. 1,

1840 Myzine ephippium Blanchard, Hist. nat. Insect. III p. 372, no. 4 (nicht selbst eingesehen, nach Dalla Torre),

1855 Myzine ephippium Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part III, p. 79, no. 48,

1897 Plesia ephippia Dalla Torre, Catal. Hymen. hucusque cognit., vol. VIII, p. 131,

1900 Myzine ephippium Ashmead, Trans. Entom. Soc. London, part. II, p. 315, no. 334.

2 Weibchen von Haiti. Von dieser Insel ist die Art in der Literatur noch nicht erwähnt. Das Männchen scheint noch unbekannt zu sein, und die bisher vom Weibchen vorhandenen Beschreibungen sind unzulänglich, namentlich in Hinsicht der Skulpturverhältnisse, weshalb ich sie in folgender Weise ergänze:

Weibchen: Körperlänge 16 mm. Schwarz, glänzend, ein Fleck auf dem Dorsulum und die Aussenhälfte der Flügelschuppen rotgelb, Hinterränder der Rückensegmente des Hinterleibes hornbraun durchscheinend. Mandibeln, Fühlergeissel, Schienen II und III und Hinterleibsspitze rotbraun. Schienensporen weiss. Fühlerschaft, Bruststück vorn und an den Seiten, Beine, Hinterleib, ausser dem Pygidium, abstehend silberweiss behaart, letztes rotbraun beborstet. Netzaugen bis zum Oberkiefergrunde reichend. Kopfschild kurz, ziemlich flach, grob punktiert, in der Mitte eine kielartige Längserhebung angedeutet, Vorderrand abgestutzt. Innere Augenränder kantig aufgeworfen, Stirn mässig gewölbt, grob runzlig, Scheitel weitläufig und fein punktiert. Vorderrücken vorn sattelartig niedergedrückt, dort dicht punktiert, die die Einsenkung hinten abschliessende steile Wand längsnadelrissig, der darauf folgende horizontale Teil flach (mit dem Dorsulum, den Schildchen und dem Mittelsegment in einer Ebene liegend), an den Vorderecken grob runzelig, sonst fein und sparsam punktiert. Die Länge dieses horizontalen Abschnitts kommt etwa derjenigen des Fühlerschafts gleich. Hinterrand des Vorderrückens mitten fast geradlinig, an den Seiten sanft nach hinten gebogen. Dorsulum kurz, nur wenig länger als der horizontale Teil des Vorderrückens, an den Seiten, neben den Flügel-



Plesia ephippia (Fabr.) ♀

schuppen, mit je zwei tiefen, parallelen, nach hinten konvergenten Punktfurchen, wovon die äusseren seitlich den grossen roten Mittelfleck begrenzen, der auch vorn durch den Hinterrand des Vorderrückens, hinten durch das Schildchen fast geradlinig durch dort vorhandene Furchen scharf abgegrenzt wird. Dorsulum, Schildchen und Hinterschildchen glänzend glatt, mit wenigen seichten Punkten. Flügel glashell, in der Aussenhälfte gebräunt. Mittelsegment fein pruinös, graulich behaart, mattglänzend, ohne Mittelkiele, in einen horizontalen vorderen und fast senkrecht abfallenden hinteren Teil zerlegt, an der Berührungsstelle beider finden sich drei scharfe, parallele Bogenwülste; horizontale Fläche ein wenig gewölbt, fein lederartig erscheinend, mit einer sehr feinen, nur bei stärkerer Vergrösserung erkennbaren runzligen Punktierung, der fehlende Längskiel in der Mitte ist, wie dies auch sonst bei Plesia-Arten vorkommt, durch 6—8 grobe Punkte angedeutet; die abschüssige Fläche hat eine feine Querrunzelstreifung. Seiten des Mittelsegments mit schiefen Querrunzeln. Abdominal-Segment 1—5 mit seichter, zerstreuter Punktierung, die nur an den Hinterrändern der Segmente dichter steht, Pygidium dicht runzelig punktiert, mit ein wenig aufgeworfenen Rändern; Bauchseite glatt, mit gröberer Punktierung an den Segmenthinterrändern.

Tiphia argentipes Cress.

1881 Dewitz, Berl. Ent. Zeitschrift, p. 204,

1900 Ashmead, Trans. Entom. Soc. London, part. II, p. 315, no. 348.



Tiphia argentipes Cress. ♀

Zwei Männchen und ein Weibchen von Haiti. Bisher erst aus Cuba, Puerto Rico und St. Vincent bekannt.

Die von mir untersuchten Exemplare passen genau zu Cressons Originalbeschreibung, nur ist beim Weibchen die Körperlänge etwas grösser als darin angegeben, nämlich 13 mm. Von Wichtigkeit erscheint mir noch hervorzuheben, dass der Hinter-

rand des Vorderrückens herzförmig verläuft, indem er mitten in eine stumpfe Spitze mit jederseits danebenliegender bogiger Einbuchtung vorgezogen ist. Am deutlichsten zeigt sich dies am Weibchen, weniger ausgeprägt im männlichen Geschlechte. Die Vorderhälfte des Pygidiums ist beim Weibchen schwarz, sehr grob und dicht punktiert, von der verbleibenden hinteren Hälfte ist der erste Teil ebenfalls schwarz, aber sehr fein punktiert, matt, die Spitze hellbraun, glänzend glatt.

Scolia (Dielis) atrata Fabr.

Zwei Männchen und ein Weibchen aus Haiti entsprechen der typischen Form von den grossen Antillen. Ob diese Spezies wirklich ausserhalb der Antillen vorkommt, und inwieweit eventuell die unter dieser Artbezeichnung bisher geführten Formen aus Südamerika wirklich bei ihr zu belassen sind, wird nur an Hand reichen Materials mit exakten Fundortsangaben zu ermitteln sein, über das ich zur Zeit nicht verfüge.

Die Fabricius'sche Gattung Elis ist ein Mischgenus, dessen Arten drei, wo nicht vier verschiedenen Gattungen angehören. Anscheinend deshalb haben Ashmead und andere neuere Autoren die Bezeichnung Elis fallen lassen und statt deren die zweitälteste, Campsomeris Lep. (1845) wieder eingeführt. Ein solches Verfahren ist aber nach den gegenwärtig gültigen zoologischen Nomenklaturgesetzen unzulässig, vielmehr bleibt der Gattungsname Elis zu recht bestehen, denn nachdem von den durch Fabricius in seinem Systema Piezatorum (1804) aufgestellten sieben Arten drei inzwischen bereits anderen Gattungen zugeteilt sind und eine (cochleata) undeutbar bleibt, tritt einfach das sogenannte Eliminationsverfahren in Kraft, gemäss dessen für die übrigbleibenden drei wirklichen Elis- (Campsomeris-) Spezies dieser alte Name erhalten bleibt.

Nach den von Dewitz am oben angegebenen Orte S. 204 bekanntgemachten Beobachtungen Krugs gräbt D. atrata auf Puerto Rico Löcher in die Erde und benutzt als Larvenfutter grosse Heuschrecken, bei deren Heranschaffung und Niederbringung in die Löcher sie in eigentümlicher Weise verfährt.

Scolia (Dielis) dorsata Dofleini nov. subsp.

Ein ähnliches Verhältnis, wie zwischen Dielis tricincta und limosa, worüber weiter unten berichtet werden wird, besteht zwischen D. dorsata und tolteca. Auch diese beiden Formen haben wohl nur subspezifischen Wert; sie aber gänzlich zusammenzuwerfen, wie es Cameron in der Biologia centrali-americana, Hym. vol. II, p. 230 tut, erscheint mir nicht angängig. Jedenfalls ist, um in diese Frage Klarheit zu bringen, ein weit grösseres und sorgfältiger etikettiertes Material erforderlich, als es mir gegenwärtig zur Verfügung steht. Für die Sonderung der Männchen der fraglichen beiden Formen wird die Untersuchung der Geschlechtsteile unerlässlich sein.

D. dorsata bewohnt nach der einschläglichen Literatur und soweit mir sonst aus Sammlungen bekannt ist, Ost- und Nordbrasilien, Guiana, Venezuela, von den westindischen Inseln St. Barthélemy und St. Thomas.

Exemplare von den kleinen Antillen — in der Münchner Staatssammlung konnte ich sechs Weibchen und sechs Männchen aus Martinique (III.—IV.), St. Kitts (IV.) (Doflein leg.) und St. Barthélemy untersuchen — weisen im weiblichen Geschlechte gegen die Festlandsform konstante Unterschiede auf, insofern als bei ihnen die Flügel heller, nicht schwarzbraun, sondern hellbräunlich, subhyalin sind und, von oben betrachtet, nur schwach ponceau, nicht tief dunkelblau glänzen. Ausserdem ist bei den Weibchen die helle Bindenzeichnung am Hinterleibe nicht, wie bei Stücken aus Südamerika, satt orange- bis blutrot, vielmehr schmutziggelbrot. Ich glaube nicht fehlzugehen, wenn ich diese Form als eine den kleinen Antillen eigentümliche Subspezies anspreche, die Scolia (Dielis) dorsata Dofleini heissen mag. Die Vermutung liegt nahe, dass sie im Osten (auf den kleinen Antillen) D. tolteca vertritt, die aus Westindien bisher nur von Haiti bekannt und demnach auf ihrem Vordringen vom zentralamerikanischen Festlande her, ostwärts über die grossen Antillen nicht hinausgekommen sein mag.

An den Männchen von Dielis dorsata Dofleini lassen sich, wie vorauszusehen war, ohne Untersuchung der Genitalien beim besten Willen keine Unterschiede von den Männchen der typischen dorsata erkennen.

Scolia (Dielis) tolteca Sauss.

Diese Spezies verbreitet sich über Chile, Honduras, Mejico, Unter-Californien, also über die Andenkette, und geht auch nach Haiti hinüber. Stücke von dieser Insel, die mir in der hiesigen Museumssammlung in einem Pärchen vorliegen, zeigen im Weibchen hellere Flügel, namentlich ist bei ihnen die Vorderflügelbasis fast glashell. Aber auch eins der weiblichen Exemplare aus Honduras in meiner eigenen Sammlung hat schon ziemlich aufgehellte Flügel. Ich erwähnte bereits, dass D. tolteca Sauss. und dorsata (Fabr.) sicher artlich zusammengezogen werden müssen, dies unterbleibt aber besser bis zu einer monographischen Neubearbeitung der Scolien, an Hand eines reichhaltigen Materials.

Scolia (Dielis) tricincta tricincta (Fabr.).

1865 Scolia (Elis) fulvohirta Cresson, Proc. Ent. Soc. Philadelphia, IV, p. 119.

Mr. Kirby hat das Studium der Scolien als leicht bezeichnet, mit Unrecht, denn einmal sind, wie ich schon eingangs dieser Abhandlung erwähnte, zwischen den Gattungen Scolia, Elis und wahrscheinlich auch Liacos Übergänge vorhanden, sodann variieren die Formen dieser Familie ganz ausserordentlich, nicht nur hinsichtlich der Färbung, sondern auch, was bei Immen schwerer ins Gewicht fällt, betreffs der Skulptur. Ferner kommt in Betracht, dass es bei Scolien Gruppen von „Arten“ gibt, die eng verwandt sind und in Wirklichkeit wohl Formenkreise von geographischen Rassen oder Subspezies darstellen, deren richtige Gliederung einstweilen noch grosse Schwierigkeiten macht. Als Beispiel dafür sei nur die oben behandelte Sippe um Dielis dorsata (Fabr.) und

diejenige um Dielis iris (Lep.) genannt. Einen weiteren Belag dafür liefert der durch die obengenannte Form repräsentierte Kreis.

Cressons Elis fulvohirta ist nichts anderes als die altbekannte Dielis tricincta (Fabr.) mit grösstenteils schwarzen Schenkeln und ebensolchen Fühlern.

Tricincta ist im hiesigen Museum in mehreren Exemplaren aus Haiti, speziell auch Port au Prince und aus St. Thomas vertreten. Auf den ersten Blick erscheint sie durch die rotbraune Behaarung in beiden Geschlechtern als eine gut gesonderte Art. Vergleicht man aber grössere Reihen von ihr mit solchen der nächstverwandten, bisher als getrennte Art gefassten Form Dielis limosa (Burm.), so erkennt man unschwer, dass beide in einander übergehen. Zwar sind die Männchen von tricincta von denen der limosa schon durch andersfarbige Körperbefilzung und -Behaarung verschieden, indes gibt es auch hier schon Stücke, die einen Übergang von der einen zur andern Form andeuten. Am schwierigsten lässt sich nun aber zwischen den Weibchen der beregten beiden Formen eine Grenze ziehen, denn die gelbe Fleckenzeichnung auf den Hinterleibsringen beider ist bei typischen Stücken wohl verschieden, allein bei Betrachtung grösserer Suiten finden sich bald Übergangsstücke. Typische tricincta-Weibchen haben ein charakteristisch gebildetes Mittelsegment, indem dessen obere Kante scharf gerandet und in der Mitte leicht dreieckig vorgezogen ist, indes besitze ich ein Weibchen vom Vulkan Chiriqui mit der Hinterleibsfleckenzeichnung der limosa, bei dem das Mittelsegment ebenso geformt ist.

Was die geographische Verbreitung betrifft, so ist die letzterwähnte Form in der Literatur nur von Mejico angegeben. Mir liegen davon ausser dem Chiriqui-Weibchen ebenfalls Exemplare von Mejico (Orizaba in der tierra templada, seiner Zeit von de Saussure gesammelt) vor. D. tricincta soll nicht nur auf den Antillen (Haiti, Cuba, Puerto Rico, Jamaica, St. Thomas), sondern merkwürdigerweise auch in einigen mejicanischen Staaten, ferner in Guatemala, Nicaragua und Costa

Rica vorkommen. Es muss dahingestellt bleiben, ob hier nicht vielleicht eine Vermengung der beiden in Frage stehenden Formen seitens der Autoren stattgefunden hat. Einen Anhalt dafür, dass diese Vermutung richtig ist, scheinen mir die Bemerkungen Camerons über tricincta in der Biologia Centrali-Americana, Hym. II, p. 234 sowie der Umstand zu liefern, dass dieser Autor für die letztgenannte Form eine grosse Anzahl von Fundorten namhaft macht, limosa hingegen sich begnügt anzuführen, ohne sie anscheinend untersucht zu haben. Auf der anderen Seite bezeichnen de Saussure und Sichel (Cat. esp. Scolia, 1864, p. 250) die tricincta als „rara species, in museis fere ignota", während limosa in Mejico gemein sei.

Unbeschadet einer späteren genaueren Untersuchung bei Gelegenheit einer neuen Monographie der Scoliiden glaube ich schon jetzt annehmen zu müssen, dass die uns hier beschäftigenden Formen immerhin als Subspezies haltbar und in folgender Weise verbreitet sind:

Scolia (Dielis) tricincta tricincta (Fabr.)

auf den westindischen Inseln (ihr Vorkommen in Zentralamerika bleibt fraglich),

Scolia (Dielis) tricincta limosa Burm.

auf dem zentralamerikanischen Festlande (Panama, Mejico).

Pompilidae.

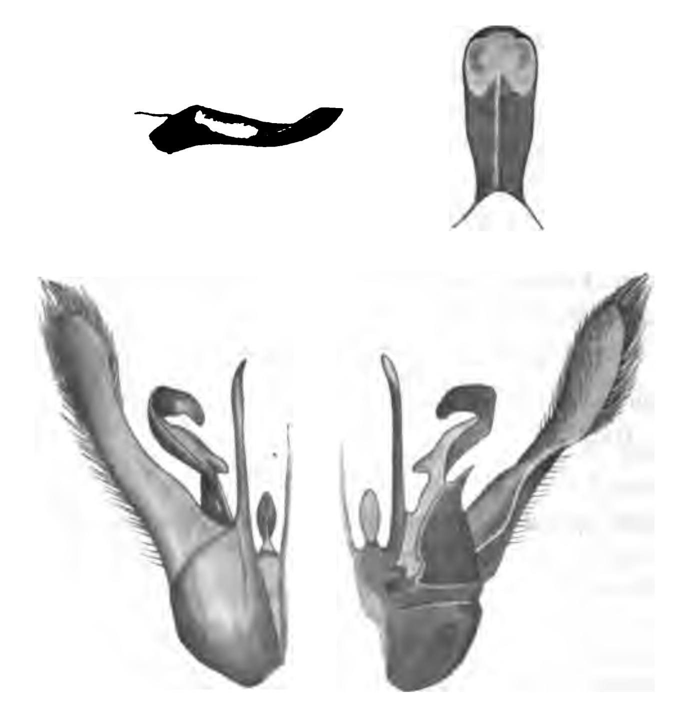
Pepsis terminata Dhlb.

1900 Ashmead, Trans. Entom. Soc. London, part II p. 229, no. 56 und p. 309, no. 210.

Bekannte Verbreitung: Ostküste von Brasilien, Surinam, Yucatan, Mejico, Cuba, Martinique, St. Vincent.

1 Pärchen von Martinique (IV. 1898, Weibchen St. Anne: 6. IV., Doflein leg.) in der hiesigen Staatssammlung. Das Weibchen zeichnet sich durch hervorragende Grösse: Körperlänge 40, Flügelspannweite 73 mm und durch gelbbraunes Flügelgeäder, welche Farbe auch zum Teil auf die angrenzende

Flügelfläche übergreift, aus. Das Männchen war bislang noch problematisch. R. Lucas, der 1894 in der Berliner entomologischen Zeitschrift S. 449—840 (mit Tafel XXII—XXXIII) eine Monographie der Gattung Pepsis veröffentlichte, kannte es nicht, sondern beschränkte sich darauf, eine Beschreibung Mocsárys vom Jahre 1885 zu kopieren. In dieser fehlte aber eine Angabe über das zur Auseinanderhaltung von Pepsis-



Pepsis terminata Dblb. ♂

Männchen wichtigste Merkmal, nämlich die Subgenitalplatte und das Kopulationsorgan, welchem Mangel ich nun abzuhelfen in der Lage bin, da ich, wie oben erwähnt, ein Männchen besitze. Abbildungen beider Organe s. obenstehend!

Die Subgenitalplatte ist ziemlich schmächtig, am Anfange beiderseits etwas eingeschnürt, dann parallelrandig, mit abge-

stutztem Hinterrande und abgerundeten Hinterecken. Im Profil betrachtet, erscheint sie mitten sanft nach oben gekrümmt, und über ihre ganze Länge läuft ein Mittelkiel, der am Anfange sich schwach erhebt und sich erst ganz gegen das Ende hin abflacht. Der aufgebogene Endteil hat am Hinterrande zu beiden Seiten je einen Höcker bezw. Randverdickung. Die Subgenitalplatte ist durchaus glänzend glatt, schwarz und an den Seitenrändern fein schwarz behaart.

Eine längere schwarze, sonst jedoch nicht irgendwie ausgezeichnete Behaarung weist auch der sechste Bauchring auf. Die äusserste Fühlerspitze ist beim Männchen rostrot.

Die von Mocsáry gegebene Beschreibung passt, abgesehen von den unerwähnt gelassenen Genitalteilen, durchaus auf die vorliegende Art; wenn sich Lucas, wegen des matten Flügelglanzes, an dem Passus: alis saturate nigro-violaceis, splendidis, stiess, so übersah er, dass kurz darauf, bei Erklärung der Unterschiede von P. pretiosa Dhlb., der Satz: alis saturate (non laete) nigro-violaceis, folgte.

Das oben erwähnte Weibchen der hiesigen Staatssammlung war fälschlich als P. grossa Fabr. bestimmt, von welcher Art P. terminata sofort durch breitere, weisse Vorderflügelspitze, andere Flügelfärbung und sonstige Kennzeichen unterschieden ist.

Wünschenswert wäre ein neuerlicher Bestimmungsschlüssel für die Pepsis-Arten, denn einerseits ist seit Erscheinen von Lucas' Monographie eine ganze Reihe neuer Formen beschrieben worden, andererseits erweist sich die Tabelle dieses Autors selbst, a. a. O. S. 829, als etwas unübersichtlich. Eine störende Auslassung findet sich darin auf S. 831, wo vor dem Gegensatz zu Abschnitt II. a. „Flügel vorwiegend schwarzbraun u. s. w.“ der Buchstabe b fehlt.

Pepsis hexamita R. Luc.

Ein Weibchen dieser wenig bekannten, von der Antillen-Insel St. Croix beschriebenen Art, hat Dr. Doflein im April 1898 auf der kleinen Insel Nevis erbeutet. Als einzige Abweichung von der Originalbeschreibung finde ich bei diesem Exemplar

eine geringere Grösse: Körperlänge 20, Vorderflügellänge 20, Flügelspannweite 39 mm. Die schöne blaugrüne, plüschartige Pubescenz auf dem Vorderflügel ist deutlich sichtbar.

Ob, wie Dr. Lucas vermutete, P. hexamita nur eine Varietät oder, was mir plausibeler erscheint, eine Subspezies von seiner P. excelsa vorstellt, vermag ich leider ebenfalls zur Zeit aus Mangel an hinreichendem Vergleichsmaterial nicht zu entscheiden.

Pepsis rubra (Drury).

1773 ♀ Sphex rubra Drury, Illustr. Nat. Hist. II, p. 75, t. 39, f. 6

autor. posterior. uti apud Dalla Torre, Catal. Hymen. hucusque cognit., vol. VIII, 1897, p. 260

1791 ♂ Sphex sanguigutta Christ, Naturgesch. Ins. v. Bienen, Wespen und Ameisengeschlecht, p. 293, t. XXIX, f. 3

autor. posterior. uti apud Dalla Torre, ibidem p. 262

1845 ♂ Pepsis quadrata Lepeletier, Hist. nat. Insect. Hymén., tome III, p. 478, no. 14

autor. posterior. uti apud Dalla Torre, ibidem p. 260.

Die Systematik der Gattung Pepsis hat durch die vor 9 Jahren erschienene Monographie R. Lucas' viel von ihrer alten Schwierigkeit eingebüsst, aber noch immer genug des Verwickelten behalten. Dies wird bei einem Blick auf die obenstehende Synonymenreihe, die Eingeweihten vielleicht etwas überraschend erscheinen mag, sofort klar werden.

Mit zu den am wenigsten geklärten Gruppen gehört diejenige der rotflügeligen Formen um P. rubra mit sanguigutta (Christ), rubra (Drury) selbst, acroleuca R. Luc. und pulchripennis Mocs. Die letztgenannte Art scheidet von der Betrachtung als eine sehr markante, nicht zu verwechselnde aus. Acroleuca und rubra nun sind wohl im Männchen durch die verschiedene Gestalt der Subgenitalplatte und andere Merkmale leicht auseinanderzuhalten, die Weibchen aber dürften erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Acroleuca kenne ich noch nicht, es fällt jedoch auf, dass Lucas auf derselben Seite (730) einmal

das Weibchen davon erläutert und drei Zeilen tiefer erklärt: „Weibchen noch unbekannt“. Die Unterschiede, die er in seinem Schlüssel (S. 726) für die Weibchen von acroleuca und rubra anführt, erscheinen mir trotz meines Unbekanntseins mit erstgenannter Art nicht alle zutreffend, denn an keinem der mir von der letztgenannten vorliegenden Weibchen mündet die zweite Diskoidalquerader, wie dort angegeben, in der Mitte des Hinterrandes der dritten Kubitalzelle, sondern stets vor der Mitte. Sollte Dr. Lucas hier vielleicht eine Verwechslung unterlaufen sein, und der auf die Einmündung der zweiten Discoidalquerader bei rubra bezügliche Passus nicht etwa auf acroleuca und umgekehrt Bezug haben?

Was schliesslich das Verhältnis von P. sanguigutta (Christ) zu rubra (Drury) anbelangt, so kann an der Zusammengehörigkeit beider Formen als dimorpher Geschlechter einer Art länger kein Zweifel sein. Beide kommen nur auf den westindischen Inseln und auf dem nahegelegenen nordamerikanischen Festlande (Texas) vor — angeblich auch in „Südamerika“, was aber noch problematisch und wahrscheinlich falsch ist — und sie sind dort, wie man weiss, häufig. Sowohl Christs „Bluttropf“ als auch der „Rotflügel“ sind in den seit ihrer erstmaligen Beschreibung verstrichenen 110—130 Jahren von einer langen Reihe von Schriftstellern behandelt worden, jedoch immer nur in einem Geschlechte. Allerdings wird im Dalla Torre bei rubra auch das Männchen aufgeführt, aber dies basiert lediglich auf einer theoretischen Nomenklaturmassregel Mocsárys, indem dieser 1885 Pepsis formosa (Say), wovon beide Geschlechter bekannt sind, mit rubra vereinigte. Dafür ist indessen, obschon Cameron in der Biologia Centrali-Americana dem Beispiele Mocsárys folgte, kein Anhalt gegeben.

Nach dem soeben Ausgeführten müsste es ja nun geradezu wunderbar sein, wenn zu P. rubra noch immer nicht das Männchen, und zu P. sanguigutta kein Weibchen gefunden worden sein sollte. Ich meinerseits glaube auf die fehlenden Gatten nicht länger warten zu sollen und vereinige hiermit beide bisher getrennt geführten Formen auf Grund der mir

vorliegenden Serie von 16 Stücken, beiderlei Geschlechts, von den Inseln Haiti, Nevis (IV. 1898), St. Kitts (IV. 1898, Doflein leg.) und St. Thomas (13. X. 1878, Forel leg.), unter dem ältesten Namen P. rubra (Drury). Dabei leitet mich in erster Linie die übereinstimmende geographische Verbreitung, aber es finden sich in beiden Geschlechtern auch so grosse strukturelle Einklänge, namentlich in Hinsicht der Kopf- und Mittelsegmentbildung, der Gestalt der dritten Kubitalzelle und der Art der Mündung der zweiten Discoidalquerader, dass die letzten Bedenken gegen diese Vereinigung schwinden.

Die roten Flügelflecke der Männchen variieren in Ausdehnung beträchtlich, und bei einem Stück aus St. Kitts ist im Hinterflügel das Rot fast völlig erloschen.

Die ebenfalls nur in einem Geschlechte (Männchen) beschriebene P. quadrata Lepeletiers fällt auch artlich mit P. rubra zusammen, wofür schon der Fundort (St. Domingo) spricht, wo sicher nicht noch eine zweite Art zu Hause sein wird, die Lepeletiers Beschreibung korrespondiert. Nebenher passt letzte, wenn man sie näher prüft, vortrefflich auf rubra-Männchen (sanguigutta).

Pepsis marginata Pal.-Beauv.

1 Männchen von Haiti.

Die Art hat nachstehende bekannte Verbreitung: Cuba, St. Domingo, Puerto Rico und Texas. Früher wurde sie mit P. heros Fabr. vermengt und daher kommt es, dass für diese in der Literatur, so auch noch wieder bei Dalla Torre und Ashmead, Westindien als Vaterland angegeben wird. Heros Fabr. kommt nach dem heutigen Stande unserer Kenntnisse nur in dem guianischen und peruanischen Teile Amazoniens, jedenfalls nicht ausserhalb Südamerikas vor. Was Dewitz als heros von Puerto Rico anführt, ist natürlich auch nichts anderes als marginata Pal.-Beauv., wie schon seine Bemerkungen über die Flügelfärbung vermuten lassen. Offenbar ist Dewitz zu der irrtümlichen Bestimmung durch die falsche Benennung von Dahlboms Originalexemplaren im Berliner Museum verleitet worden.

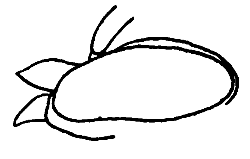
Dagegen fällt P. domingensis Lep. so gut wie sicher mit marginata zusammen.

Pompilus Cressoni Dew.

1900 Ashmead, Trans. Ent. Soc. London, p. 310.

Bis jetzt nur von Puerto Rico und Jamaica bekannt, wird diese zierliche Art nunmehr auch aus Haiti nachgewiesen. Zwei Weibchen daher, in der hiesigen Staatssammlung, decken sich mit der Originalbeschreibung gut, nur geht das Rot der beiden hintersten Beinpaare auch auf das erste Tarsenglied über, was bei der Veränderlichkeit der Färbung in der Ordnung der Hautflügler indes nicht weiter auffällt. Die Länge meiner Exemplare beträgt 10 und 7 mm.

Ausser der längeren silberweissen Behaarung und Beschuppung an Kopf, Bruststück und erstem Hinterleibsring ist das ganze Tier fein pruinös weiss oder hellgrau behaart. Der Kopfschild ist kurz, wenig gewölbt, am Vorderrande breit abgestutzt mit abgerundeten Seitenecken. Seitwärts betrachtet erscheint er abstehend, da er nicht in der Längsaxe der Mandibeln liegt. Die Skulptur ist unter der pruinösen Haarbekleidung nicht zu erkennen, aber die Kante des Vorderrandes ist glatt. Die Netzaugen reichen fast bis zum Oberkiefergrunde und lassen nur einen sehr kurzen Wangenraum frei, ihr geringster Abstand auf dem Scheitel beträgt die Länge des ersten + zweiten Fühlergeisselgliedes. Stirn leicht gewölbt, Nebenaugen in ein gleichschenkliges Dreieck gestellt, der Abstand der hintersten von den Netzaugen ist gleich der doppelten Länge des ersten Fühlergeisselgliedes, derjenige der hinteren beiden Nebenaugen von einander ist etwas grösser und kommt etwa der halben Länge des zweiten Fühlergeisselgliedes gleich. Mittelsegment unter der Haarbekleidung glatt. Hellgelb ist noch der Saum des Schenkelringes von Beinpaar I gegen den Schenkel hin.


Pompilus Cressoni Dew. ♀

Sphegidae.

Sceliphron caementarium (Drury) aberr. lunatum (Fabr.).

Ein Männchen von Martinique (IV. 1898, Doflein leg.) gehört zu dieser durch Anwesenheit einer halbmondförmigen gelben Querbinde auf dem ersten Hinterleibsringe ausgezeichneten Aberration und nicht, wie man nach dem Fundorte vielleicht hätte vermuten können, zur aberr. jamaicense (Fabr.), die meines Wissens seit Fabricius von keinem Autor mehr behandelt worden ist. Jamaicense soll sich durch ganz gelben ersten Hinterleibsring und gelbe Ränder an den übrigen Ringen auszeichnen. — Das Sc. lugubre (Christ) aus St. Domingo hat sich noch immer der Deutung entzogen, ich halte es nach der Originalbeschreibung für eine Form von caementarium mit ganz gelbem Hinterleibsstiel, die etwa zur varietas E. bei Saussure (Hym. Novara-Reise p. 30) passen würde. In der Tat wird lugubre auch schon von Dalla Torre (Cat. vol. VIII, p. 379) als Synonym zu caementarium gestellt, später dann allerdings (p. 387) wieder als selbständige Art aufgeführt.

Sceliphron fasciatum (Lep.).

1900 Ashmead, Trans. Ent. Soc. London, p. 229.

Ein Pärchen von Haiti. Das Männchen war bisher noch unbeschrieben, es stimmt mit dem Weibchen in Färbung und Zeichnung vollkommen überein und unterscheidet sich von ihm lediglich durch etwas geringere Grösse (17 mm Länge statt 18,5 beim Weibchen) und um 1 vermehrte Zahl der Geisselglieder und Hinterleibsringe. Sicher bekannt war diese Art bis jetzt nur von Cuba (Cresson), St. Vincent und Bahamas (Ashmead); Haiti kommt daher als neue Fundstelle hinzu.

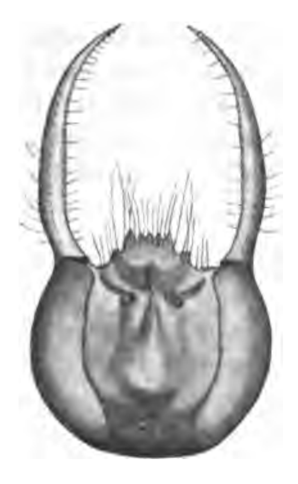
Podium fulvipes Cress.

1900 Ashmead, Trans. Ent. Soc. London, part II, p. 309, no. 198

1902 Kohl, Abhandl. d. K. K. zool.-botan. Ges. Wien, Bd. I, Heft 4, p. 92, no. 37.

Herr Franz Friedr. Kohl in Wien hat die lange Reihe seiner glänzenden sphegidologischen Monographien im vorigen Jahre um eine neue, diejenige der neotropischen Gattung Podium Fabr. vermehrt. Leider sind ihm die Antillenarten, P. fulvipes Cress. und opalinum Sm., unbekannt geblieben, so dass er sich begnügt, deren Originalbeschreibungen zu kopieren.

P. fulvipes ist nur erst von Cuba bekannt und seit Cresson nicht mehr behandelt worden. Die Diagnose, welche dieser Autor gab, ist zu dürftig, um danach die Art in die Kohlschen Gruppen einreihen zu können, insbesondere fehlt eine Angabe



Podium fulvipes Cress. ♀



Podium fulvipes Cress. ♂

über die Randbezahnung des Kopfschildmittelteiles und die Konfiguration des Flügelgeäders. Allein die dunkelbraune Färbung des ganzen Flügelendteiles, verbunden mit der, ausser den schwarzen Hüften und Schenkelringen, durchweg roten Beinfarbe, und nicht zum wenigsten das geographische Vorkommen, erscheinen mir ausreichend, um zwei Pärchen von Haiti dazu zu ziehen. Von einem „faint tinge of blue“, also einem opalisierenden Glanze, der nach Cresson am Thorax erscheinen soll, ist allerdings an diesen 4 Exemplaren kaum etwas zu bemerken.

P. fulvipes gehört nach Kohls Tabelle — a. a. O. S. 11 ff. —

in die Gruppe des Podium fumigatum Pty. und steht etwa P. brevicolle Kohl am nächsten. Wie dieses hat es 7 Zähne im Mittelteil des Kopfschildvorderrandes, ein kurzes breites Collare und eine der Quadratform genäherte zweite Kubitalzelle, in deren Hinterrand beide Diskuidalqueradern münden. Im Gegensatz zu brevicolle ist aber der Hinterleibsstiel von fulvipes kürzer und nach oben gebogen und die Bemakelung der Flügelfläche sowie die Färbung der Beine eine ganz andere, abgesehen von proportionellen Unterschieden der Netzaugenabstände u. s. w. Am charakteristischsten für die vorliegende Spezies sind 2 kreisrunde, flache, nicht tomentierte Vertiefungen an jeder Seite des Mittelsegmentsendes über dem Ursprunge des Hinterleibsstieles und eine in der Mitte, etwas höher gelegene, mehr ovale Grube mit heller Filzauskleidung, deren aller biologische oder physiologische Bedeutung erst noch zu erforschen sein wird.

P. fulvipes ♀. Long. corp. 19—20 mm.

Nigrum, haud an vix opalizans; tegulae et pedes, coxis trochanteribusque nigris exceptis, laete ferrugineo-rufi. Abdomen nigrum, politum, haud opalinum, sed segmentis dorsalibus ultimis utrinque sericanti-griseo-tomentosis. Alarum subhyalinarum pars apicalis fumata, violaceo-resplendens. Caput, thorax, petiolus et pedum basis griseo-pilosa, pilis nigris intermixtis. Caput, pro-et mesothorax et scutellum fere ubique, segmentum medianum lateraliter, supra antice et in medio albo-sericeo pubescentia.

Mandibulae subfalcatae oculis longiores. Clipei margo medius septemdentatus. Dentes externi minores paullo posterius siti sunt; dens medianus ceteris haud longior. Clipei margo lateralis utrinque denticulatus. Occiput breviusculum. Oculi in vertice longitudine antennarum flagelli articuli 2^{di}, ad clipeum longitudine artic. 2^{di} + dimid. 3^{tii} inter se distant. Collare breve, ut in P. brevicolli Kohl, supra in medio impressum. Sutura episternalis mesothoracis in parte superiore tantum exstat. Caput, prothorax et scutellum fine sparsimque,

dorsulum densius, mesopleurae et segmentum medianum densissime, sat grosse punctata. Segmenti mediani latera oblique rugoso-striolata, superficies sulco mediano longitudinali dense argenteo-tomentoso, ad apicem in fossam ovalem dilatato instructa, apex utrinque depressione circulari, haud profunda nec tomentosa; sulci ad stigmata vergentes omnino desunt. Petiolus subcurvatus, breviusculus, metatarso brevior, articulorum insequentium: 2^{di} + dimidii 3 tii longitudine. Valvula analis subcompressa, linea tenui polita carinata. Alarum antic. cellula cubitalis secunda subquadrata ambas venas transverso-discoidales, primam in dimidio anteriore, secundam (haud interstitialem) ad apicem exteriorem (versus alarum marginem exteriorem situm) marginis postici recipit. Cellula cubitalis tertia secunda multo major, antice valde angustata. Venae radialis pars inter venam transverso-cubitalem secundam et tertiam sita longior est quam pars inter venam transverso-cubitalem tertiam et marginem alae.

♂. Long. corp. 16—17 mm. Mandibulae oculis breviores. Clipei margo medius profunde semicirculariter excisus, bidentatus, margo lateralis haud denticulatus. Oculi in vertice longitudine antennarum flagelli articulorum 3^{tii} + 4^{ti}, ad clipeum fere longitudine 2^{di} + 3^{tii} inter se distant. Flagelli articulus secundus tertio evidenter longior est. Petiolus elongatus, longitudine metatarsi postici aut flagelli articulorum 2^{di} + 3^{tii}. Tibiae posticae femoribus posticis paullo longiores. Ceteris rebus plurimis feminae similis est mas.

Weibchen. Schwarz, nicht oder kaum opalisierend (ob darin konstant?). Flügelschuppen und Beine, mit Ausnahme der schwarzen Hüften und Schenkelringe, hellrostrot, auch die Tarsen und Klauen. Hinterleib schwarz, glänzend, auf dem Rücken der hinteren Segmente (vom 3. an) mit Seitenflecken von weisslicher, dicht anliegender Pubescenz. Die Flügel sind in den ersten zwei Dritteln ihrer Länge ziemlich glashell, nur an den Adern ein wenig braun umschattet, im Enddrittel dunkelbraun mit lebhaftem vio-

lettem Reflex. Die Trübung umfasst im Vorderflügel die Radialzelle, das letzte Viertel der ersten, die ganze zweite und dritte Kubitalzelle, die äusseren 3/4 der 2. Diskoidalzelle und den ganzen Aussenrand, im Hinterflügel den Aussenrand ausserhalb des geschlossenen Geäders. Die Adern im hyalinen Teile der Vorderflügel sind rotgelb, alle übrigen braun gefärbt. Die zweite Kubitalzelle, die beide rücklaufende Adern aufnimmt, ist ungefähr so hoch als hinten lang, die dritte vorn höchstens um die Hälfte der hinteren Länge verschmälert. Das Radialaderstück, welches zwischen der zweiten und dritten Kubitalquerader liegt, ist länger als das zwischen der dritten Kubitalquerader und dem Flügelrande liegende Apikalstück.

Kopf, Bruststück, Hinterleibsstiel und die Basalhälfte der Beine mit abstehender, langer, greiser, mit schwarzer gemischter Behaarung. Eine zarte, silberweisse, anliegende Pubescenz findet sich unter der längeren Behaarung am grössten Teile des Kopfes, des Vorder- und Mittelbruststückes sowie Schildchens, ferner am Mittelsegment an den Seiten, oben am Vorderrande und längs der Mittelfurche in Gestalt zweier scharfer, heller Linien.

Oberkiefer sichelförmig, länger als die Netzaugen. Der Kopfschildmittelteil besitzt an seinem Vorderrande 7 Zähne, von denen die beiden äusseren etwas kleiner sind und weiter hinten stehen als die übrigen ungefähr gleich grossen. Seitenrand des Kopfschildes gezähnelt. Kopf hinter den Netzaugen kurz, wie bei den meisten echten Podium-Arten. Der geringste Abstand der Netzaugen kommt auf den Scheitel der Länge des zweiten Fühlergeisselgliedes, am Kopfschilde derjenigen des 2. + halben 3. gleich.

Collare quer, viel breiter als lang, oben in der Mitte eingesenkt. Eine Episternalnaht ist auf dem Mesothorax nur in Gestalt eines kurzen, von der Epimeralfurche ausgehenden Stumpfes vorhanden. Punktierung auf Kopf, Collare und Schildchen sehr schwach und spärlich, auf dem Dorsulum dichter und gröber, an den Mittelbrustseiten und am Mittel-

segment am dichtesten und gröbsten. Die Seiten des Mittelsegments sind schief fein runzlig quergerieft, an seinem Hinterende bemerkt man unmittelbar über dem Ursprunge des Hinterleibsstiels etwas seitlich je eine ziemlich grosse, flache, kreisrunde Grube oder Vertiefung, die nicht tomentiert ist, während eine dazwischen, etwas höher, in der Mittellängsfurche stehende und mehr ovale dritte Grube, wie die letzte mit reicher heller Befilzung ausgekleidet ist. Stigmenfurchen fehlen.

Der Hinterleibsstiel ist ziemlich kurz, sanft nach oben gebogen, kürzer als der Metatarsus der Hinterbeine, von der Länge des 2. + halben 3. Hinterfussgliedes. Die untere Afterklappe ist schwach kompress, zeigt aber in der Endhälfte sehr deutlich die übliche glatte Kiellinie.

Männchen. Oberkiefer kürzer als die Netzaugen. Der Kopfschildmittelteil hat einen tiefen, halbkreisförmigen, von 2 Zähnen begrenzten Ausschnitt; der Seitenrand ist ungezähnelt. Die Netzaugen stehen auf dem Scheitel um die Länge des 3. + 4. Fühlergeisselgliedes von einander ab, am Kopfschilde fast um die des 2. + 3. Das zweite Geisselglied ist auffallend länger als das dritte.

Der Hinterleibsstiel ist lang und fast gerade, nur in der vorderen Hälfte sehr wenig nach oben gebogen, seine Länge beträgt fast genau die des Metatarsus der Hinterbeine oder die Länge des 2. + 3. Geisselgliedes. Die Hinterschienen sind ein wenig länger als die Hinterschenkel.

Die 3 Eindrücke im Endteile des Mittelsegments sind beim Männchen etwas flacher und daher weniger deutlich als beim Weibchen, sonst gleicht jenes diesem.

Genitalapparat s. Abbildung auf S. 471.

Es gilt nun festzustellen, auf welchen Inseln ausser Cuba und Haiti etwa noch sonst Podium fulvipes vorkommt, denn in Jamaica tritt schon eine andere Art, P. opalinum Sm., auf.

Ammophila (Psammophila) luctuosa Sm.

Als Vaterland war bislang Nordamerika, von Canada bis Mejico, und Cuba angegeben gewesen. Nunmehr kommt dazu St. Thomas, von wo mir ein Weibchen (29. IV. 1898, Doflein leg.) vorliegt, das ganz der von Saussure in den Hymenopteren der Novara-Reise, 1867, p. 26, Nr. 6 beschriebenen Varietät von den gemässigten und hochgelegenen Teilen Mejicos entspricht. Die Flügel, namentlich die hintersten, sind nämlich abweichend von der typischen Form heller, subhyalin und nur am Aussenrande schwarzbraun, mit lebhaftem blauen Glanz. Ein weiteres damit völlig übereinstimmendes Weibchen sammelte Herr Dr. Doflein am 10. VI. bei Pacific Grove in Californien.

Sphex ichneumoneus (L.).

Ein Männchen und vier Weibchen aus Haiti stellen nicht die zu erwarten gewesene, für Cuba, Jamaica und Haiti als eigentümlich betrachtete Form fulviventris Guér., vielmehr den sumptuosus Costa, welcher bisher nur aus Brasilien erwähnt war, dar. Der Hinterleibsstiel ist nämlich bei allen oben erwähnten Exemplaren schwarz, und die Beine sind von den Schenkelringen an rot, zeigen aber, am ausgeprägtesten am ersten Paar, schon eine Neigung an den Schenkelringen in Schwarz überzugehen. Der Hinterleib ist bei den Weibchen, mit Ausnahme des Stiels, ganz rot, beim Männchen treten auf dem Rücken des ersten (nach Kohl'scher Zählweise zweiten) Hinterleibsringes vor dem Hinterrande zwei grosse ovale schwarze Flecken auf. Die Flügeltrübung bei den Weibchen ist stark. Da somit die Formen fulviventris und sumptuosus Übergänge zu einander haben, werden sie nicht als Subspezies, sondern lediglich als Farbenaberrationen zu betrachten sein.

Bembicidae.

Monedula signata (L.).

Von dieser gemeinen, vom tropischen Mejico bis nach Argentinien und auch auf den grossen und kleinen Antillen verbreiteten, nichtsdestoweniger aber sehr konstanten Spezies liegen mir ein Männchen und zwei Weibchen aus St. Kitts vom April 1898 (Doflein leg.) und weitere 4 Weibchen aus Haiti vor. Bei dem Männchen sind die beiden gelben Mittelflecke am Hinterrande des sechsten Dorsalsegments verschwunden und nur die beiden Seitenflecke übriggeblieben. Von der Insel St. Kitts speziell war signata bisher noch nicht nachgewiesen.

Bembex insularis (Dhlb.).

Eine auch im Weibchen leicht kenntliche Art, die bis jetzt aus Cuba und St. Thomas bekannt war. Im hiesigen Museum steckt ein Weibchen davon aus Haiti.

Bembex Spinolae Lep.

Ein Weibchen von Martinique (IV. 1898, Doflein leg.) glaube ich hierher stellen zu sollen. Es stimmt im ganzen mit der Beschreibung in Handlirschs Monographie dieses Genus-Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Wien 1893, S. 825 — überein, nur finde ich bei ihm die weissliche Behaarung von Kopf, Bruststück und Hinterleibsbasis auch auf den übrigen Hinterleib ausgedehnt, allerdings tritt sie hier viel kürzer und mehr anliegend auf.

Ferner ist der Fundort bemerkenswert, denn B. Spinolae ist bisher lediglich vom continentalen Nordamerika bis nach Puebla in Mejico herab bekannt gewesen. Interessant wäre es, wenn sich das Vorkommen der Art auf Martinique bestätigte, was aber mit Sicherheit nur durch Auffindung des zugehörigen Männchens möglich sein wird. Die Bestimmung einzelner Bembex-Weibchen nämlich, ohne die Männer, bleibt stets schwierig. Herr Handlirsch bestätigte mir dies vor kurzem mündlich mit dem Hinzufügen, dass er seinerzeit eine grössere

Anzahl solcher Weibchen im Wiener Museum aus dem gedachten Grunde absichtlich unbeschrieben gelassen habe.

Crabronidae.

Crabro croesus (Lep.).

1900 Ashmead, Trans. Entom. Soc. London, part II, p. 305, no. 131.

Als Heimat dieser Art waren bisher die 3 Inseln Cuba, Jamaica und Puerto Rico angeführt, ich kann als vierte Haiti hinzufügen, woher ich drei Männchen untersuchen konnte.

Dass die Ausdehnung und Färbung der hellen Kopfbehaarung variiert, hob schon Dewitz — Berl. entom. Zeitschr. 1881, p. 200 — hervor, und ich kann diese Wahrnehmung an dem mir vorliegenden Material nur bestätigen. Es war ferner zu vermuten, dass auch die gelbe Binden- und Fleckenzeichnung auf den Hinterleibsringen an Ausdehnung wechseln würde, und in der Tat sind auch an einem meiner Männchen die gelben Randflecke des dritten und vierten Abdominalsegments fast rudimentär geworden und die Binde des 5. Segments bei demselben mitten breit unterbrochen bezw. zu zwei länglichen Randflecken reduziert.

Die bisherigen Beschreibungen lassen die Farbe der Mandibeln unerwähnt, welche gelb mit brauner Spitze sind.

In welche Gruppe der Gattung Crabro Croesus gehört, vermochte ich nach der Kohl'schen Tabelle — die Gattungen der Sphegiden, 1896, S. 485 ff. — mangels weiblicher Untersuchungsexemplare nicht zu bestimmen, soviel steht indes fest, dass er in die „Artengruppe: Crabro Kohl" auf S. 492, no. 8 eingereiht werden muss. Ein Solenius in dem dort auf der nächsten Seite gegebenen Sinne ist er wegen der abweichenden Kopfform und Fühlerbildung nicht, wie denn überhaupt das, was Lepeletier unter dem Namen Solenius als Gattung aufstellte, wozu er auch croesus rechnete, ein Gemisch von Arten bildet, die zu ganz verschiedenen Crabro-Untergruppen gehören.

Larridae.

Notogonia ignipennis (Sm.).

1856 Larrada ignipennis Smith, Catal. Hymen. Brit. Mus. IV, p. 288, no. 48

1865 Larrada ignipennis Cresson, Proc. Ent. Soc. Philadelphia, p. 137

1881 Larrada ignipennis Dewitz, Berl. Ent. Zeitschr., p. 203

1884 Larrada ignipennis Kohl, Verh. zool.-bot. Ges. Wien, XXXIV, p. 244

1897 Larrada ignipennis Dalla Torre, Catal. Hymen. hucusque cognit., vol. VIII, p. 669

1897 Notogonia ignipennis Stadelmann, Entom. Nachrichten p. 255

1900 Larrada ignipennis Ashmead, Trans. Entom. Soc. London, part II, p. 306, no. 149.

Wie von Stadelmann schon richtig nachgewiesen wurde, ist Ignipennis eine echte Notogonia im Sinne Kohls (die Gattungen der Sphegiden, 1896, p. 263 und 355). Bis heute nur aus Cuba, St. Domingo und Puerto Rico aufgeführt, kommt sie auch auf Haiti vor, woher mir ein Männchen und zwei Weibchen vorliegen.

Ignipennis ist schon durch ihre gelbe Flügelfärbung sehr ausgezeichnet und nach der Originalbeschreibung Smiths leicht zu erkennen.

Körperlänge: Weibchen 11—12, Männchen 9 mm.

Weibchen. Geringster Abstand der Netzaugen auf dem Scheitel gleich der Länge des zweiten Fühlergeisselgliedes. Kopfschild kurz mit leichtem Längskiel in der Mitte, Vorderrand fast geradlinig, nur an den Seiten breit abgerundet, Mittelkiel und Vorderrand poliert, glatt, Rest des Kopfschildes nebst dem grössten Teil des Kopfes überhaupt, silberweiss tomentiert. Fühlergeisselglied 1 beinahe halb so lang als das zweite, zweites bis fünftes unter sich ungefähr gleich lang, von da ab werden die Glieder allmählich kürzer.

Collare, wie immer bei den Notogonia-Arten, unter das Niveau des Dorsulum herabgedrückt, an den Seiten mehr als in der Mitte, sonst aber bei der gegenwärtigen Spezies doch ziemlich kräftig hervortretend. Kopf, Vorder- und Mittelbruststück, soweit nicht durch das helle Toment verdeckt, fein lederartig matt, von einer Punktierung ist unter einer gewöhnlichen Lupe kaum etwas wahrzunehmen. Auf dem Dorsulum stehen vorn in der Mitte zwei feine parallele Linien, neben ihnen, gegen ihr Ende hin, zwei weitere undeutlichere und schliesslich noch weiter aussen, in der Höhe der Flügelschuppen ein paar kürzere, aber sehr deutliche, nach hinten konvergente; Mittelsegment in einen längeren, fast horizontalen und einen kürzeren, fast vertikalen Teil geschieden, der horizontale so lang wie das Dorsulum, zu beiden Seiten der Mittellinie matt lederartig, mit Spuren einer sehr feinen Querriefung, hinten mit zwei derben Querriefen, von dem vertikalen Teile durch eine scharfe Kante getrennt. Dieser mitten etwas ausgehöhlt, mit einer ziemlich tiefen Längsfurche, dort, soweit sich unter der silbernen Tomentbekleidung erkennen lässt, glatt, an den Seiten abgerundet und besonders nach oben hin, an der Grenze gegen den horizontalen Teil mit 6—7 Querwulsten; Seiten des Mittelsegments matt, unpunktiert, erst gegen das Ende hin weiss tomentiert Seitenränder des Pygidialfeldes nach hinten leicht konvergent, nebst dessen hinterem Teile mit silberweissem Toment, ausser den 4—5 kräftigen, stiftenförmigen Endborsten, belegt, der Vorderteil in grösserer oder geringerer Ausdehnung, in Form eines Dreiecks, poliert glatt. Die Bauchplatte des dritten Hinterleibsringes (nach Kohl'scher Zählung) zeigt in der bei Notogonia üblichen Weise vorn in der Mitte eine etwas kielartig erhobene Stelle, neben der zu beiden Seiten die ovale matte Abflachung sichtbar ist. Die Länge der Radialzelle im Vorderflügel (am Vorderrande) kommt fast dem Abstande der Einmündung der Basalader in die Subkosta von dem Beginn der Radialzelle (also einschliesslich des Flügelmals) gleich. Die dritte Kubitalzelle ist hinten sehr stark nach aussen vorgezogen, zungenförmig, die sie seitlich begrenzenden Kubitalquer-

adern 2 und 3 laufen bis zu ihrer Vereinigung fast parallel. Die beiden Diskoidalqueradern münden getrennt, aber in geringem Abstande von einander, in die zweite Kubitalzelle, etwas vor der Mitte von deren Hinterseite (von der Flügelwurzel aus). Beine, namentlich die Schenkel, stark verdickt, unter der lichten Befilzung schwarz, nur die Enden der Hintertarsenglieder sowie die Klauen aller Beine rotbraun. Tarsen I und Schiene und Tarsen II und III reich und kräftig bedornt, Schienen I (ausser am Ende) sowie die Hüften, Schenkelringe und Schenkel aller Beinpaare unbedornt, Hinterschenkel ganz, nicht ausgerandet, unten d. h. dort, wo sich die Schienen anlegen, etwas rinnenartig vertieft. Längerer Hinterschienensporn von reichlich 2/3 Hinterfersenlänge.

Das Männchen unterscheidet sich vom Weibchen ausser durch seine geringere Grösse, durch kürzere, gedrungenere Fühler, deren einzelne Glieder oben und innen eine scharfe Längskante haben und an den Aussenkontouren geschwungen erscheinen. Das erste Geisselglied besitzt 2/3 der Länge des zweiten, dieses und die folgenden sechs sind ungefähr gleich lang, die darauf folgenden etwas kürzer, das Endglied am längsten, an der Spitze schief abgeschnitten aussehend. Abstand der Netzaugen auf dem Scheitel gleich Fühlergeisselglied 1 + 2. Die helle Körperbefilzung erscheint spärlicher als beim Weibchen und etwas ins Gelbliche spielend; am Hinterleibe findet sie sich nur an den Hinterrändern von Segment 2—4, dann auf Segment 7 und 8, stets auf der Rücken- und Bauchseite. Bauchsegment 3 trägt hinten in der Mitte eine einzelne lange Borste, Bauchsegment 4 und 5 sind dort, jenes länger, dieses kürzer befranst. Beine gänzlich schwarz, durchwegs schmächtiger als beim Weibchen, Beborstung ebenso verteilt, wie bei diesem, aber schwächer; Schenkel II an der Aussenfläche etwas messerartig komprimiert, Schenkel III desgleichen an der Innenfläche. Der längere Hinterschienensporn gerade, von dreiviertel Länge der Hinterferse.

Die Bräunung am Aussenrande der Flügel ist dunkler und

breiter als beim Weibchen und bei auffallendem Lichte ponceau schimmernd.

Trypoxylonidae.

Trypoxylon subimpressum Sm.

1900 Ashmead, Trans. Entom. Soc. London, part II, p. 227, no. 50 und p. 307, no. 171.

Bisher nur im Männchen von St. Domingo und Grenada bekannt. Im hiesigen Museum stecken zwei Männchen und ein Weibchen aus Haiti, die zu Smiths Beschreibung vom Jahre 1856 vorzüglich passen. Störend wirkt darin nur der Passus: „the vertex opake, and having a number of large subimpressed punctures", setzt man aber front an Stelle von vertex — Smith kennt nämlich in seinen Beschreibungen nur die Begriffe face und vertex, nicht front, — so trifft man genau das Richtige.

Das Hauptkennzeichen der vorliegenden Art ist ein kräftiger, kegelförmiger, zugespitzter Stirnzapfen oder -Zahn, der in der Mitte einer schnurgeraden Linie steht, welche die unteren Ränder der Ausrandungen der beiden Netzaugen mit einander verbindet, und welche gleichzeitig die obere Grenze der silberweissen Gesichtsbehaarung bildet. Von diesem Zapfen geht über die gewölbte Stirn bis zu dem vorderen Nebenauge eine feine Mittelfurche. Der Netzaugenabstand auf dem Scheitel beträgt höchstens die Länge des 1 + 2. Fühlergeisselgliedes. Die hinteren Nebenaugen stossen fast unmittelbar an die Netzaugen und sind um die halbe Länge des zweiten Fühlergeisselgliedes von einander und vom vorderen Nebenauge entfernt. Beine und Schienensporen in beiden Geschlechtern pechschwarz.



Trypoxylon subimpressum Sm. ♂

Das Weibchen gleicht dem Männchen, nur ist es grösser (Körperlänge 11 mm, beim Männchen 10 mm), und die Mandibeln und Palpen sind nicht bräunlich, sondern schwarz.

Vespidae.

Eumenes abdominalis colona Sauss.

E. abdominalis (Drury) ist eine in Färbung und Gestalt sehr veränderliche Form, die auf den grossen und kleinen Antillen, zum Teil auch noch auf dem angrenzenden Festlande von Venezuela zu Hause ist. Colona speziell kommt, soviel bisher bekannt, ausschliesslich auf Haiti und Jamaica vor. 2 Weibchen davon im hiesigen Museum aus Haiti stellen jene Aberration vor, bei welcher der ganze Thorax gelb und nur folgende Stellen schwarz sind: eine von der Mitte des Vorderrandes nach hinten verlaufende Längslinie auf dem Dorsulum, dessen Hinterrand, vor dem Schildchen, die Einfassungen dieses sowie des Hinterschildchens, die Mittellinie des Mittelsegments und schliesslich eine schiefe, breite Binde an den Seiten, unterhalb der Flügel.

Odynerus (Pachodynerus) tibialis Sauss.

Drei mit der Beschreibung Saussures in der Synops. Amer. Wasps, 1875, p. 241 genau übereinstimmende Exemplare, zwei Männchen und ein Weibchen, aus Haiti. Bei der ersten Beschreibung in den Etud. Fam. Vespides, I. 1852, p. 183 hatte dieser Autor als Vaterland Colombien, Carácas angegeben, 1875 aber schon selbst Zweifel an der Richtigkeit letzter Herkunft geäussert. Ohne Zweifel ist diese Art auf der Insel St. Domingo bezw. Haiti endemisch.

Als Geschlechtsunterschiede finde ich noch beim Männchen folgende:

Auf der Mandibeloberseite fehlt der dem Weibchen zukommende gelbe Fleck, dagegen hat das Männchen allein an den inneren Augenrändern, etwas in die Einbuchtungen hineinreichend, einen gelben Strich. In beiden Geschlechtern sind die gelben Flügelschuppen, wie bei den Odynerus-Arten auch sonst üblich, von einer schwarzen Querbinde durchzogen, und der gelbe Saum am Hinterrande des zweiten Abdominalsegments greift auch auf die Bauchseite über. Das erste Fühlergeissel-

glied hat die halbe Länge des 3., das zweite die des 3. + halben 4. Die konkave Innenfläche des Mittelsegments ist mattglänzend, in der unteren Hälfte fein quergerieft.

Odynerus (Stenodynerus) pruinosus Sm.

Auch diese, seit Smith (1857) nicht mehr näher bekannt gewordene Spezies wird wohl der Insel St. Domingo eigentümlich sein. Mir liegt ein Pärchen davon aus Haiti vor, das sich nach der Saussure'schen Tabelle auf Seite 304 ff. der Syn. Amer. Wasps unschwer bestimmen liess. Allein da genannter Autor die Art in natura nicht kannte, wies er ihr zu Unrecht ihren Platz in der Gruppe des O. totonacus an, wohin sie aber wegen ihres deutlichen konkaven Mittelsegments und glockenförmigen, vorn schroff abfallenden ersten Hinterleibssegments nicht gehört. Auf Grund dieser Charaktere reiht sich pruinosus vielmehr in die conformis-Gruppe (a. a. O. S. 312 unter II. 1) bei O. enyo Lep. ein. Der von Smith und Saussure gegebenen Beschreibung trage ich folgendes, auf die Skulptur- und plastischen Verhältnisse Bezügliche nach:

Körperform zylindrisch, Bruststück ziemlich lang gestreckt, vorn geradlinig abgestutzt mit vorgezogenen Ecken, dort auch breiter als am Mittelsegment. Hinterschildchen flach, hinten in einen stumpfen Winkel vorgezogen, matt lederartig. Das Mittelsegment setzt sich anfänglich, ganz wie bei O. enyo, noch in der Richtung des Postscutellums fort, um dann ziemlich plötzlich nach hinten abzufallen. Von oben gesehen, erscheint es seitlich stark gerundet, seine Seitenränder sind aber ziemlich scharfkantig. Die Aushöhlung der abfallenden Fläche ist mattglänzend und hat in der Mitte eine scharfe Längsrinne, zu deren beiden Seiten eine schiefe Querstrichelung steht. Das erste Hinterleibssegment ist sitzend, glockenförmig, schmäler als das folgende, in eine steil abstürzende, vordere und eine hintere, flache Hälfte geteilt. Auf der letzten findet sich mitten ein etwas undeutlicher Quereindruck. Unmittelbar vor der Kante, gegen den abstürzenden Teil hin, ist die Punktierung besonders grob, und die einzelnen Punkte erscheinen

dort wie von hinten reingestochen. Das zweite Abdominalsegment ist vorn zur Aufnahme in das vorhergehende etwas eingeschnürt und nebst den folgenden fein und zerstreut punktiert. Vom zweiten Segment an wird die Punktierung nur am Hinterrande dichter. Flügel glashell, am Vorder- und Aussenrande recht stark gebräunt und hier bei auffallendem Lichte violett glänzend. Länge vom Kopf bis zum Hinterrande des zweiten Hinterleibssegments: Männchen 6, Weibchen 7 mm.

Bisher war nur das Weibchen bekannt. Das Männchen unterscheidet sich von ihm nur in nachstehenden Punkten: die pruinöse Silberbehaarung ist etwas reicher, Kopfschild weniger birnenförmig, gestreckter, fast fünfeckig, und durchweg hellgelb, die elfenbeinfarbene Zeichnung an den Kanten des Mittelsegments fehlt, was indes möglicherweise auf individueller Abänderung beruht.

Polistes annularis cinctus Lep.

Die vorliegende Reihe von 16 Exemplaren, lauter Weibchen, aus St. Pierre und anderen Orten der Insel Martinique (III.—IV. 1898) und St. Kitts (IV. 1898, Doflein leg.) ist insofern lehrreich, als die Tiere alle die gleiche, nämlich durchweg — ausser an den Beinen und Fühlern und dem gelben Hinterrande des ersten Adominalringes — hell rotbraune Tracht zeigen. Dies ist Polistes cincta Lepeletiers — Hist. Nat. Ins. Hymén., I (1836), p. 522, — als deren Vaterland dieser Autor ebenfalls Martinique angibt. Wahrscheinlich fällt auch die var. B. Saussures, Monogr. Guêpes soc. (1853), p. 79, damit zusammen. Neuerdings ist dieselbe Form durch Ashmead auch von St. Vincent und von der Canonan Isle nachgewiesen worden. Es handelt sich hier offenbar um eine charakteristische und konstante Form der kleinen Antillen, für welche Ashmead (Trans. ent. soc. London 1900, p. 232) mit Recht den Lepeletierschen Namen wieder eingeführt hat. Ich fasse die Form lediglich als Subspezies auf und bezeichne sie, wie oben steht.

Polistes carnifex Fabr.

Eine über grosse Gebiete Süd- und Mittelamerikas verbreitete und auch von den grossen Antillen bereits bekannte, durch bedeutende Körpergrösse sowie durch ihre Körperzeichnung gut unterschiedene Art, die aber nirgends gerade häufig zu sein scheint, wenigstens habe ich sie am unteren Amazonenstrom während dreier Jahre nie zu Gesicht bekommen. Auf den kleinen westindischen Inseln wird sie wohl fehlen. — Es liegt mir ein Weibchen aus Haiti und je ein Männchen und Arbeiter aus Port au Prince auf derselben Insel vor, die alle ein braunes bis schwarzes Dorsulum und gelbgefärbtes Mittelsegment, dieses mit feiner brauner Mittellängslinie und ebensolcher schmaler Einfassung am Vorderrande haben. Die gleiche Färbung tritt aber auch an Stücken aus Mejico und Santos in Südbrasilien auf. Daraus scheint hervorzugehen, dass sich Carnifex noch nicht in Subspezies aufgelöst hat.

Polistes Hertwigi Schlz. nov.

Der Mangel einer neuzeitlichen monographischen Bearbeitung der neotropischen geselligen Faltenwespen macht sich bei dem im ganzen subtropischen und tropischen Amerika heimischen Formenkreise des P. crinitus besonders stark fühlbar. Zwar werden bei der ausserordentlichen Variabilität gerade der Gattung Polistes scharf unterschiedene Lokalformen (Subspezies) kaum herauskommen, aber die genaue Kenntnis aller vorhandenen Farbenaberrationen, verbunden mit einer ebenso exacten Beleuchtung der zoogeographischen Verhältnisse wird, daran kann wohl kaum zu zweifeln sein, wertvolle Aufschlüsse über die systematische Stellung des Crinitus-Ringes zu den angrenzenden Arten bringen.

In der hiesigen Staatssammlung liegen fünf weibliche Stücke, wovon zwei alte aus „Westindien" und drei neuzeitliche aus Haiti, vor, die ganz den Eindruck einer neuen Spezies machen. Die Grundfarbe ist bei ihnen schwarz, Pronotum und Dorsulum sind grösstenteils rotbraun; Fühler rot-

gelb, Ende des Schaftes oben sowie Geisselmitte aussen, schwarz. Von gleicher Farbe sind ferner: die Oberkiefer, die Spitze des Kopfschildes, ein feiner Strich an den inneren Augenrändern, der bis zur Höhe der Netzaugeneinbuchtungen reicht, mehr oder weniger die äusseren Augenränder, die aufgeworfene Kante des Vorderrandes des Pronotums bis zum ersten Beinpaar herab, ein grosser Fleck unterhalb der Flügelwurzel, mehr oder weniger das Schildchen, Hinterschildchen, zwei grosse, durch eine braune Mittellängslinie geschiedene Flecken auf dem Mittelsegment, welche sich ganz wie bei der Form P. lineatus Fabr. auch auf die Seiten des Mittelsegments ausdehnen und hier oben, am Vorderrande nur einen schwarzen, dreieckigen Fleck mit nach hinten gerichteter Spitze übrig lassen, die Hinterränder von Abdominalsegment 1 und 2 sehr breit, 3—5 schmäler werdend. Flügel ziemlich stark gebräunt, die vorderen am Vorderrande und Stigma gelbbraun. Dritte Kubitalzelle so breit wie hoch, ein regelmässiges Parallelogramm bildend. Diese Form gestatte ich mir Herrn Prof. Dr. R. Hertwig, Direktor des zoologischen Instituts und erstem Konservator der zoologischen Staatssammlung in München zu Ehren, als Zeichen meiner Dankbarkeit Polistes Hertwigi zu nennen. Typen in der Münchener Staatssammlung.

Was P. Hertwigi so auffällig macht, sind die breiten gelben Binden auf den vordersten Hinterleibsringen, die auch auf die Bauchseite übergreifen. Vor diesen gelben Binden steht auf dem Rücken eine braune Binde, auf die dann nach vorn zu oft eine tiefschwarze folgt. Skulptur-Unterschiede gegen crinitus vermochte ich nicht herauszufinden. Wahrscheinlich wird die hier beschriebene Form nur eine der vielen Farbenaberrationen des P. crinitus (Felt.) (= olim americanus Fabr.) darstellen, möglicherweise ist sie aber doch eine den Antillen (dann anscheinend mit Ausschluss von Cuba) eigentümliche Subspezies. Der gleichfalls aparte P. lineatus Fabr. ist bereits von Saussure mit Recht zu dem Formenkreise des crinitus gestellt worden, allerdings führt dieser Autor lineatus auch aus Südamerika auf, während mir diese Form nur aus

Cuba bekannt ist. Indes sind dies alles Fragen, die sich nur auf Grund grosser Reihen von Exemplaren mit ganz genauen Fundortsangaben lösen lassen, und solche Serien liegen mir zur Zeit nicht vor.

Apidae.

Xylocopa fimbriata Fabr.

2 Weibchen von St. Pierre auf Martinique (III. 1898, Doflein leg.) und Martinique (ohne nähere Fundortsangabe, IV. 1898, Doflein leg.). Von Westindien bisher nur aus Barbados bekannt (durch Smith, Monogr. gen. Xyloc., p. 285). Im Münchener Museum finden sich aus Südamerika noch Stücke von folgenden Lokalitäten: Baranquilla, Colombien (Steinheil leg.), Surinam.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1. Polistes Hertwigi Schlz. ♀
„ 2. Odynerus (Stenodynerus) pruinosus Sm. ♂
„ 3. Podium fulvipes Cress. ♂
„ 4. Sceliphron fasciatum (Lep.) ♀
„ 5. Plesia haemorrhoidalis (Fabr.) ♂
„ 6. „ „ („) ♀
„ 7. Notogonia ignipennis (Sm.) ♀
„ 8. Monomachus pallescens Schlett. ♀.

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 144. Stiftungstages

am 11. März 1903.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. K. A. v. Zittel, mit folgender Ansprache:

Die Kgl. Akademie der Wissenschaften begeht heute ein Doppelfest. Wir feiern zunächst den 144 jährigen Bestand unserer Korporation und sodann die 100 jährige Wiederkehr des Geburtstags von Justus von Liebig. Aus berufenstem Munde werden Sie durch unser korrespondierendes Mitglied Professor Dr. Knapp aus Strassburg ein Lebensbild des grossen Mannes erhalten, welcher mehrere Jahrzehnte unserer Akademie als Mitglied und Präsident angehörte und ihr Ansehen durch den Glanz seines weltberühmten Namens vermehrte.

Dank der unveränderten Huld unseres hohen Protektors und der wohlwollenden Unterstützung durch die Kgl. Staatsregierung und den Landtag kann die Akademie mit Befriedigung wieder auf ein Jahr fruchtbarer Tätigkeit zurückblicken. Wie aus dem Umfang und dem Inhalt unserer Druckschriften hervorgeht, herrscht ein reges wissenschaftliches Leben in den drei Klassen und auch die der Akademie angeschlossene historische Kommission, die Bearbeiter des Thesaurus linguae latinae und die Kommission für die Erforschung der Urgeschichte Bayerns haben im verflossenen Jahre eine Fülle verdienstlicher Arbeit geleistet.

Aus unseren Stiftungen konnten eine Anzahl wissenschaftlicher Unternehmungen unterstützt und angeregt werden.

So wurden aus den Renten der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung bewilligt:

1. 3000 M. für eine Sammel- und Informationsreise des Garteninspektors Bernhard Othmer in die Tropen, ferner

2. 1500 M. zur Erforschung des Kretinismus in Franken an den Privatdozenten der Kgl. Universität Würzburg Dr. Wilhelm Weygandt.

Aus der Königs-Stiftung für chemische Forschungen wurden verliehen:

Herrn Professor Karl Hofmann 330 M. für Untersuchung radioaktiver Stoffe und 470 M. Herrn Professor Piloty für Untersuchungen über Murexid.

Aus den Renten der Savigny-Stiftung, welche für das Jahr 1903 unserer Akademie zur Verfügung stehen, wurde auf Vorschlag der Savigny-Kommission bewilligt:

1. 600 M. zur Unterstützung des Honorarfonds der Savigny-Zeitschrift,

2. eine Summe bis zu 2500 M. für einen zweiten Band der von unserer Akademie angeregten Magdeburger Schöffensprüche, welche die Herren Liesegang und Friese herausgeben,

3. 300 M. an Herrn Oberlehrer Knod in Strassburg i. E. zur Unterstützung und Herausgabe seines Werkes „Die deutsche Nation zu Orleans".

Aus dem Thereianos-Fond wurde zunächst ein Preis von 800 M. verliehen an Herrn Dr. Boll, Sekretär der Kgl. Hof- und Staatsbibliothek, für dessen jüngst erschienenes Werk „Sphaera".

Ferner wurden genehmigt:

1200 M. an Professor Spyridion Lambros in Athen für seine Arbeiten über Theodoros von Kyzikos, über das sogenannte Chronicon breve und über die Geschichte des Despotats der Palaeologen im Peloponnes,

1500 M. zur Unterstützung der Byzantinischen Zeitschrift,

1000 M. als zweite und letzte Rate für den Index der ersten zwölf Bände der Byzantinischen Zeitschrift,

200 M. für die Ausarbeitung eines Programms zur Herausgabe eines Corpus der griechischen Urkunden des Mittelalters und der neueren Zeit, welches der Internationalen Association der Akademien im Jahre 1904 vorgelegt werden soll, ferner

2300 M. zur Fortsetzung des von den Herren Furtwängler und Reichold herausgegebenen Werkes über „Griechische Vasenmalerei".

Leider hat im vergangenen Jahre der Tod eine reiche Ernte unter unseren einheimischen und auswärtigen Mitgliedern gehalten und uns einige der angesehensten und berühmtesten Forscher entrissen. Über diese Verluste bitte ich nunmehr die Herren Klassensekretäre des Näheren zu berichten.

Der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit teilt mit, dass die mathematisch-physikalische Klasse in dem vergangenen Jahre sieben Mitglieder durch den Tod verloren hat, ein einheimisches und sechs auswärtige.

Es sind gestorben:

1. am 16. Dezember 1902 der Anatom Carl v. Kupffer;
2. am 26. April 1902 der Mathematiker Lazarus Fuchs in Berlin;
3. am 5. September 1902 der pathologische Anatom Rudolf Virchow in Berlin;
4. am 22. September 1902 der Mineraloge Augustin Alexander Damour in Paris;
5. am 5. Dezember 1902 der Chemiker Johannes Wislicenus in Leipzig;
6. am 2. Februar 1903 der Physiker George Gabriel Stokes in London;
7. am 20. Februar 1903 der Forschungsreisende Karl v. Scherzer in Görz.

Carl v. Kupffer.

Die mathematisch-physikalische Klasse hat in diesem Jahre durch das Ableben ihres ordentlichen Mitgliedes, des Anatomen Carl v. Kupffer, einen schweren Verlust erlitten. Durch sein umfassendes Wissen und seine reiche Erfahrung, namentlich auf dem Gebiete der Histologie und der Entwicklungsgeschichte, ist er einer der ersten Autoritäten in diesen Fächern der anatomischen Wissenschaft gewesen. Bei dem Hingange eines solchen Mannes drängt sich einem immer wieder der kurzsichtige Gedanke auf, wie schade es ist, dass ein so grosses Können mit dem Tode verloren geht und sich nicht auf die Nachkommen, wie eine instinktive Fertigkeit bei den Tieren, vererben lässt; aber jeder muss sich selbst diese Fähigkeiten durch mühsame Ausbildung und Uebung des Geistes neu erwerben, denn nur dann vermag er die Wissenschaft weiter zu fördern als seine Vorgänger. Es ist daher immerhin von Interesse, den Lebensgang und die geistige Entwicklung eines bedeutenden Gelehrten zu verfolgen, wenn auch sein Dasein in der Stille der Arbeitsstube verflossen und über keine besonderen äusseren Ereignisse zu berichten ist. Es war mir dabei vergönnt, die Aufzeichnungen Kupffers in seinem „Lebenskalender“ benützen zu dürfen.

Carl Kupffer entstammte väterlicherseits einer seit 1582 in Kurland ansässigen, aus Sachsen eingewanderten Familie; das Haupt derselben war einer der ersten lutherischen Prediger in Kurland und es wurden der Tradition gemäss stets die ältesten Söhne Prediger. So war auch der Vater Kupffers Prediger und zwar auf der Landpfarre zu Lesten bei Mitau, deren Patron der Baron Paul v. Tiriks war. Dort wurde ihm als erstes Kind der Sohn Carl am 14. November 1829 geboren. Die Pfarrhäuser in Kurland waren umfangreiche isolierte Höfe, von Garten, Feld und Wald umgeben, die zumeist einem adeligen Gutsbesitzer als Patron zugehörten. An die Ausbildung der lutherischen Pfarrer wurden damals grosse Ansprüche gemacht und sie standen auch in ihrer allgemeinen Bildung sehr

hoch. Kupffer verbrachte seine äusserst glückliche Jugendzeit nur im elterlichen Hause; die Mutter lehrte dem Sohn lesen und schreiben, und der Vater gab ihm den Unterricht im ganzen Gebiete des Gymnasiums. So kam es, dass unser Kupffer nie eine Schule besucht hat, aber von seinem 15. Jahre an den Vater im Unterrichte der jüngeren Geschwister unterstützte. Vom elterlichen Hause aus bezog er direkt die Universität Dorpat, woselbst er vor einer besonderen Kommission, zu welcher der bekannte Kulturhistoriker Victor Hehn gehörte, die Maturitäts-Prüfung zu Weihnachten 1848 bestand und im Januar 1849 als Student der Medizin immatrikuliert wurde; er war der erste Erstgeborene der Familie, welcher nicht die Theologie zu seinem Berufe wählte.

Die Dorpater Universität war dazumal in voller Blüte und es ergreift uns jetzt tiefe Wehmut, dass diese Pflanzstätte deutscher Bildung und Sitte mit rauher Hand völlig vernichtet worden ist. Es wurde mit Eifer studiert, aber auch ein frohes Studentenleben geführt; so manche treffliche Freunde für das ganze Leben hat sich Kupffer in dieser Zeit erworben.

In der Anatomie und Entwicklungsgeschichte war Karl Bogislaus Reichert, der später als Anatom in Breslau und Berlin wirkte, sein Lehrer; die Präparierübungen leitete der sehr geschickte Prosektor Professor e. o. Dr. Schneider. Mehr als die Vorlesungen von Reichert fesselte ihn Friedrich Bidders durch zahlreiche, fast ausnahmslos gelingende Experimente belebte Vorlesung über Physiologie. Bidder hatte zu dieser Zeit mit seinem Kollegen, dem Chemiker Carl Schmidt, einem Schüler Liebigs, grundlegende physiologisch-chemische Experimental-Untersuchungen an Tieren über die Vorgänge bei der Verdauung und bei dem Stoffumsatz angestellt und in dem berühmten Werke: „Die Verdauungssäfte und der Stoffwechsel" (1851) veröffentlicht; es wurden dabei zum ersten Male die von Liebig ausgesprochenen Ideen durch den Versuch am Tier mit glänzendem Erfolge geprüft; kein Wunder, dass Kupffer durch die beiden Forscher für die Wissenschaft begeistert wurde. Nach vier Semestern legte er die Vorprüfung und

dann im März 1854 das Doktorexamen ab, disputierte am 8. Oktober und wurde am gleichen Tage zum Doktor der Medizin promoviert, auf Grund einer bemerkenswerten Dissertation: „De medullae spinalis textura in ranis ratione imprimis habita indolis substantiae cinereae“, in der ein verhältnismässig einfacher Verlauf der Nervenfasern im Rückenmark der Frösche erkannt wurde.

Nun versuchte er sich in der ärztlichen Praxis bei den Bauern in seiner Heimat Lesten und Umgegend, aber bereits nach sechs Monaten forderte ihn zum Glück sein verehrter Lehrer Bidder, der die ungewöhnlichen Talente seines Schülers erkannt hatte, auf, sich der akademischen Laufbahn zuzuwenden und die Stelle als Prosektorgehilfe an der anatomischen Anstalt in Dorpat zu übernehmen, was mit Freuden akzeptiert wurde. Bidder hatte nach Reicherts Abgang von Dorpat neben seiner Professur für Physiologie stellvertretend auch die für Anatomie übernommen; Kupffer äusserte sich stets voll Dankbarkeit und Hochachtung über seinen Gönner Bidder, dass er in allen praktisch-anatomischen Arbeiten sehr erfahren und geschickt gewesen sei und ihm viel gelehrt habe.

Auf den Antrag von Bidder erhielt Kupffer im Sommer 1856 von der russischen Regierung ein Reisestipendium von 1500 Rubeln auf 1½ Jahre, „um sich in Deutschland durch weitere Studien in der Anatomie zu vervollkommnen“. Dadurch erfüllte sich ihm ein längst gehegter Wunsch, denn die deutschen Universitäten kennen zu lernen war das Ziel seiner Sehnsucht. Ueber Libau und Memel reisend, besuchte er zunächst den um die Entwicklungsgeschichte verdienten Heinrich Rathke in Königsberg und ging dann über Berlin nach Leipzig, wo er drei Wochen verblieb, um Ernst Heinrich Weber, einen der bedeutendsten Anatomen und Physiologen seiner Zeit, sowie den geistvollen Fechner und den Zoologen Victor Carus kennen zu lernen. Bei einem Besuche in Würzburg wurde er von Kölliker und dem allzufrüh verstorbenen talentvollen Heinrich Müller eingeladen, mit ihnen im Herbst in Nizza zum Studium der Seetiere zusammenzutreffen.

Vorerst wurde mit zwei Dorpater Freunden, die er in Würzburg angetroffen hatte, eine Vergnügungsreise durch die Schweiz gemacht; mit wahrem Entzücken spricht sich der nordische Wanderer über Heidelberg, die Schweizer Alpen und den Genfersee aus. In Nizza verbrachte er sechs Wochen in anregender Gesellschaft mit Kölliker, Heinrich Müller und Ernst Haeckel; er lernte hier zum ersten Male die mannigfaltige Tierwelt des Meeres kennen, ohne aber zu einer abschliessenden Untersuchung zu gelangen; er meinte, nicht einmal viel dabei profitiert zu haben, da seine zoologischen Kenntnisse noch zu mangelhaft waren und das grosse Material ihn überwältigte.

Von da ging es nach Wien, dessen medizinische Schule in höchstem Ansehen stand. Er nahm an einem physiologischen Experimentierkurs bei dem Meister des Experiments Carl Ludwig teil, wobei er einige in einer kleinen Abhandlung veröffentlichte Versuche über den Einfluss des Nervus vagus und des Nervus splanchnicus auf die Darmbewegung ausführte; er hörte ferner die Vorlesung über Physiologie bei Ernst Brücke und die über topographische Anatomie bei Joseph Hyrtl; aber auffallender Weise hat ihn nach seinen Äusserungen in Wien niemand wirklich gepackt, so dass er nicht sonderlich klüger wieder weiter ging. Er hatte eben noch nicht das Gebiet gefunden, in dem er seine Lebensaufgabe erkannte; nur von dem als Lehrer der Anatomie unerreicht dastehenden Hyrtl sagt er, derselbe habe sich ihm in der Art und Kunst des Dozierens und Demonstrierens, welche stets von einfachen, aber das Wesentliche meisterhaft gruppierenden topographischen Skizzen auf der Tafel begleitet war, als unvergleichlicher, ihm sehr förderlicher Lehrer erwiesen.

Nun zog er über Breslau, wo er seine frühere Dorpater Lehrer C. B. Reichert und Eduard Grube begrüsste, nach Berlin. Er blieb daselbst das ganze Sommersemester 1857; es war unstreitig der Glanzpunkt seiner Studienreise. Namentlich durch die Vorlesungen über Entwicklungsgeschichte und vergleichende Anatomie von Johannes Müller, dem grössten Physio-

logen seiner Zeit, erhielt er den nachhaltigsten Eindruck, und sie sind es gewesen, die ihn bestimmten sich der Morphologie zuzuwenden. Es waren die ersten Vorlesungen, die ihn durch die Originalität eines grossen Geistes und durch die Fülle neuer Tatsachen, aus eigener Forschung des Vortragenden aufgedeckt, gewaltig fesselten; die imponierend, düster ernste Erscheinung Johannes Müllers stand ihm noch später leibhaftig vor Augen. Ausserdem war es das ungemein rührige wissenschaftliche Leben in Berlin, welches ihn anzog; er hörte ein nur spärlich besuchtes Publikum über ausgewählte Kapitel der Physiologie bei Du Bois-Reymond und verkehrte in einem engeren Kreise junger strebsamer Gelehrten, welche ausgezeichnete Vertreter ihrer Wissenschaft geworden sind: mit Wilhelm Keferstein, Victor Hensen, Hermann Munk, Isidor Rosenthal etc. Hier machte er auch eine bemerkenswerte kleine experimentelle Arbeit: „über das Hemmungsvermögen der Muskeln gegenüber lokaler Erregung“ zur Widerlegung einer von Adolf Fick aufgestellten Behauptung; letzterer hatte nämlich am Musculus rectus abdominis des Frosches die auffallende Beobachtung gemacht, dass die Reizung des am unteren Ende eintretenden Nerven nur eine Kontraktion am unteren Viertel des Muskels bedingt, und daraus den sonderbaren Schluss gezogen, es besitze der Muskel die Fähigkeit die Erregung der Nerven auf eine gewisse Strecke zu beschränken; Kupffer war es alsbald möglich unter den Augen von Du Bois zu zeigen, dass die sehnigen Inskriptionen im Muskel die Fortpflanzung aufhalten.[1])

Nach einem auf der Insel Helgoland in Gesellschaft des hervorragenden Histologen Max Schultze sowie der späteren Marburger Anatomen N. Lieberkühn und Guido Wagner verbrachten Ferienaufenthalte, der ihm zwar etwas mehr nützte als Nizza, aber doch nicht voll befriedigte, begab er sich im Herbst (1857) nach der alten Universitätsstadt Göttingen, an welcher der Anatom Jakob Henle seine bedeutsame Wirksam-

[1]) Eine Untersuchung über die Entwicklung einer hermaphroditischen Schnecke (Valvata piscinalis) brachte er nicht zu Ende.

keit ausübte; ausser Henles Vorlesungen hatte ihn insbesondere dessen vielgenannter Prosektor L. Teichmann aus Krakau angelockt, um ihm seine meisterhafte Injektionstechnik der Lymphgefässe abzusehen, er hat aber nicht besonders viel von ihm gelernt; Teichmann verdankte man damals auch den Nachweis kleinster Blutmengen durch die längere Zeit als die genaueste geübte Häminprobe. Kupffer arbeitete zugleich in dem physiologischen Institut bei dem geistreichen Rudolf Wagner mit seinem Freunde Keferstein über den feineren Bau des elektrischen Organs des Zitteraals und Zitterwelses, was wegen der Analogie mit den Muskeln und ihren elektrischen Eigenschaften von besonderer Wichtigkeit war; er grämte sich später über diese Arbeit und bezeichnete sie offen als seine schlechteste, denn er musste sich durch Max Schultze belehren lassen, dass sie einen kardinalen Irrtum durch die Ungeduld des zur Publikation drängenden Keferstein begangen hatten.

Im Dezember 1857 traf unser Reisender, reich an Erfahrungen und als reifer Forscher, wieder in Dorpat ein; nach Erstattung eines eingehenden Reiseberichtes an den damaligen Kurator des Dorpater Lehrbezirkes, Herrn v. Bradke, wurde er nach einer wohlgelungenen Probevorlesung (1858) zum Prosektor und ausserordentlichen Professor ernannt. Sein väterlicher Freund Bidder hatte den Wunsch, Kupffer möchte sich der Physiologie widmen und darin sein Nachfolger werden. Kupffer fühlte sich jedoch dieser Aufgabe in richtiger Erkenntnis nicht gewachsen. Bis dahin war die Physiologie an den meisten Universitäten mit der Anatomie vereiniget; aber die mächtig sich entwickelnde Physiologie machte eine Trennung der beiden Fächer notwendig. Namentlich durch die Fortschritte in der Physik und durch die Arbeiten von Brücke, Ludwig, Helmholtz und Du Bois-Reymond hatte sich eine mathematisch-physikalische Vorbildung für den Physiologen und etwas später durch den Anstoss Liebigs auch eine chemische als notwendig erwiesen; dazu fehlten Kupffer mit seiner im Wesentlichen anatomischen Ausbildung die Kenntnisse und die Neigung, die ihn zu der Morphologie zog. Darum war es

ihm in seiner Stellung in Dorpat nicht behaglich und er hat in ihr wissenschaftlich wenig geschafft, mit Bidder eine Untersuchung über die Textur des Rückenmarks und die Entwickelung seiner Formelemente an Schafembryonen, in der er den embryologischen Abschnitt verfasste; dann eine Abhandlung über die Klappen des Rückengefässes der Rüsselegel als blutbereitende Organe, und eine allerdings sehr bedeutsame Arbeit über die Entwickelung des Harn- und Geschlechts-Systems, von der nachher noch die Rede sein wird.

Auch die Lehrtätigkeit sekundärer Natur befriedigte ihn nicht. Es war nach dem Weggang von Reichert der um die Kenntnis des Gehörorganes verdiente Anatom Ernst Reissner eingetreten, der nur um einige Jahre älter war wie Kupffer; letzterer hatte die Obliegenheiten des Prosektors auszufüllen und semesterweise mit Reissner alternierend die deskriptive Anatomie zu lesen; auch hielt er Spezialvorlesungen über Anatomie und Physiologie der Sinnesorgane, über physiologische Optik, sowie in der Tierarzneischule über vergleichende Anatomie. Dabei erkannte er immer mehr, dass er, um vorwärts zu kommen, Dorpat verlassen müsse, wo er keine Zukunft vor sich sah. Sein Streben war auf Deutschland gerichtet und so schlug er, zum Teil auch aus Abneigung gegen die Verhältnisse in Russland, im Jahre 1860 einen Ruf an die kaiserliche Akademie in St. Petersburg als Adjunkt für Anatomie und Physiologie, den ihm Karl Ernst v. Baer persönlich überbrachte, aus, worüber letzterer missbilligend den Kopf schüttelte; an seiner Stelle wurde Philipp Owsjannikow gewählt.

Da erfuhr er im Jahre 1865 durch eine Zeitung, dass der damalige preussische Korvettenkapitän Reinhold Werner eine deutsche Nordpol-Expedition plane; alsbald bewarb er sich bei ihm um die Teilnahme als Arzt und Zoologe und erhielt die Zusage. Darauf hin nahm er ohne Weiteres, alle anderen Rücksichten hintansetzend, seinen Abschied in Dorpat und erhielt die damals übliche nicht sehr grosse Abfindungssumme mit dem Titel als Kollegienrat.

Um sich auf seine neue Aufgabe vorzubereiten, reiste er

nach Kiel, wo er am 30. März 1866 eintraf; er wollte sich dorten vor Allem unter der Leitung seines ehemaligen Berliner Studiengenossen und Freundes, des ausserordentlichen Professors für Physiologie und Entwicklungsgeschichte Victor Hensen, mit der reichen Fauna der Kieler Bucht vertraut machen. Aber die politische Lage und der preussisch-österreichische Krieg vereitelten das Unternehmen. So blieb ihm nichts Anderes übrig als sich in Kiel als Privatdozent für Histiologie zu habilitieren, für welches Fach noch keine Professur bestand. Der Ordinarius für Anatomie W. F. G. Behn verlangte, dass er, obwohl früherer Dorpater Extraordinarius, noch eine lateinische Schrift pro venia legendi einzureichen hätte; dieselbe führte den Titel: „de Embryogenesi apud Chironomos observationes“, worin das Faltenblatt der Embryonen dieses zu den Zweiflüglern gehörigen Insektes behandelt wurde; sie ist nachträglich in deutscher Sprache veröffentlicht worden.

Damit hatte Kupffer endlich eine ihn sehr befriedigende Wirksamkeit an einer deutschen Universität gefunden. Das Glück war ihm noch weiter hold, indem Behn, ein sehr starrer Kopf, es verweigerte dem König von Preussen den Huldigungseid zu leisten und abgesetzt wurde; er wurde bald darauf zum Präsidenten der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie gewählt und siedelte nach Dresden über. Die medizinische Fakultät schlug nun Kupffer zum ordentlichen Professor der Anatomie und Histiologie vor, wozu er am 17. Februar 1867 ernannt wurde. Er brachte die glücklichste Zeit seines Lebens in Kiel zu; es war eine frohe, arbeitsreiche Zeit und er hatte Stadt und Land so lieb gewonnen, dass er Holstein seine zweite Heimat nannte. Deshalb schlug er auch die ihm durch Professor Arthur Böttcher angetragene Nachfolge Reissners in Dorpat und ebenso einen Ruf nach Breslau aus. Schliesslich bestimmten ihn pekuniäre Rücksichten (1875) einem Rufe nach Königsberg als Nachfolger des verstorbenen Anatomen August Müller Folge zu leisten; man beklagte in Kiel ausserordentlich den Weggang des beliebten Lehrers. Die Lehraufgabe in seinem neuen Wirkungskreise sagte ihm sehr zu, besonders da

er neben der Anatomie die ihm so lieb gewordenen Fächer der Entwicklungsgeschichte und der vergleichenden Anatomie zu lehren hatte. Da kam im Juni 1880 der Ruf an die hiesige Universität mit ihrer grossen, in vollem Aufschwung befindlichen medizinischen Fakultät als Ersatz für einen der bedeutendsten Anatomen und Lehrer, für Theodor Bischoff. Es war für ihn, trotz der glänzenden Stellung doch ein schwerer Entschluss; entscheidend war, dass ihm dahier die Vertretung seiner beiden Lieblingsfächer der Entwicklungsgeschichte und Histiologie geboten wurde und die deskriptive Anatomie sowie die Leitung des Präpariersaals Nikolaus Rüdinger verblieb. Ohne Rücksicht auf pekuniäre Vorteile wünschte er dadurch mehr Zeit für die Vollendung seiner entwicklungsgeschichtlichen Arbeiten zu bekommen. Es ist dies auch in vollstem Masse geschehen, so dass seine hiesige wissenschaftliche Tätigkeit seine besten Leistungen gezeitiget hat. Aber auch seine Lehrtätigkeit war eine hervorragende; in seinem Institute waren regelmässig junge Forscher mit mikroskopischen Untersuchungen beschäftiget und der ihm an seinem 70. Geburtstage von seinen Schülern überreichte prächtige Band, mit wertvollen Beiträgen von Theodor Boveri, Alexander Böhm, M. v. Davidoff, W. Flemming, Richard Hertwig, S. Mollier, Albert Oppel, Johannes Rückert, Ludwig Stieda und Andern, beweist, wie sehr er für seine Wissenschaft zu begeistern und methodisch in sie einzuführen wusste; der Same, den er gesäet, hat reiche Früchte getragen. Seine Vorlesungen waren durch den ausserordentlich klaren und bis ins Kleinste vorbereiteten formvollendeten Vortrag bei den Studierenden äusserst beliebt.

Kupffer ist aus einem russischen Untertan ein begeisterter Deutscher, aber auch ein guter Bayer geworden. An den Küsten des Meeres hat er die Bedeutung der Schiffahrt für die Machtstellung des deutschen Reiches erfasst und ein warmes Interesse an unseren Kolonien genommen; er war, obwohl sonst nur wenig ins öffentliche Leben tretend, 14 Jahre lang tätiger Vorsitzender der Abteilung München der deutschen Kolonial-Gesellschaft.

Es ist nicht die Aufgabe dieses Nachrufs die wissenschaftlichen Leistungen Kupffers im Einzelnen darzulegen; es kann darin nur gezeigt werden, welche Ziele er verfolgt hat und was dabei für die Wissenschaft bleibend geschaffen worden ist. Diesellben bewegen sich, wie schon erwähnt, im Wesentlichen auf dem Gebiete der Histiologie, besonders aber auf dem der Embryologie.

Es sollen zuerst seine wichtigsten histiologischen Arbeiten betrachtet werden.

In Kiel beschäftigte ihn die für die Physiologie so wichtige Frage nach der Endigungsweise der Nervenfasern in den Drüsen. Durch den Physiologen Carl Ludwig war eine der folgenreichsten Entdeckungen gemacht worden, nämlich die, dass die Speicheldrüsen nur unter dem Einflusse ihrer Nerven Sekret absondern, ähnlich wie die Muskeln für gewöhnlich nur bei ihrer Erregung vom Nerven aus tätig sind d. h. sich zusammenziehen. Da die Nervenfasern mit den Muskelfasern direkt zusammenhängen, so lag es nahe einen solchen Zusammenhang auch der Nervenfasern der Drüse mit den das Sekret bereitenden Drüsenzellen anzunehmen, ja es erschien dies sogar als ein physiologisches Postulat. Ein solcher Zusammenhang ist nun auch von Pflüger bei höheren Tieren beschrieben worden; aber Kupffer war in einer Arbeit über das Verhältnis der Drüsennerven und Drüsenzellen trotz eifrigsten Suchens so wenig wie irgend ein anderer Forscher imstande, bei Säugetieren denselben zu erkennen. Als er jedoch später die sogenannten Speicheldrüsen von Blatta orientalis, der bekannten Schabe, wo die kleinen Drüsen ganz klar und durchsichtig vorliegen, untersuchte, konnte er in einer Carl Ludwig gewidmeten Festschrift berichten, dass hier die Nervenfibrillen in die Drüsenzellen übergehen, sich hier teilen und in einem Gitterwerke der Zellen endigen. —

Er beschrieb ferner in einer Abhandlung: „über Differenzierung des Protoplasma an den Zellen tierischer Gewebe“ in dem Inhalt der Zellen zweierlei Substanzen: ein feines Gerüst von Fäden, das Protoplasma, an dem die wichtigsten Lebens-

vorgänge ablaufen sollen, und dann das in den Maschenräumen desselben enthaltene mehr flüssige und passive Paraplasma, aus dem z. B. das Sekret der Drüsenzellen hervorgeht. In seiner Rektorsrede vom Jahre 1896 führte er diese auf mikroskopische Beobachtung basierten Vorstellungen noch weiter aus. Das primäre und tätige Protoplasma ist darnach der allgemeine Träger des Lebens, das mehr passive Paraplasma oder die Paraplasten bedingen das Unterscheidende der Zelle nach Form und Funktion. Man hat schon früher bestimmte Teile der Zellen als Träger des Lebens bezeichnet: Carl Nägeli nennt sie die Micellen, Julius Sachs die Energiden, Andere haben andere Namen dafür. Nach Kupffer sollen selbst die Muskeln und Nerven ihre funktionelle Eigenart nicht den ihnen ursprünglich zu Grunde liegenden Energiden, sondern den von letzteren erzeugten Paraplasten, den Muskel- und Nerven-Fibrillen, verdanken; jede Energide entwickelt kinetische Energie und besitzt Leitungsvermögen; die lokomotorische Energie am Muskel und das Leitungsvermögen am Nerven, die er Dynamoplasten nennt, sind also nach ihm von den Paraplasten bedingt. Je höher ein Organismus nach der Komplikation seines Baues steht, desto reicher ist er an maschinenartig wirkenden Einrichtungen der Paraplasten und desto mehr sind dadurch die Energiden gehemmt. Diese Darlegungen Kupffers haben jedenfalls das grosse Verdienst, dass sie dazu beitragen, die feinere Struktur des Zelleninhalts näher kennen zu lernen und zu weiteren Forschungen anregen. Durch den Ausdruck „Energide" ist jedoch nur der anatomische Ort bezeichnet, von dem die Lebenserscheinungen ausgehen sollen, aber wie dieselben zu Stande kommen, das ist dadurch nicht gesagt: einer Erklärung der verwickelten Lebenserscheinungen d. i. der physiologischen Vorgänge — und dem verschliesst sich Kupffer nicht — sind wir dadurch nicht näher gekommen. Protoplasma und Paraplasten sind für den Physiologen einstweilen nur bequeme Namen. Das Protoplasma oder die Energide kann auch nicht oder nicht ausschliesslich der Ort und das Material sein, aus dem die kinetische Energie hervorgeht, da die Zersetzungen, welche die

letztere liefern, wohl auch in den Paraplasten stattfinden; die Energiden wirken in diesem Falle höchstens als Auslösungsmechanismen für die Zersetzungen in den Paraplasten. —

Wiederholt beschäftigte ihn der feinere Bau der Leber. Zunächst beschrieb er, im Anfange seiner Königsberger Zeit (1876), die Sternzellen der Leber als zwischen den Leberzellen an der Wand der Pfortaderkapillaren ansitzende Zellen mit Ausläufern, welche er noch in den letzten Jahren mit den feinsten Methoden der modernen Färbetechnik auf das Klarste sichtbar machte. Diese, auch die Kupffer'schen Zellen benannten Sternzellen stellten sich dabei als modifizierte Endothelien der Pfortaderkapillaren heraus, welche in hohem Grade die Fähigkeit besitzen, aus dem Blute durch sogenannte Phagocytose Partikelchen in sich aufzunehmen, wie z. B. in das Blut eingespritzte fein verteilte Farbstoffkörnchen und auch rote Blutkörperchen; die letzteren zerfallen in den Sternzellen und der rote Blutfarbstoff geht dann in ihnen höchst wahrscheinlich in den Gallenfarbstoff über, so dass die Sternzellen die Stätten der Bildung des roten Farbstoffs der Galle sind. — Es glückte ihm ferner (1889) in den Leberzellen der Nachweis präexistierender Sekretvakuolen, welche bei der Sekretion der Galle beteiliget sind, indem das in ihnen angesammelte Sekret in die die Zellen umgebenden Räume der Gallengänge entleert wird; dann der Nachweis eines feinen zwischen den Leberzellen verlaufenden Faser- oder Gitterwerkes, das er zuletzt durch besondere Färbemethoden in ausserordentlich präziser Weise darstellen lehrte. —

Über die Drüsen und die Drüsenzellen des Magens machte er (1883) in einer Festschrift des ärztlichen Vereins zu München bemerkenswerte Mitteilungen, in denen gezeigt wird, dass die die Säure bildenden sogenannten Belegzellen der Magendrüsen bei akuten fieberhaften Krankheiten schwinden. —

Wir verdanken ihm weiterhin eine für die Physiologie wichtige Aufklärung über den feineren Bau der Nervenfaser. Man sah früher den die Erregung leitenden Axenzylinder der Nervenfaser als einen soliden gleichmässigen Strang an; Kupffer

wies dagegen nach, dass derselbe aus einem Bündel in einer zähen, plasmatischen Flüssigkeit eingebetteter feinster Fibrillen besteht; es versorgt darnach nicht der ganze Axenzylinder einen Teil eines Organs, sondern eine Fibrille des Axenzylinders und es wird sich die Erregung einer solchen Fibrille nicht auf die im Axenzylinder nebenliegenden fortpflanzen; die Gerinnung des Plasmas nach dem Tode bringt offenbar das Ansehen eines soliden Stranges hervor. Die Konsequenzen aus der fibrillären Beschaffenheit für die Physiologie sind noch nicht genügend gewürdiget. —

Ausser diesen eine feinste Beobachtungsgabe und eine ausserordentliche Gewandtheit im Mikroskopieren zeigenden histiologischen Arbeiten lieferte er ein noch in Kiel geschriebenes systematisch-zoologisches Werk über die zu den Muscheln gehörigen Manteltiere oder Tunikaten in dem Jahresbericht der Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere; ferner Beiträge zur Anthropologie, darunter die Beschreibung der Schädel und Skelette der anthropologischen Sammlungen zu Königsberg (mit dem Cand. med. F. Bessel-Hagen) und insbesondere seine Schrift über den Schädel von Immanuel Kant (1881).

Den immer noch geheimnisvollen Vorgang bei der Befruchtung des Eies hat er an verschiedenen Wirbeltieren eingehend studiert z. B. in der Theodor Schwann zum 40jährigen Jubiläum gewidmeten Abhandlung über den Vorgang der Befruchtung am Ei der Neunaugen, in der über den gleichen Vorgang am Forellenei, sowie in der über die aktive Beteiligung des Dotters am Befruchtungsakte bei Kröten (Bufo variabilis und vulgaris). Man meinte früher, es dringe normal nur ein einziger Samenfaden in das Ei ein, Kupffer jedoch vertrat lange Zeit fast allein das physiologische Vorkommen des Eindringens mehrerer Samenfäden und er hat hierin Recht bekommen, denn es ist durch die neueren Erfahrungen sicher gestellt, dass die grossen dotterreichen Eier der Wirbeltiere polysperm befruchtet werden.

Von der grössten Bedeutung sind die entwicklungs-

geschichtlichen Forschungen Kupffers. Er betrat dieses Gebiet, in dem er neue Bahnen eröffnete, schon in der vorher erwähnten Untersuchung mit Bidder in Dorpat über die Entwickelung der Formelemente des Rückenmarkes und er hat es seitdem sein ganzes Leben lang mit fortwährender Schaffenskraft bearbeitet. — Es folgte die ebenfalls schon genannte, noch in Dorpat begonnene wichtige Untersuchung der Entwickelung des Harn- und Geschlechts-Systems, in welcher das bleibende Harnsystem der Säugetiere von einer Ausstülpung des Urnierenganges abgeleitet wurde. Dieselbe war für die damalige Zeit auch in technischer Beziehung ein Meisterstück, denn sie wurde noch mittelst lückenloser, aus freier Hand angefertigter Schnittserien angestellt, während man jetzt sich dazu komplizierter Mechanismen bedient.

Die ersten systematischen Beobachtungen der Entwickelung des Embryo wurden bekanntlich von Ignaz Döllinger dem Älteren in Würzburg an bebrüteten Hühnereiern gemacht; darauf kamen die meisterhaften, mit einer unerreichten Ausdauer durchgeführten Studien von Theodor Bischoff an Säugetieren: die Entwickelungsgeschichte des Eies des Kaninchens, des Hundes, des Meerschweinchens und des Rehes, welche noch ohne Zuhilfenahme der die Darstellung so ausserordentlich erleichternden Färbemethoden gewonnen worden waren. Kupffer war es vorzüglich, der hierin eine neue, fruchtbare Richtung einschlug. Es ist vorher hervorgehoben worden, wie der Einfluss von Johannes Müller ihn auf die vergleichende Anatomie und auf das Studium der niederen Tiere hingewiesen hat; er fing infolge davon schon in Dorpat an sich mit wirbellosen Tieren zu beschäftigen, wie seine Abhandlung über die blutbereitenden Organe bei den Rüsselegeln dartut. Insbesondere aber führte ihn die Bucht von Kiel mit ihrer reichen Meeresfauna zu der Beobachtung der Formen und der Entwickelung der niederen Wirbeltiere und der wirbellosen Tiere. Seinem scharfen Blick blieb es nicht verborgen, dass das Verständnis der Entwickelungsvorgänge bei den höheren, so sehr komplizierten Organismen allein durch die Untersuchung der niederen,

einfacheren Tiere gewonnen werden kann. Und so wurde er durch zahlreiche Arbeiten zu einem der Begründer der vergleichenden Entwickelungsgeschichte, welche Richtung durch ihre Fruchtbarkeit alsbald die Herrschaft in der Embryologie erlangte.

Von besonderem Werte sind hierin die drei in den Jahren 1869, 1870 und 1872 erschienenen glänzenden Abhandlungen über die Entwickelung der zu den Manteltieren gehörigen Seescheiden oder Ascidien, in denen er schon die hohe allgemeine Bedeutung solcher Untersuchungen an niederen Tieren klar darlegte. Der russische Zoologe Alexander Kowalewski hatte angegeben, dass diese Wirbellosen, die man früher für Verwandte der Mollusken hielt, während der Entwickelung der Larve durch die Bildung einer Rückensaite oder eines axialen Skeletts sowie eines dorsal vom Darm gelegenen Nervenrohres fundamentale Übereinstimmungsmerkmale in der Entwickelungsgeschichte mit den Wirbeltierembryonen zeigen und dadurch den Wirbeltieren am nächsten stehen. Diese Funde erschienen so wunderbar, dass die Zoologen denselben anfangs recht skeptisch gegenüber standen; auch Kupffer gehörte zu den Zweiflern; er machte sich alsbald daran die merkwürdige Sache zu prüfen und siehe da, er vermochte die Angaben von Kowalewski nicht nur zu bestätigen, sondern sie auch wesentlich zu erweitern. Er schreibt darüber unter dem ersten Eindrucke seiner Beobachtungen begeistert: „die erste Phase der Entwickelung, die Bildung der freien schwimmenden Larve aus dem Ei zeigt die Grundzüge der Wirbeltierentwickelung in elementarer Klarheit, so dass die Beobachtung etwas geradezu Überwältigendes hat.“ Das Gefühl vor einer neuen, weithin Licht bringenden Tatsache zu stehen, gehört wohl zu den glücklichsten Empfindungen, welche einem Menschen beschieden sein können. Die durch Kupffer in Wort und Bild gegebene Darstellung wirkte durchschlagend: die grosse Kluft zwischen den wirbellosen Tieren und den Wirbeltieren, die der Descendenzlehre so sehr im Wege stand, war überbrückt.

Schon vorher (1868) hatte Kupffer eine grössere Unter-

suchung über die Entwickelung der Knochenfische angestellt; später (1878) interessierte er sich als eifriges Mitglied der Kommission zur Erforschung der deutschen Meere nochmals speziell für einen Knochenfisch, den Hering, über den er seine Erfahrungen in einer Monographie: „über Laichen und Entwickelung des Ostseeherings“ seiner ersten Publikation aus Königsberg, niederlegte. Es waren zunächst die Bedürfnisse der Seefischerei, welche ihn zu diesen an den Küsten von Holstein und Südschweden gemachten Studien führten, aber es ergaben sich daraus auch für die Wissenschaft wichtige Resultate. Es gelang ihm nämlich die bis dahin unbekannte Jugendform des Herings aufzufinden und dieselbe auch durch künstliche Befruchtung aufzuziehen, die Entwickelungsbedingungen und die Lebensweise der jungen Brut festzustellen sowie die Ausbildung des Fisches von der Befruchtung an zu verfolgen. Dabei ergab sich die sonderbare Erscheinung, dass der ausgeschlüpfte Fisch kein rotes Blut, sondern wie viele wirbellose Tiere ein wasserklares Plasma besitzt, auch noch keine Kiemen hat und trotzdem mehrere Tage lang leben und sogar wachsen und neue Bildungen seiner Organisation anlegen kann. Kupffer glaubt, das Tier atme während dieser Zeit durch die flimmernde innere Oberfläche des vom Wasser durchspülten Darmes, ähnlich wie ein anderer Fisch, der Schlammpeizger, neben der Kiemenatmung eine Darmatmung besitzt, oder der Frosch ohne Lunge durch die feuchte äussere Haut den Sauerstoff aufnimmt und die Kohlensäure abgibt.

Darauf wandte er sich der Untersuchung der Vögel und der verwandten Reptilien zu. Er veranlasste den geschickten ausserordentlichen Professor der Anatomie Benecke in Königsberg (1879) eine grössere Sammlung embryologischer mikroskopischer Präparate des Huhnes und Sperlings zu photographieren, was demselben in vortrefflicher Weise gelang; diese Photogramme zur Ontogenie der Vögel sind die erste Veröffentlichung der Art gewesen; der von Kupffer verfasste Text brachte viele wertvolle Beobachtungen.

Bei den Reptilien wurden zunächst mit Benecke die ersten

Entwickelungsvorgänge im Ei studiert. Daran schloss sich eine ungemein folgenreiche Untersuchung der sogenannten Gastrulation bei diesen niedersten Vertretern der ein Wasserhäutchen oder eine Amnioshülle besitzenden Embryonen an. Es gehen nämlich bei der Gastrulation aus den embryonalen Zellen des befruchteten Eies durch Vermehrung und Abplattung zwei Blätter, die primären Keimblätter oder das äussere Ektoderm und das innere Entoderm hervor, aus denen sich der Leib des Embryo aufbaut; zwischen den beiden bildet sich noch ein drittes Blatt, das mittlere Keimblatt, das Mesoderm, aus. Und hier fand nun Kupffer bei den Reptilien eine Gastrula-Einstülpung wie bei den niederen amnionlosen Wirbeltieren. Dadurch war die Verbindung hergestellt nach abwärts zu den amnionlosen Wirbeltieren sowie auch nach aufwärts zu den höheren Amnioten, den Vögeln und Säugetieren. Es war dies eine für das Verständnis der embryonalen Vorgänge folgenreichste Entdeckung von Kupffer, welche er in drei Abhandlungen „über die Gastrulation der meroblastischen Eier der Wirbeltiere" niedergelegt hat, in einer ersten Abhandlung über die Reptilien, in einer zweiten über die Vögel und in einer dritten über die Knochenfische oder Teleostier.

Eine an den Keimblättern der Nagetiere aufgefundene Erscheinung war längere Zeit rätselhaft und unerklärlich geblieben. Unser verstorbenes Mitglied Theodor Bischoff hatte bei seinen denkwürdigen Untersuchungen über die erste Entwickelung der Säugetiereier am Meerschweinchen die später von Reichert und Hensen bestätigte sogenannte Umkehr der Keimblätter gefunden; es sollte hier die Lage der Keimblätter die umgekehrte von der gewöhnlichen sein d. h. das Ektoderm nach innen und das Entoderm nach aussen gewendet sein. Fast gleichzeitig unternahmen drei Forscher die Erklärung dieser sonderbaren Umlagerung, Hensen, Selenka und Kupffer. Nach Hensen soll das Ei das Epithel des Uterus durchbohren, woraus er die Blätterumkehr deutete, während nach Selenka und Kupffer das Epithel des Uterus dabei unbeteiligt ist. Kupffer trug in der Sitzung der Akademie vom 4. November

1882 seine Ansicht vor, während unser verstorbener Kollege Emil Selenka in einer am 15. November erschienenen Publikation die gleiche Deutung aussprach, nämlich die, dass eine Wucherung der Rauberschen Deckschicht einen hohlen Zapfen erzeugt, der gegen das Ei vordringt und dasselbe einstülpt, während Kupffer vorher meinte, der vordringende Zapfen gehöre der Decidua an.

An einem der niedersten Wirbeltiere, einem Fische, dem Flussneunauge (Petromyzon Planeri), 1888 und 1890, kam Kupffer, neben der Verfolgung der ersten Embryonal-Entwickelung, auch auf die Entstehung einzelner Organe, besonders der Nerven und der Sinnesorgane; von da an beschäftigte er sich in seinen embryologischen Arbeiten bis in die letzte Zeit seines Lebens vorzüglich mit der Genese der Organe. In dieser Richtung brachte er Mitteilungen über die Entstehung der Bauchspeicheldrüse und der Milz beim Stör, wodurch auch die Bildung der lymphoiden Organe erhellt wurde; dann entdeckte er das Pankreas beim Neunauge und beschrieb seine Entwickelung sowie auch die der Milz. Vor allem aber befasste er sich mit der Entwickelung des Kopfes in unausgesetzter Arbeit. Diese Forschungen gehören wohl zu den schwierigsten Aufgaben der Morphologie, da es gilt die fortlaufenden Serien der sich in kurzer Zeit an den kleinen und zarten Gebilden abspielenden Vorgänge zu erhalten und zu deuten. Es wird dabei von ihm die Entwickelung des Gehirns und der Gehirnnerven der Wirbeltiere, speziell vom Neunauge beschrieben; dann in den Studien zur vergleichenden Entwickelungsgeschichte des Kopfes der Kranioten die Entwickelung des Kopfes vom Stör und vom Neunauge sowie die Entwickelung des Kiemenskeletts beim Neunauge erörtert. Dazu gesellten sich Untersuchungen über die Entstehung der Sinnesorgane, der Nase und des Mundes an niederen Wirbeltieren, auch eine Deutung des Hirnanhangs und anderes.

Kupffer hatte schon lange den lebhaften Wunsch, die Eier und Embryonen eines Vertreters der tief stehenden Gruppe der zu den Fischen gehörigen Myxinoiden, von Bdellostoma,

deren Entwickelung bisher völlig unbekannt war und die wichtigsten Aufschlüsse versprach, zu erhalten. Im Auftrage und mit Unterstützung der Akademie begab sich zu diesem Zweck der Kustos an der hiesigen geoologischen Sammlung Dr. Franz Doflein nach Kalifornien, um von der an der Bucht von Monterey gelegenen biologischen Station aus in Entwickelung begriffene Eier von Bdellostoma zu erlangen. Es glückte ihm auch befruchtete Eier zu bekommen, an welchen Kupffer für die vergleichende Entwickelungsgeschichte des Kopfes, besonders des Gehirns, der Nase, des Hirnanhangskanals und des Munddarms, höchst bedeutsame Resultate erhielt.

Wir kommen nun zu dem letzten grossen Werke Kupffers, das eine Zusammenfassung seiner reichen Erfahrungen über die Entwickelung des Kopfes bildet. Als Oskar Hertwig in Berlin die Herausgabe eines grossen Handbuchs der Entwickelungsgeschichte plante, bei dem die hervorragendsten Embryologen die einzelnen Kapitel übernehmen sollten, war er nicht im Zweifel, wem er die Entwickelungsgeschichte des Zentralnervensystems zu übergeben habe. Kupffer sagte trotz der ausserordentlichen Schwierigkeit und Grösse der Aufgabe unbedenklich zu, denn es war ihm am Ende seiner Laufbahn eine erwünschte Gelegenheit, das ganze betreffende Gebiet nochmals durchzuarbeiten und die mancherlei Lücken durch erneute Untersuchungen auszufüllen. Aber trotz seiner ungeschwächten Arbeitskraft zeigte sich die Aufgabe in geistiger und technischer Beziehung für die gegebene Zeit allzu gross und unbewältigbar. Da entschloss er sich die ihm sonst so zusagende Lehrtätigkeit zu opfern, um seine ganze Kraft und Zeit seinem letzten wissenschaftlichen Werke zu widmen. Trotz der Bitten seiner Kollegen und Freunde, die den gefeierten Lehrer gerne noch der Universität erhalten hätten, blieb er bei seinem Entschlusse. Und nun begann er auf das Angestrengteste, ohne sich Ruhe zu gönnen, zu arbeiten; den Tag über war er im anatomischen Institut beschäftigt das Material zu richten und mit dem Mikroskope zu beobachten, und zu Hause schrieb er oft bis in die tiefe Nacht hinein das

Erkannte nieder. Die Freude, sein Werk wachsen zu sehen, spornte ihn an und hielt ihn geistig aufrecht; so gelang ihm die Vollendung des weitaus grössten und schwierigsten Teils desselben. Aber damit war auch die Kraft seines schon länger nicht sehr widerstandsfähigen Körpers gebrochen; infolge der Überanstrengung erlitt er in der Nacht vom 18. auf 19. September einen Schlaganfall, der ihn auf der einen Seite lähmte; sein Geist war jedoch noch in alter Frische. Er nahm an allem Wissenswerten lebhaften Anteil und ertrug sein körperliches Leid mit wunderbarer Gelassenheit, wie verklärt in dem Bewusstsein, sein Lebenswerk glücklich und zum Nutzen der Meuschheit vollbracht zu haben. So ist er am 16. Dezember 1902 an einer dazu getretenen Lungenentzündung aus dem Leben geschieden.

Kupffer hat wahrlich ein schönes Dasein gehabt; ein Leben voller Mühe, aber auch einen Erfolg in immer steigendem Masse bis an sein Ende. Noch während der letzten Jahrzehnte war seine Produktivität am grössten und die Bedeutung seiner Arbeiten am höchsten. Er hatte die reine Freude, eine Anzahl fundamentaler Tatsachen der Genese der Lebewesen auf der Erde zuerst erkannt zu haben. Dinge, welche in seiner Jugendzeit noch ganz im Verborgenen lagen, hat er im Alter durch seine Tätigkeit klar vor sich gesehen. Durch sein Schaffen ist der genetische Zusammenhang der tierischen Organismen, wie eines aus dem anderen durch Umbildung, sich vervollkommnend, hervorgeht, an mehreren Stellen erwiesen und die Descendenzlehre wesentlich gefördert worden.

Trotz dieser Verdienste und seines hohen Ansehens blieb er wie ein echter Forscher, der bei allem Wissen doch das Gefühl der Unzulänglichkeit desselben bewahrte, ein bescheidener Mann, welcher in aller Stille, nur der Wissenschaft dienend, die Wunder der Natur zu enthüllen bestrebt war.

Lazarus Fuchs.

Am 26. April 1902 starb in Berlin das korrespondierende Mitglied unserer Akademie, der Mathematiker Lazarus Fuchs.

Fuchs ward am 5. Mai 1833 in Moschin in der Provinz Posen geboren, und zeigte schon auf dem Friedrich-Wilhelmsgymnasium in Posen, wo er seine Vorbildung erhielt, eine besondere Neigung und Begabung für die Mathematik. Er studierte ausschliesslich an der Universität Berlin, wo besonders die Mathematiker Ernst Eduard Kummer und Carl Theodor Wilhelm Weierstrass seine Lehrer waren. Nachdem er im Jahre 1858 promoviert hatte, wandte er sich dem Lehrfach zu; er war zuerst Gymnasiallehrer, dann Lehrer an der Friedrich-Werderschen Gewerbeschule. Er habilitierte sich 1865 als Privatdozent an der Universität Berlin, ward im folgenden Jahre zum ausserordentlichen Professor daselbst ernannt und erteilte von 1867—1869 als Professor den mathematischen Unterricht an der Artillerie- und Ingenieur-Schule. Sodann wurde er 1869 als Ordinarius nach Greifswald, 1874 nach Göttingen, 1875 nach Heidelberg berufen; 1882 kam er nach Berlin zurück, wo er als Professor der Mathematik an der Universität und Mitdirektor des mathematischen Seminars sowie als Mitglied der Akademie der Wissenschaften eine ungemein fruchtbare Tätigkeit als Forscher und Lehrer entfaltete.

Ich verdanke die folgende Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen von Fuchs der kundigen Feder unseres verehrten Kollegen Ferdinand Lindemann.

Die Verdienste von Fuchs um die Mathematik liegen auf dem Gebiete der Funktionentheorie, in das er durch seinen Lehrer Weierstrass eingeführt war. An der Spitze stehen seine Arbeiten über lineare Differentialgleichungen, in denen die Koeffizienten rationale Funktionen der unabhängig Veränderlichen sind. Die analytische Darstellung ihrer Integrale und das Studium der Eigenschaften der letzteren wurden von Fuchs so vollständig durchgeführt, dass die Zurückführung eines Problems auf solche Differentialgleichungen heute als äquivalent

mit der Lösung desselben zu betrachten ist, wie sonst, wenn die Zurückführung auf sogenannte Quadraturen gelingt. Der ausgedehnte Gebrauch von dem Begriffe der analytischen Fortsetzung einerseits, von den Methoden der Potenz-Entwicklung anderseits sind die einfachen und fruchtbaren Hilfsmittel, welche Fuchs anwandte. Zahlreiche Schüler haben seine Arbeiten fortgesetzt und ausgeführt; die umfangreiche Literatur über lineare Differentialgleichungen, wie sie in den letzten Dezennien erwachsen ist, gibt Zeugnis von der Bedeutung des durch Fuchs gemachten Fortschrittes. Die Anerkennung, welche wir ihm dafür schulden, kann nicht dadurch herabgemindert werden, dass ein Teil seiner Ideen sich nachträglich auch in den nachgelassenen Papieren Riemanns gefunden hat; diese Anerkennung wird aber wesentlich gehoben durch den Umstand, dass die schönen und fruchtbaren Entdeckungen von Schottky und Poincaré sich vermutlich hauptsächlich auf die Fuchs'schen Arbeiten stützen.

Insbesondere hat Fuchs die Periodizitäts-Moduln hyperelliptischer, später auch der allgemeinen Abel'schen Integrale in ihrer Abhängigkeit von den Parametern durch lineare Differentialgleichungen definiert und ihre Eigenschaften studiert. Ferner gelang es ihm, die bekannte Legendre'sche Relation zwischen ganzen elliptischen Integralen sowie den Jacobi-Weierstrass'schen Satz über Vertauschung von Parameter und Argument bei Abel'schen Integralen wesentlich zu erweitern, indem er zeigte, dass analoge Relationen immer zwischen gewissen Integralen der Lösungen linearer Differentialgleichungen bestehen.

Im Zusammenhang mit den Arbeiten über Abel'sche Funktionen und Integrale steht auch der Versuch, das Jacobi'sche Umkehrproblem dieser Integrale auf andere Funktionen zu übertragen d. h. solche Funktionen φ und ψ zu bestimmen, dass sich aus den beiden Gleichungen

$$\varphi(z_1) + \varphi(z_2) = u_1$$
$$\psi(z_1) + \psi(z_2) = u_2$$

die Grössen z_1 und z_2 umgekehrt als in gewissen Gebieten eindeutige Funktionen der gegebenen Grössen u_1 und u_2 berechnen lassen, wie dies eben durch Θ-Funktionen geschieht, wenn φ und ψ Abel'sche (hier ultraelliptische) Integrale darstellen. Es gelang Fuchs die Existenz solcher Funktionsklassen nachzuweisen und Bedingungen aufzustellen, denen sie zu genügen haben.

Auf Grund seiner allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen hat Fuchs eingehend die Frage nach solchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt, welche algebraische Integrale besitzen.

Von spezielleren Problemen, welche Fuchs behandelt hat, sei hier die Frage nach solchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hervorgehoben, welche algebraische Integrale besitzen; hier gab er den ersten Anstoss zu Untersuchungen, die Klein eleganter und vollständiger durchgeführt hat, und die wegen ihrem Zusammenhange sowohl mit der Theorie der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen, wie sie Schwarz behandelt hatte, als mit der modernen Algebra und Invariantentheorie das Interesse weitester Kreise erregten.

Neue Gesichtspunkte gab Fuchs auch für die Behandlung der in der Physik so wichtigen Lamé'schen Differentialgleichungen, deren Theorie für den einfachsten Fall von Hermite so glänzend entwickelt war, während Fuchs dieselben als einen speziellen Fall einer allgemeinen Klasse erkannte, deren Besonderheiten sich durch seine allgemeinen Integrations-Methoden klar übersehen lassen.

Das Studium der gemeinsamen Eigenschaften aller linearen Differentialgleichungen einer und derselben Klasse (dieses Wort in dem aus Riemanns Nachlasse bekannten Sinne genommen) und der Abhängigkeit der singulären Punkte nicht-linearer Differentialgleichungen von den Integrations-Konstanten bildet den wesentlichen Inhalt der späteren Arbeiten von Fuchs.

Er beteiligte sich auch an der im Auftrage der Berliner Akademie ausgeführten Herausgabe der Schriften hervorragender Mathematiker, die einst Mitglieder der Akademie waren.

Der reinen Mathematik hat Fuchs sehr wesentliche Dienste geleistet und er ist dadurch einer der hervorragendsten Mathematiker unserer Zeit geworden.

Rudolf Virchow.[1])

Mit Rudolf Virchow ist am 15. September 1902 der Letzte der grossen biologischen Schule Johannes Müllers gestorben. Das was Müller und seine Schüler Henle, Schwann, Brücke, Helmholtz und Du Bois Reymond an den normalen Formen und Vorgängen des Lebens erforscht haben, das übertrug Virchow mit seltenem Scharfsinn auf die krankhaften Formen und Vorgänge. Immer mehr tritt die mächtige Gestalt von Johannes Müller hervor, wenn man den Einfluss, den er persönlich auf so viele junge Forscher ausgeübt, sich vergegenwärtigt, sowie seiue grundlegenden Leistungen in allen Gebieten der biologischeu Wissenschaft übersieht; insbesondere ist auch sein Handbuch der Physiologie des Menschen für jeden Kenner immer noch eine Quelle geistigen Genusses und von Belehrung; es ist ein gewaltiger Unterschied zwischen diesem Lehrbuch und den früheren, es leitet die neuere Zeit der Forschung für die Vorgänge des Lebens ein. Er war es vor Allem, der die in den erklärenden Naturwissenschaften, in der Physik uud Chemie, geübte Methode in die Biologie einführte, die Methode der exakten Beobachtung und des Versuchs. Leider tritt heutzutage wieder die Neigung, in das seichte Gerede der naturphilosophischen Richtung zurückzufallen, hervor; es ist eben viel leichter allerlei, so Manchen geistreich erscheinenden Spekulationen

---

[1]) Siehe die Nekrologe von:

Felix Marchand, Gedächtnisrede, 21. Okt. 1902, in der mediz. Ges. zu Leipzig;

J. Orth, Gedächtnisrede in d. Berliner mediz. Ges. am 29. Okt. 1902;

H. Chiari, Gedenkrede, Prager med. Wochenschrift, 1902, Bd. 26, Nr. 43;

O. Bollinger, Münchener med. Wochenschrift, 1901, Nr. 41 und 1902, Nr. 39.

sich hinzugeben, als mit Mühe eine Erscheinung richtig zu beobachten und auf ihre Ursachen zurückzuführen. Unserer Zeit fehlt ein sicherer Führer wie Johannes Müller.

Auch der mit reichen Gaben ausgerüstete Virchow war im Geiste seines Lehrers erzogen und von ihm darauf hingewiesen worden, die neuen Erkenntnisse der Anatomie und Physiologie auf die Pathologie anzuwenden. Ein durch mehr als ein halbes Jahrhundert unermüdlich tätiger Forscher, von feinster Beobachtungsgabe und schärfstem kritischen Verstand, hat er neue Bahnen eröffnet und die Wissenschaft mit einer gewaltigen Summe von Erfahruugen bereichert, die er nüchternen Sinnes interpretierte ohne je über die Grenze des Gesehenen hinaus zu gehen, stets sich hütend vor voreiligen Schlussfolgerungen und Spekulationen und vor ihnen warnend. Durch sein Beispiel trug er viel dazu bei, die richtige naturwissenschaftliche Methode der Untersuchung auch auf das pathologische Geschehen anzuwenden und die Überzeugung zu erwecken, dass man auch hier zuerst beobachten und Erfahrungen sammeln müsse, und erst auf diese gestützt mit strenger Kritik die Folgerungen ziehen darf. Gerade durch die eingehende Beschäftigung mit dem Einzelnen, die ihn zu grundlegenden Entdeckungen in der Pathologie führte, wurde sein Blick für das Ganze geschärft und der Zusammenhang der Erscheinungen erkannt. Durch seinen unstillbaren Drang nach Erkenntnis und seine nie versagende Arbeitskraft sammelte er sich ein ganz enormes Wissen in allen Zweigen der wissenschaftlichen Medizin sowie in anderen Gebieten des Wissens an, das ihm bei seinem staunenswerten Gedächtnis immer parat war und das er bei seiner glänzenden Rednergabe für Andere zu verwerten wusste. Vielfältige Anregungen gingen von seinen Ideen aus, so dass er ein Reformator in der Pathologie wurde und der grösste Pathologe unserer Zeit und einer der grössten Pathologen aller Zeiten. In späteren Jahren ging er über sein ursprüngliches Fach hinaus und zu anderen Richtungen über: zur Anthropologie und zur öffentlichen Gesundheitspflege, worin er ebenfalls Grosses leistete.

In dem kleinen pommerschen Landstädtchen Schiefelbein am 13. Oktober 1821 als Sohn eines kleinen Kaufmanns geboren, besuchte er das Gymnasium zu Köslin und kam im Alter von 17 1/2 Jahren als Student nach Berlin, um in die militärärztlichen Bildungsanstalten einzutreten und an der Universität Naturwissenschaften und Medizin zu studieren, zu denen er schon am Gymnasium lebhafte Neigung zeigte. Aus diesen Anstalten, die auch dem Unbemittelten das Studium ermöglichten, sind manche hervorragende Gelehrte und Mediziner hervorgegangen; Helmholtz war zugleich mit Virchow Zögling des Instituts. Seine damals schon erworbene universelle Bildung wird erwiesen, dass er noch als Student eine bekannte Chronik seiner Vaterstadt Schiefelbein schrieb.

Den grössten Einfluss übten in seiner Studienzeit auf ihn aus der Physiologe Johannes Müller und der Kliniker Lukas Schönlein, denen er später in Dankbarkeit prächtige Gedächtnisreden widmete.

Nachdem er mit Erlangung der Doktorwürde (1843) seine medizinischen Studien beendet hatte, wurde er Assistent des Prosektors an dem Charité-Krankenhause in Berlin, Robert Froriep, dessen Nachfolger er (1846) wurde; auch war er mit der Ausführung der mikroskopischen und chemischen Untersuchungen für die Krankenabteilungen betraut. Hier hatte er die günstige Gelegenheit die grössten Erfahrungen am Leichentische durch Sektionen zu sammeln; jedoch gilt hier so recht der alte Satz: Erfahrungen machen klug, aber nur Kluge machen Erfahrungen.

Der Ausgangspunkt von Virchows Eingreifen war das unsterbliche Werk von Theodor Schwann: „mikroskopische Untersuchungen über die Übereinstimmung in der Struktur und dem Wachstum der Tiere und Pflanzen“ (1839), in denen zuerst der sichere Nachweis geführt wurde, dass alle tierischen und pflanzlichen Gewebe aus kleinsten Gebilden, den Zellen, hervorgehen. Der Botaniker Schleiden hatte dies schon vorher für die Pflanzen festgestellt und J. Müller Zellen in der Chorda dorsalis der Tiere gefunden. Schleiden und Schwann waren

jedoch noch der Anschauung, die lebenden Zellen entständen aus einem unbelebten amorphen flüssigen Blastem, also von selbst durch Urzeugung. Die Anwendung der neuen Lehre auf pathologische Gebilde war von J. Müller (1838) in seinem berühmten Werke: „über den feineren Bau und die Formen der krankhaften Geschwülste“ gemacht worden, in welchen er zellige Elemente mit dem Mikroskope nachwies, teilweise von der Beschaffenheit derer in dem normalen Organismus. Diese Erbschaft trat Virchow an; er unternahm es zielbewusst die Erscheinungen des kranken Lebens an den vitalen Elementen, den Zellen, zu erforschen.

Die Medizin in Deutschland befand sich damals in einem traurigen Zustande, eine auf Beobachtungen basierte fortschreitende Entwicklung gab es noch nicht, statt dessen die verschiedensten Meinungen und Schulen mit ihren teils naturphilosophischen Vorstellungen. Virchow bekämpfte im Alter von 25 Jahren als Prosektor an der Berliner Charité die Humoralpathologie und Krasenlehre Rokitanskys und der Wiener Schule siegreich, der Anfänger gegen den Meister, schonungslos aber gerecht, so dass schliesslich Rokitansky ein Anhänger der cellularen Ansicht wurde. Zunächst musste das anatomische Substrat, an dem die Veränderungen bei der Krankheit ablaufen, genau studiert werden; man hatte vorher nur die gröberen anatomischen Veränderungen der Organe beschrieben, wie es noch der grosse Wiener pathologische Anatome, Karl Rokitansky, der Begründer der wissenschaftlichen pathologischen Anatomie, tat, nach Virchows Urteil der unerreichte Meister pathologisch-anatomischer Beobachtung und Schulung. Erst die mikroskopische Betrachtung der kranken Zellen konnte einen näheren Einblick in die anatomischen Veränderungen derselben bringen. Aber Virchow blieb dabei nicht stehen, denn er hielt Rokitansky, der die pathologische Anatomie für die einzige Grundlage des ärztlichen Wissens ansah, entgegen, dass nach der pathologischen Anatomie, die nur das Todte kennt, die pathologische Physiologie kommen müsse, welche erst die Vorgänge bei der Erkrankung verstehen lehrt. So

wie aus der Kenntnis der normalen Formen der Anatomie, die der Lebenserscheinungen an denselben, die Physiologie, hervorging, so gibt die pathologische Anatomie allein noch keinen Einblick in die physiologischen Vorgänge der Krankheit. Vor Virchow hatten schon John Hunter in England und Magendie in Frankreich, in Deutschland W. Roser, C. A. Wunderlich und W. Griesinger bei der Gründung ihres Archivs für physiologische Heilkunde (1841) auf die Bedeutung der Physiologie für das Verständnis der Krankheitserscheinungen hingewiesen; Virchow betrat mit Ludwig Traube ebenfalls diese Bahn und wenn er auch im Wesentlichen mit dem Mikroskope arbeitender pathologischer Anatom blieb, so hat er sich doch auch chemischer Hilfsmittel und des Experimentes am Tier bedient, um die pathologische Physiologie zu fördern.

Als junger Prosektor begann er eine ungemein rege wissenschaftliche Tätigkeit zu entwickeln, die bald die Aufmerksamkeit auf ihn lenkte. Schon im Jahre 1845 entdeckte er im leukämischen Blute die abnorme Vermehrung der weissen Blutkörperchen; 1846 folgten seine Untersuchungen über die Gerinnung des Blutfaserstoffs innerhalb der Blutgefässe des lebenden Organismus; er erkannte, dass es sich bei der Venen- oder Arterienentzündung nicht um eine primäre Krankheit der Gefässwände, sondern um eine Gerinnung des Faserstoffs im Gefäss handelt, woraus sich dann seine chemischen Arbeiten über den Faserstoff und über die Vorgänge bei seiner Gerinnung sowie die experimentellen über die Verstopfung der Lungenarterie durch Faserstoffablösungen oder über die Thrombose und Embolie anschlossen. Weiterhin sind zu nennen die über die Entwicklungsgeschichte des Krebses und über Metastasen und die über die pathologischen Pigmente. Dieselben haben vorher ganz unverständliche Krankheitserscheinungen auf ihre Ursachen zurückgeführt.

Im Alter von 26 Jahren gründete er (1847), die Wichtigkeit eines eigenen Organs für seine Wissenschaft und seine Bestrebungen einsehend, das Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medizin im Verein mit seinem

leider allzufrüh (1852) verstorbenen talentvollen Freunde Benno Reinhardt. Es wurde anfangs von Manchem als eine Überhebung angesehen, dass so junge Leute sich als Führer hinstellen wollten, aber bald zeigte es sich, dass sie dem Unternehmen voll gewachsen waren; es ist dies ein Zeichen der frühen geistigen Reife der beiden Freunde und des Bewusstseins ihrer Fähigkeiten. Von Anfang an war das Archiv eine der geachtetsten medizinischen Zeitschriften und man kann sagen, dass sich darin die Entwicklung der wissenschaftlichen Pathologie im letzten halben Jahrhundert findet, insbesondere durch die Beiträge Virchows und seiner Schüler. 55 Jahre hindurch hat er dasselbe in strenger Forschungsrichtung erhalten und mit sicherer Hand bis zu seinem Tode geleitet, wo es 169 Bände umfasste. Neben seinen Untersuchungen brachte er darin die Kenntnisse in gewissen Gebieten zusammenfassende Leitartikel, das grosse Material mit scharfer Kritik sichtend und falsche Anschauungen bekämpfend.

Im Jahre 1847 habilitierte er sich als Privatdozent an der Universität mit einer in lateinischer Sprache geschriebenen Dissertation: de ossificatione pathologica.

Im Jahre 1848 wurde Virchow von der preussischen Regierung nach Oberschlesien zum Studium der dortigen verheerenden Hungertyphus-Epidemie gesandt. Dies war für seine Lebensschicksale von entscheidender Bedeutung. In einem ausführlichen Berichte darüber lieferte er eine epidemiologische Beschreibung der Krankheit, aber er bezeichnete auch als wesentliche Ursache derselben die sozialen Missstände und die entsetzliche Lage der Bevölkerung, die er rücksichtslos aufdeckte; dabei fällte er freimütig ein vernichtendes Urteil über die unhaltbaren Zustände der ganzen, im alten bureaukratischen Schlendrian fortarbeitenden Verwaltung und zeigte, dass der Kampf gegen die Schäden nur durch tiefgreifende soziale Reformen geführt werden könne. Er zog sich dadurch nicht, wie man eigentlich erwarten sollte, den besonderen Dank der Behörden, sondern ihr Missfallen zu. Dem edeln, mitfühlenden Manne war die Not des Volkes zu Herzen gegangen; es war

ihm heiliger Ernst, er wollte dem Elend, das er als Arzt kennen gelernt hatte, abhelfen und strebte dazu eine Gesundheitspflege auf demokratischer Grundlage an. Die dabei gemachten trüben Erfahrungen führten ihn zu demokratischen Anschauungen und der Politik zu. Er beteiligte sich an den Bestrebungen der Märzrevolution, wobei er für soziale Probleme eintrat. Mit Leubuscher gab er zu dieser Zeit eine nur ein Jahr bestehende Wochenschrift: „die medizinische Reform" heraus, in der er seine Ideen über eine Reform der Medizin und der Gesellschaft entwickelte.

Infolge seiner politischen Tätigkeit wollte man ihm die Prosektur an der Charité nehmen; man liess sie ihm zwar, aber nur widerruflich unter Entziehung des Gehalts.

Da kam ihm Hilfe von auswärts. An der Universität Würzburg hatte man die Bedeutung des jungen aufstrebenden Forschers erkannt und ihn (1849) für die frei gewordene Professur der pathologischen Anatomie in Vorschlag gebracht. Es ist ein grosses Verdienst der bayerischen Staatsregierung, dass sie, namentlich auf die Empfehlung von Rinecker hin, den politisch anrüchigen und gefährlich erscheinenden, berief. Die Wahl erwies sich als eine ganz ungemein glückliche, ähnlich der des jungen Johannes Müller auf die Professur für Physiologie in Berlin durch den Minister Altenstein an die Stelle von Rudolphi. In der medizinischen Fakultät wirkte damals eine Anzahl junger talentvoller, in der Wissenschaft angesehener Forscher: Albert Kölliker, Heinrich Müller, Franz Leydig, Friedrich Wilhelm Scanzeni, Joseph Scherer. Von überall her zogen Jünger an die blühende Hochschule; mit ungewöhnlichem Fleisse und mit Begeisterung für die anregenden Lehrer wurde studiert und diejenigen, welche diese schönen Zeiten mitgemacht, haben sich stets mit Freude und Dankbarkeit derselben erinnert. Die medizinische Fakultät wurde infolge davon die erste in Deutschland und sie hat lange noch an diesem Ruhme gezehrt. Es ist ein leuchtendes Beispiel wie die richtige Wahl bedeutender junger Kräfte eine Universität zu heben vermag. In diesem anregenden Kreise entwickelte sich Virchow

zu seiner vollen Kraft und er hatte das Glück viele Schüler, die seine Lehren ausbreiteten, um sich zu versammeln. Auch das medizinisch-naturwissenschaftliche Leben in Würzburg nahm unter seiner starken Mithilfe einen Aufschwung, der in der Gründung der medizinisch-physikalischen Gesellschaft Ausdruck fand; Virchow war, wie Kölliker anerkannte, der eifrigste Förderer und geistige Leiter derselben, ein Vorbild für Alle in exakter Forschung.

In Würzburg war wohl die glücklichste Zeit seines Lebens, die seines reichsten Schaffens. Es entstanden dorten die weittragenden Untersuchungen über den Bau des Bindegewebes, wobei die Bindegewebszellen gefunden und ihre Identität mit den Knochen- und Knorpel-Körperchen sowie ihr Verhältnis zu ihrem Ausscheidungsprodukt, der Intercellularsubstanz, dargetan wurde; über die Natur der Bindegewebszellen entspann sich zwischen ihm und dem berühmten Anatomen Jacob Henle ein äusserst heftiger Streit, in dem Virchow Sieger blieb. — Dann kamen die bedeutungsvollen Arbeiten über die Entzündung, besonders die über parenchymatöse Entzündung (1852); er verwarf die ältere vasculäre und neuropathische Entzündungslehre und betrachtete als das Wesen der Entzündung degenerative Veränderungen in den Gewebszellen, die zur Vernichtung der Funktion derselben führen können. Das Exsudat war ihm nicht, wie bei der alten Entzündungslehre etwas Besonderes und nur bei der Entzündung Entstehendes, sondern die immer vorhandene qualitativ und quantitativ modifizierte Ernährungsflüssigkeit, durch deren Ansammlung die Zellen und Gewebe verändert werden; die Gefässe beteiligen sich bei der Entzündung nur sekundär.

Er entdeckte zuerst in gewissen pathologischen Fällen im Gehirn und Rückenmark, dann auch in anderen Organen Körnchen einer grauen kleisterartigen Substanz, welche mit Jod und Schwefelsäure sich wie Cellulose färbt und die er deshalb anfangs für Cellulose hielt; man weiss jetzt, dass die von ihm als amyloide Degeneration bezeichnete Veränderung von einem besonderen Eiweissstoff herrührt.

Es folgten Untersuchungen über Tuberkulose, Phtise, Skrophulose, Perlsucht, über Geschwülste, Rhachitis, Echinococcus etc. Im Auftrage der bayerischen Regierung studierte er die Not im Spessart, über die er eine medizinisch-geographische Skizze lieferte. Dabei machte er Beobachtungen über den Kretinismus in Unterfranken, welche ihn zu den wichtigen Untersuchungen über Schädelentwicklung und pathologische Schädelformen führten, die er in seinem berühmten, ersten anthropologischen Werke: „über die Entwicklung des Schädelgrundes im gesunden und krankhaften Zustande" zusammenfasste. Ausserdem gab er mit J. Scherer und Eisenmann den bekannten Cannstattschen Jahresbericht heraus, dann (1854) das Handbuch für spezielle Pathologie und Therapie, für das er die allgemeinen Störungen der Ernährung und des Blutes bearbeitete, und die gesammelten Abhandlungen zur wissenschaftlichen Medizin mit zahlreichen neuen Beiträgen von seiner Hand.

Durch seine mikroskopischen Untersuchungen, namentlich pathologischer Gebilde, befestigte sich in ihm immer mehr die Überzeugung, dass eine Zelle nur aus schon vorhandenen Zellen entsteht und sich nicht aus formlosem flüssigem Material, wie Schleiden und Schwann, die Begründer der Zellenlehre und auch Virchow noch im Jahre 1847 annahmen, bildet, ebenso wie aus der Eizelle alle Zellen des späteren fertigen Organismus durch Teilung hervorgehen. Schon R. Remak hatte vorher (1852) die letztere Anschauung ausgesprochen und sie auch auf die pathologischen Neubildungen ausgedehnt. Virchow stellte dann (1855) den berühmt gewordenen Satz auf: Omnis cellula e cellula, analog dem von Harvey (1619) der Annahme einer Urzeugung von Organismen aus leblosen Substanzen entgegengestellten Satz: omne vivum ex ovo. Aber nicht nur die lebenden Wesen und die lebenden Zellen gehen aus schon vorhandenen Organisationen und Zellen hervor; auch die pathologische Neubildung ist nur eine Umbildung der normalen lebenden Gebilde. Damit war die Schranke zwischen den normalen und krankhaften Vorgängen gefallen, und die letzteren

mit Sicherheit nur als durch abnorme Bedingungen modifizierte normale Vorgänge erkannt.

Daraus ergab sich auch die Lösung der viel diskutierten Frage nach dem Sitz der krankhaften Lebensäusserungen; er ist nicht im Blute im Sinne der Humoralpathologie und nicht in den Nerven im Sinne der Neuropathologen, auch nicht in den Organen überhaupt, sondern in deren letzten Formelementen, den Zellen. Darnach ist die Krankheit nicht ein fremdartiges, in den Organismus eingedrungenes Wesen oder ein selbständiges Ding für sich mit ganz besonderen Eigenschaften, sondern nur die Äusserung des Lebens der normalen Zellen unter veränderten Bedingungen.

Nachdem früher durch Schwann die Zelle als Einheit des normalen Lebens gefunden worden war, ist sie es durch Virchows Bemühungen auch für die Krankheit geworden. Er hatte damit die Grundlage für die Cellularpathologie gewonnen, nach welcher der Beginn der Erkrankung ein lokaler ist und das normale Leben der Zellen durch aktive oder passive Eingriffe gestört wird. Um solche Veränderungen zu erleiden, müssen nach ihm die Zellen gereizt werden und reizbar sein; so kam er zur Aufstellung der Begriffe der Reizung und der Reizbarkeit aller lebendigen Zellen, nachdem schon früher Albrecht v. Haller die Irritabilität für die Muskeln und Glisson und John Brown für alles Lebendige aufgestellt hatten. Aus seinen Beobachtungen hierüber, besonders über die parenchymatöse Entzündung, entstand die reifste Frucht seiner Arbeit und seine grösste Tat: die Cellular-Pathologie.

Im Jahre 1856 erhielt Virchow, nachdem er in Würzburg 7 Jahre so segensreich gewirkt und sich zum ersten pathologischen Anatomen aufgeschwungen hatte, einen Ruf nach Berlin nach dem Tode von Heinrich v. Meckel, auf einstimmigen Vorschlag der Fakultät unter tätiger Mitwirkung von Johannes Müller, der ihm einen wichtigen Teil seines alten Gebietes freiwillig überliess. Es sollte dorten endlich ein Ordinariat für pathologische Anatomie errichtet und ihm ein eigenes Institut erbaut werden, das erste seiner Art mit Räumen

für experimentelle und chemische Arbeiten; es wurde eine Pflanzstätte für die Forschung und ein Vorbild für den Unterricht in der Pathologie; in der chemischen Abteilung waren Männer, wie Kühne, Liebreich und Salkowski tätig. Als die Räume, namentlich für die Sammlung zu klein wurden, baute man ein neues Haus, dessen Einweihung im Jahre 1899 er noch erlebte, in dem seine mit Kenntnis und Eifer zusammengebrachte pathologisch-anatomische Sammlung, wohl die geordnetste der Welt und ein wahres Archiv für wissenschaftliche Zwecke, untergebracht ist.

In Berlin hielt er (1858) im pathologischen Institut für Ärzte zwanzig Vorträge über die Cellular-Pathologie in ihrer Begründung auf physiologische und pathologische Gewebelehre, in denen er die in Würzburg gemachten Erfahrungen darlegte. Das Werk machte das grösste Aufsehen; man kann wohl sagen, dass es wie kaum eines erhellend für das Verständnis der pathologischen Vorgänge gewirkt und neue Arbeiten angeregt hat. Es erhielt alsbald begeisterte Zustimmung, besonders von der jüngeren, zum guten Teil aus Virchows Schule aufgewachsenen Generation, jedoch erweckte es auch manchen Widerspruch, z. B. von Griesinger und Wunderlich, den Herausgebern des Archivs für physiologische Heilkunde, welche zwar scharf, aber sachlich ihre Bedenken, insbesondere gegen die neue Lehre von der Entzündung, darlegten.

Es ist wohl selbstverständlich, dass nicht Alles von seinen Lehren über die Erkrankung der Zelle so geblieben ist, wie es hingestellt wurde; wo gäbe es eine Wissenschaft und namentlich auf einem so schwierigen Gebiete, die sich nicht weiter entwickelte und in den früheren Anschauungen sich als unrichtig erweisen liesse; und Virchow selbst, der genaue Kenner der Geschichte der Medizin, war nicht der Meinung, dass seine aus der mikroskopischen Beobachtung versuchten Erklärungen der Erscheinungen unverbesserlich seien. Durch fortgesetzte Beobachtungen ergaben sich zum Teil andere Auffassungen der Dinge; insbesondere waren es die so ungemein verfeinerten Methoden der mikroskopischen Untersuchung, durch die man

die Struktur der Zellen besser kennen lernte; man fand ferner die ungeahnte enorme Verbreitung der Nervenfasern in den Organen bis zu den Zellen, wodurch die funktionelle Selbständigkeit der Zellen erschüttert wurde und nervöse Einwirkungen von bestimmendem Einfluss auf die stofflichen Vorgänge in den Organen sich erwiesen, ebenso wie auf die Muskeln so auch auf die Drüsensekretion, die Weite der Blutgefässe und die Menge des den Organen zugeführten Blutes. Durch die Entdeckung von Julius Cohnheim, des talentvollsten Schülers von Virchow, von der Auswanderung der farblosen Blutkörperchen aus den Gefässen bei der Entzündung wurde die ausschliessliche Bedeutung der Gewebszellen für diesen Vorgang zweifelhaft, und die vasculäre Entzündungslehre mit der Exsudatbildung kam wieder zur Anerkennung; aber es blieb doch dabei, dass die Zellen bei dem Entzündungsvorgang einen massgebenden Einfluss haben. Die Zelle ist und bleibt trotz allen neueren Erkenntnissen die Trägerin des Lebens im gesunden und kranken Zustande, namentlich durch ihre Reizbarkeit d. i. durch die Fähigkeit auf Veränderungen in ihrer Umgebung mit Veränderung ihres stofflichen und dynamischen Gleichgewichts zu reagieren. Durch die Aufstellung der Lehre von der Cellular-Pathologie hat Virchow die Anschauungen über die Veränderungen bei der Erkrankung und über ihr Wesen mehr wie irgend ein Anderer gefördert und die weiteren Fortschritte ermöglichet. Die ganze heutige Medizin steht auf der cellular-pathologischen Basis, die ihr Virchow gegeben hat.

In Berlin setzte Virchow seine wissenschaftliche Tätigkeit in gesteigertem Masse und in weiterem Umfange fort.

Aus dem Gebiete der pathologischen Anatomie ist vor allem das grosse Werk über die krankhaften Geschwülste zu nennen, in dem er das fast unübersehbare Material durch neue Beobachtungen und kritische Beleuchtung sichtete; das Werk war aus 30 Vorlesungen hervorgegangen, welche er im Winter 1862/63 gehalten, dessen letzter Band leider nicht erschienen ist. Er tat darin dar, dass es keine besondere, vom allgemeinen Typus abweichende Geschwulstzellen gibt, und beschrieb

für viele Gewebe neben der Neubildung durch Zellenteilung die merkwürdige Umwandlungsfähigkeit, die Veränderung des Gewebscharakters bei Persistenz der Zellen oder die metaplastische Substitution. Auch hierin hat sich ja manches geändert wie z. B. die Deutung der tuberkulösen und syphilitischen Neubildungen, dann die Auffassung der krebsigen Geschwülste durch die Untersuchungen von Thiersch und Waldeyer, welche die Krebszellen von veränderten Epithelzellen ableiteten, während Virchow sie aus den Bindegewebszellen entstehen liess.

Die beiden Werke, die Cellularpathologie und deren Anwendung auf die Geschwülste, bilden seinen Höhepunkt in der pathologischen Anatomie.

Besonderes Interesse zeigte er für die pflanzlichen und tierischen Parasiten im Leibe des Menschen, die so schlimme Krankheitserscheinungen hervorrufen und zu deren Erkennung er durch seine Untersuchungen vielfach die Bahn brach. Er entdeckte den pflanzlichen Parasiten, der die Aspergillus-Mykose der Lungen bedingt, dann den Blasenwurm in der Leber, den Echinococcus multilocularis, welchen kurz vorher Buhl als Alveolarkolloid beschrieben hatte. Nachdem Leuckart, Bischoff und Zenker die Trichinen in den Muskeln gefunden und besonders letzterer dieselben als Ursache einer tödtlichen Erkrankung erkannt hatte, prüfte Virchow näher das Herkommen dieser Parasiten, wobei er die Entwicklung der geschlechtsreifen Tiere im Darm und die Einwanderung der Embryonen in die Sarkolemmaschläuche der Muskelfasern nachwies. Sein Assistent Otto Obermeier entdeckte (1871) im Blute von Rekurrens-Kranken die Spirillumfäden, denen bekanntlich noch weitere Blutparasiten gefolgt sind, insbesondere in der letzten Zeit die so höchst merkwürdigen der Stechmücken bei der Malaria.

Immer mehr gelangte die Annahme von kleinsten lebenden Wesen als Ursache der sogenannten Infektions-Krankheiten, ein von Virchow herrührender Name, zur Geltung. Der Anatom Jacob Henle hatte (1840) in seinen „pathologischen Untersuchungen" diese Vorstellung zuerst bestimmt ausgesprochen; Liebig sprach sich dagegen, ebenso wie gegen die Bedeutung

der Hefezellen für die alkoholische Gährung, auf das Heftigste aus. Aber die Auffindung solcher Organismen bei jenen Erkrankungen, wie die der Stäbchen beim Milzbrand und die der Tuberkelbazillen durch Robert Koch haben jeden Zweifel beseitiget und die denkwürdigen Experimente von L. Pasteur haben die Bedeutung und die Notwendigkeit der Mikroorganismen bei der Gährung und Fäulnis und den Infektionskrankheiten sicher gestellt. Hierin erhielt Liebig Unrecht; aber mit dem Nachweis der niederen Organismen ist noch keine Erklärung ihrer Wirkung gegeben; denn es frägt sich doch, durch welche Ursache von den niederen Organismen die Gährung und die Fäulnis eingeleitet werden; und hierin behielt der Chemiker Liebig, namentlich nach der Isolierung der Hefe-Zymase durch Eduard Buchner, Recht, dass es die in den Zellen produzierten Fermente sind, welche die Stoffzersetzungen hervorrufen.

Virchow war kein Gegner der neuen Erfahrungen von den organisierten Infektions-Erregern; aber er mahnte zur Vorsicht und warnte vor Überstürzung, besonders warnte er davor, die belebte Ursache der Infektionskrankheit mit dem Krankheitswesen zu verwechseln. Seine Vorsicht hat bei dem Tuberkulin Kochs sich als richtig erwiesen. In einer im Jahre 1874 über Kriegsheilkunde gehaltenen Rede sprach er aus, dass von den Bakterien möglicher Weise schädliche Gifte ausgeschieden werden. Auch hatte er anfangs Bedenken gegen die Serumtherapie Behrings, und zwar gegen die humorale, mit der Cellular-Pathologie nicht im Einklang zu bringende Auffassung der dabei im Körper vor sich gehenden Prozesse, bis es gelang, die letzteren auch auf veränderte Zelltätigkeit zurückzuführen.

Schon in früheren Würzburger Untersuchungen beschäftigte sich Virchow mit der so wichtigen Frage der Tuberkulose, später vorzüglich in seinem Geschwulstwerke. In dem letzteren hat er manche Erkrankungen, die man bis dahin zu den tuberkulösen rechnete, wegen der anatomisch-histiologischen Verschiedenheit von der Tuberkulose abgetrennt; die akute Miliartuberkulose sah er als die eigentliche Tuberkulose an und

schied darnach davon die Prozesse der käsigen Entzündung wie z. B. die Skrophulose. Aber trotz der histiologisch so verschiedenen Dinge ergab sich die ätiologische Identität, zunächst durch Villemains Fütterungsversuche am Tier, dann durch die pathologisch-anatomischen Beobachtungen unseres verdienten verstorbenen Mitgliedes Ludwig Buhl, der bei akuter Miliartuberkulose in anderen Organen käsige Herde von eingedrungenen Massen, also eine spezifische Resorptionstuberkulose nachwies, vor Allem aber durch die Entdeckung der gleichen infektiösen Ursache aller dieser Erkrankungen, des Tuberkelbazillus durch Robert Koch. Neuerdings ist wiederum die Frage nach der ätiologischen Identität der Tuberkulose und der Perlsucht des Rindes erörtert worden, nachdem es Koch nicht gelungen war durch Fütterung von Rindern mit menschlichem tuberkulösem Material die Tiere tuberkulös zu machen, woraus er schloss, dass das Fleisch und die Milch perlsüchtiger Rinder beim Menschen keine Ansteckung an Tuberkulose hervorbringe, also die beiden Prozesse verschieden seien. Aber neuere Versuche, besonders die von Behring, zeigten die Identität derselben, wenn auch die Ansteckungsfähigkeit eine ungleiche ist.

Wir verdanken Virchow auch umfassende geschichtliche Studien über Epidemiologie und über ansteckende Krankheiten wie Syphilis und Aussatz.

Von grossem Interesse ist es, die allgemeinen Anschauungen eines so unterrichteten und tief denkenden Mannes wie Virchow über das Leben kennen zu lernen. Als er in die Wissenschaft eintrat, war eben die Naturphilosophie überwunden, ein frischer Hauch ging durch die Naturwissenschaft in Deutschland und wie von einem Alp befreit atmete man auf. Man kehrte zur mühsamen Beobachtung und zum Experiment zurück. Die Lehren der sich mächtig entwickelnden Physik und organischen Chemie wurde zur Erklärung der Lebenserscheinungen alsbald in Anwendung gebracht und man glaubte in dem ersten Ansturm dadurch viele dieser Erscheinungen auf ihre Ursachen zurückgeführt und schon völlig erkannt zu haben, auf sogenannte mechanistische Weise. So meinte man die Aufnahme

der gelösten Stoffe in die Säfte aus den bekannten Vorgängen der Osmose ableiten zu können; oder man hielt die Stoffzersetzungen im Tierkörper einfach durch die Wirkung des Sauerstoffs veranlasst. Nur Wenige erkannten alsbald, dass die Vorgänge im lebenden Organismus viel kompliziertere sind und durch die Eigentümlichkeiten der Organisation die Bedingungen für das Geschehen andere sind als bei einem einfachen physikalischen oder chemischen Vorgang; so hat Johannes Müller nie die Osmose als treibende Ursache bei der Resorption aus dem Darm anerkannt und so manche Jüngere mögen ihn darob als veraltet angesehen haben. Auch Virchow war ein zu genauer Kenner der Organisation, um sich damit zu befreunden, dass gewisse Lebensvorgänge schon völlig aus den Gesetzen der Physik und Chemie erklärt seien; er war der Ansicht, dass die Organisation besondere Verhältnisse stelle, wie sie in der unbelebten Natur gewöhnlich nicht gegeben sind. Er nannte sich darum einen Vitalisten, so dass die Neovitalisten ihn als einen der Ihrigen betrachteten; er setzte sich aber Missverständnissen aus, als er zum Zustandekommen der Vorgänge an den lebenden Gebilden eine „Lebenskraft" annahm, mit welchem Worte man früher einen ganz anderen Sinn verband. Er konnte unmöglich darunter die frühere Lebenskraft im naturphilosophischen Sinne verstehen, als etwas was über der Materie und ihren Eigenschaften steht und mit ihr tut, was sie will, auch gegen die Gesetze der Physik und Chemie. Aber es ist schwierig, seine Ansicht klar zu erfassen. Wenn er sagt, man müsse es aufgeben, in den Lebensvorgängen nur ein mechanisches Resultat der den konstituierenden Körperteilen inhärierenden Molekularkräfte zu sehen, so kommt er doch recht bedenklich nahe der Annahme einer ganz besonderen Kraft für die Lebenserscheinungen, die sich sonst nirgends findet. Ebenso wenn er meint: „aber trotzdem können wir nicht erkennen, dass die Erscheinungen des Lebens sich einfach als eine Manifestation der den Stoffen inhärierenden Naturkräfte begreifen lassen; vielmehr glaube ich immer noch als den wesentlichen Grund des Lebens eine mitgeteilte abgeleitete Kraft neben den Molekularkräften

unterscheiden zu müssen; diese Kraft mit dem alten Namen der Lebenskraft zu belegen, finde ich keinen Anstand." Andererseits erkennt man aus anderen Stellen, die scheinbar in Widerspruch mit den obigen stehen, doch, dass er einen mechanischen Ursprung des Lebens zulässt; z. B. in dem Satze: „auch von der Lebenskraft in dem mechanischen Sinne, in dem ich sie auffasse, bezweifle ich nicht, dass sie schliesslich als der Ausdruck einer bestimmten Zusammenwirkung physikalischer und chemischer Kräfte gedacht werden muss." Ebenso in dem Ausspruche: „das Leben wird immer etwas Besonderes bleiben, wenn man auch bis ins kleinste Detail erkannt haben sollte, dass es mechanisch erregt und mechanisch fortgeführt worden sei." Ja, das Leben ist etwas Besonderes, verschieden von den Vorgängen der übrigen Welt, weil die Bedingungen für den Ablauf der Vorgänge in der lebenden Organisation besondere sind und darum die Erscheinungen besonders ausfallen; aber es wirken dabei nur die gewöhnlichen und bekannten Kräfte der Materie und es ist keine besondere Kraft dazu nötig und es lässt sich eine solche nicht auffinden. Die „Lebenskraft" ist keine besondere wirkende Kraft neben den bekannten physikalischen und chemischen Kräften, keine Grundeigenschaft der Materie wie die Gravitationskraft und noch weniger eine von der Materie trennbare Kraft, sondern nur das Resultat der Wirkungen der Stoffe des Organismus auf einander. Als man die ersten Durchrechnungen der Lichtstrahlen durch die brechenden Medien des Auges machte, nahm man, da in der Krystalllinse des Auges der Brechungsindex von Aussen nach Innen allmählich zunimmt, einen mittleren Index zwischen den äusseren und inneren Schichten an; aber siehe da, die Vereinigung der Lichtstrahlen fiel bei dieser Annahme hinter die Netzhaut, ja sie fiel sogar hinter die Netzhaut, wenn man mit dem Index des Kerns der Linse rechnet. Da kam man auch auf eine Lebenskraft im Auge, welche die physikalischen Brechungsgesetze ändert; aber es klärte sich die Sache dadurch vollständig auf, dass durch die eigentümliche, geschichtete Organisation der Linse an den konvexen Flächen immer eine erneute

Brechung eintritt, so dass die Vereinigung der Strahlen genau auf der Netzhaut stattfindet.

Das Bewusstsein betrachtete Virchow wie Du Bois-Reymond als der Naturforschung nicht zugänglich, wenigstens nicht bei unserem jetzigen Wissen; wir haben in der Tat jetzt nicht die mindeste Aussicht, das Bewusstsein aus den Eigenschaften der Materie zu erklären.

Vielfach hat sich Virchow über das Problem der Vererbung und über die Kontinuität des Lebens als wichtigstes Prinzip der Pathologie ausgesprochen. Er erkannte bis zu einem gewissen Grade die Vererbbarkeit erworbener Eigenschaften an, indem er das Auftreten der erblichen Variation auf äussere Einwirkungen zurückführte, ja selbst Rassenbildung auf Grund pathologischer Störungen zuliess.

Es ist von Bedeutung zu sehen, wie er sich zu dem unsere Zeit und die Naturforschung so sehr bewegenden Darwinismus stellte. Man hat ihn vielfach für einen Gegner der Darwinschen Selektionslehre, ja selbst der Descendenztheorie gehalten. Auch hier tritt wie bei dem Vitalismus seine Anschauung nicht ganz klar hervor; man muss scharf unterscheiden zwischen Selektion, Transformismus und Descendenz und man kann die Darwin'sche Lehre von der Selektion durch Zuchtwahl für nicht richtig halten, aber doch ein Anhänger der Descendenztheorie sein; es gibt wohl keinen Naturforscher, der die allmähliche Entwicklung der Lebewesen auf der Erde verwirft, wenn sie auch noch nicht bewiesen ist. Virchow leugnete, dass paläontologische Übergangsformen zwischen dem heutigen Menschen und niedereren Tieren sicher gefunden seien, trotz dem Neandertalschädel, dem Pithekantropos und anderen Funden. Er hielt eben die jetzt vorliegenden Funde noch nicht für beweisend; er hat gewiss Recht gehabt in Fragen von so prinzipieller Bedeutung vorsichtig zu sein. Wenn man sagt, Virchow habe sich durch seine Neigung zu allzu skeptischer Beurteilung gerade der anthropologischen Funde in der letzten Zeit in scharfen Gegensatz zu der jüngeren anthropologischen Richtung gesetzt, so muss man bedenken, dass er dies gewiss nicht

aus Rechthaberei tat, sondern aus Liebe zur Wahrheit. Er hielt stets fest an dem, was er als richtig erkannt zu haben glaubte und verteidigte seine Anschauungen mit aller Kraft und unerbittlicher, manchmal vielleicht allzuscharfer Kritik, bis sie sich als unhaltbar erwiesen; es war dies sicherlich gut, denn nur zu rasch nimmt man in unserer Zeit eine neue Lehre an, die man ebenso bald wieder verlassen muss.

In seinen späteren Jahren trat in seiner wissenschaftlichen Arbeit die Anthropologie und Völkerkunde und die vorgeschichtliche Altertumswissenschaft immer mehr in den Vordergrund. Die Anfänge dazu fanden sich schon in Würzburg mit den Studien über den Kretinismus in Unterfranken; er war dazu durch seine ausgebreiteten Kenntnisse mehr als irgend ein Anderer befähiget. Er entwickelte auch hierin eine ausserordentliche und vielseitige Tätigkeit; wenn die Ergebnisse hier auch nicht dem gewaltigen Kraftaufwand entsprechen, den er daran gewendet, wenn insbesondere die Kraniologie sich nicht als der sichere Führer erwiesen hat, den er mit Retzius und Baer darin suchte, so verdankt die Anatomie des Menschen seinen osteologischen Arbeiten doch sehr wichtige Bereicherungen, vor Allem durch seine Arbeiten zur vergleichenden Osteologie der Menschenrassen. Durch genaue Prüfung der Objekte, z. B. der lebenden menschlichen Missbildungen, sammelte und sichtete er das Material und führte die methodische naturwissenschaftliche Untersuchung auf diesem ungeheuern Gebiete ein, regte zu grossen Erhebungen, wie zu der über die Farbe der Haare und der Haut bei den Schulkindern an, und erweiterte auf seinen durch ganz Europa und für seine Studien wichtigen Teile von Asien und Afrika ausgeführten Reisen die Kenntnis vom Menschen. Er gründete die grosse angesehene deutsche anthropologische Gesellscschaft, die für die anthropologische Forschung in Deutschland eine so massgebende Bedeutung gewann, und war viele Jahre hindurch deren sicherer Führer; es ist sein Verdienst, die Tätigkeit der Mitarbeiter in Bahnen gehalten zu haben, die dem drohenden Dilettantismus vorbeugte und der wissenschaftlichen Kritik ihr Recht wahrten.

Eine höchst segensreiche Tätigkeit entfaltete er endlich als Hygieniker in der Sorge für die Erhaltung der Gesundheit der Menschen und um das Wohl des Volkes. Er war durchdrungen davon, dass der Kenntnisreiche Anwendung von seinem Schatze an Wissen für das Wohl der Mitmenschen machen solle. In diesem Bestreben suchte er seine wissenschaftlichen Erfahrungen in der Medizin nutzbar zu machen für die öffentliche Gesundheitspflege und die Wohlfahrt im Staate und vor Allem in der so rasch wachsenden Grossstadt Berlin. Das was unser unvergessliches Mitglied Pettenkofer für die Gesundheit der Stadt München getan hat, das suchte Virchow für Berlin einzuführen: er veranlasste die Messungen des Grundwasserstandes, wobei der gleiche Zusammenhang zwischen diesem und der Häufigkeit des Typhus wie in München sich ergab, was allerdings heutzutage Viele voreilig für einen glücklich überwundenen Standpunkt halten; es wurde auf sein Betreiben die Kanalisation und die Abfuhr des Unrats in Berlin durchgeführt, die ausgedehnten Rieselfelder errichtet, für die Zufuhr reinen Wassers gesorgt, Massregeln für die Reinhaltung der Strassen und Wohnungen getroffen, weitere sanitäre Verbesserungen in den letzteren angeordnet, die Lebensmittelpolizei organisiert, das Krankenhauswesen und die Schuleinrichtungen verbessert und wichtige medizinal-statistische Erhebungen angeordnet. Sein erspriesslicher Einfluss in dieser Richtung ist ersichtlich aus den zwei Bänden der gesammelten Abhandlungen aus dem Gebiete der öffentlichen Medizin und der Seuchenlehre.

Durch seine Erfahrungen über die erschrecklichen Verhältnisse des oberschlesischen Hungertyphus wurde es ihm klar, dass die praktische Medizin in unmittelbarer Beziehung mit der politischen Gesetzgebung steht und dass nur durch durchgreifende weise soziale Massregeln auf demokratischer Grundlage das Übel bekämpft werden könne. Dadurch ist er, wie vorher schon erwähnt, zu seiner politischen Gesinnung und zu seiner politischen Tätigkeit gekommen, welche er als Stadtverordneter für Berlin, wo er viele Jahre hindurch der Berater der städtischen Verwaltung in der Hygiene war, sowie

im preussischen Abgeordnetenhause und im deutschen Reichstage entfaltete. Es haben ihn dabei stets die reinsten Motive geleitet, wenn auch in der Politik seine Anschauungen durch den unaufhaltsamen Gang der Ereignisse sich nicht selten als fehlerhaft erwiesen.

Er hatte ein tiefes Mitgefühl für die Armen und Elenden und er war überzeugt, dass dem Volke, das er liebte, nur geholfen werden könne durch Verbreitung nützlicher Kenntnisse, durch Hebung der Bildung und durch Freiheit der Gedanken; darum fühlte er sich verpflichtet auch seinerseits nach Kräften für das Wohl des Volkes beizutragen: er gab populäre Schriften über gemeinnützige Fragen heraus und hielt Vorträge in Handwerker- und Fortbildungs-Vereinen.

Er war ein glänzender und gefeierter Redner bei den Naturforscher-Versammlungen und anderen derartigen Gelegenheiten. Er sprach fliessend, ganz frei und öfter ohne besondere Vorbereitung; sofort wusste er in unmittelbarer Produktion den richtigen Ausdruck zu finden und eine Fülle von Gedanken zu entwickeln.

An der grossartigen Feier seines 80. Geburtstages, am 18. Oktober 1901, beteiligten sich die medizinischen Forscher und ausübenden Ärzte aller Länder, um den grossen Gelehrten zu ehren und ihm für sein Lebenswerk zu danken. Noch völlig rüstig beging er den Tag, an dem ihm Ehrenbezeugungen von allen Seiten zu Teil wurden. Man war sich bewusst, dass der Gefeierte am meisten dazu beigetragen hat, die Pathologie des 19. Jahrhunderts zu einer Naturwissenschaft zu erheben und ihr eine sichere Grundlage zu geben, auf welcher die Nachkommen weiter bauen können.

Augustin Alexis Damour.

Am 22. September 1902 ist das an Jahren älteste korrespondierende Mitglied unserer Klasse, der verdiente französische Mineraloge Augustin Alexis Damour in Paris im Alter von 93 Jahren gestorben.

Damour kam am 19. Juli 1808 in Paris zur Welt. Er trat als junger Mann in das Ministerium der auswärtigen Angelegenheiten ein, worin er es bis zum Unterdirektor brachte; er nahm aber im Jahre 1854 seine Entlassung, um sich ganz mineralogischen Forschungen widmen zu können, für die er frühzeitig das lebhafteste Interesse hegte. Seine ersten Veröffentlichungen von Mineral-Analysen fielen schon in das Jahr 1837, die letzten in das Jahr 1893, so dass er volle 56 Jahre wissenschaftlich tätig war. Er lebte grösstenteils in Paris, machte jedoch auch wissenschaftliche Reisen nach Zentral-Amerika und die Antillen, über deren Ergebnisse er 1860 in einem grösseren Reisewerke berichtete. Im Jahre 1862 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Pariser Akademie gewählt und 1878 zum Mitglied des Instituts von Frankreich; seit dem Jahre 1881 gehörte er, auf den Vorschlag v. Kobells, unserer Akademie an.

Damour hat sich vorzüglich durch die Untersuchung der chemischen Zusammensetzung der Mineralien einen bedeutenden Namen gemacht; in dem Zeitraume von 56 Jahren analysierte er in unermüdlicher sorgfältigster Arbeit eine Unzahl von Mineralien, so dass er es zu einem der ersten Kenner der Bestandteile der Mineralien brachte; auch in dem Auffinden neuer Mineralien und neuer Fundorte war er gewandt, indem er neue Spezies an Orten auffand, an denen Mineralogen von Ruf achtlos vorübergegangen waren.

Aus der grossen Menge dieser Untersuchungen sollen nur die wichtigeren hervorgehoben werden.

Er entdeckte zunächst durch seine chemischen Analysen eine Anzahl neuer Mineral-Spezies. Dahin gehört: der aus antimonichtsaurem Kalk bestehende Roméin von St. Marcel in

Piemont; das Thonerde, Kalk und Natron enthaltende Silikat Faujasit; das Mangansilikat Marcelin von St. Marcel in Piemont; der Hydro-Apatit aus Calciumphosphat; das Thonerdephosphat Kalaït; das Aluminat mit Eisen- und Manganoxyd Jacobsit aus einer schwedischen Manganerzlagerstätte; der Dumortierit, ein Silikat von Thonerde-Eisenoxydul; das neue Mineral Zinkaluminit; ein neues Eisenphosphat; der Brogniartin aus den Sulphaten des Kalks und Natrons; ein Hydrosilikat des Zirkons; der Descloizit aus vanadinsaurem Blei und Zink; und das neue Nickelmineral Garnierit, ein Silikat in dem das Magnesium zum Teil durch Nickel ersetzt ist.

Damour hat ferner die Mischungen einander ähnlicher Arten richtig gestellt und bei mehreren die früher unbekannte Übereinstimmung nachgewiesen. So z. B. durch die Analyse des Menilit als eines bräunlichgrauen Opals in den Pariser Tertiärschichten; des Humboldtilit als eines aus kieselsaurer Thonerde, Eisenoxyd, Kalk- und Magnesiaerde bestehenden Mililiths; des Eudialyt, ein Natron-Silikat, in dem ein Teil der Kieselsäure durch Zirkonerde vertreten ist; des mit dem Eudialyt nahe verwandten Eukalit; der Titansäure haltigen Mineralien Anatas und Rutil.

Weiterhin wiederholte er eine grosse Reihe von Analysen von Mineralien und stellte die nähere Zusammensetzung derselben fest. In dem sogenannten Bleigummi von Helgoët in Frankreich fand er die beträchtliche Quantität von 8% Phosphorsäure, in welchem Mineral dieselbe von Berzelius, der es zuerst analysierte, übersehen worden war. Es wurden von ihm untersucht: das arseniksaure Eisen Scorodit; Kupfersilikate von verschiedenen Fundorten; vier Spezies von Kupferarseniaten; das Beryllaluminat Chrysoberyll; das Tellurwismuth von Brasilien; das Beryllium-Aluminium-Silikat Euklas; der Adamin aus arsensaurem Zink; der Kalkchromgranat Uwarowit vom Pic Poset; der Harmotom von Irland, das Hydrat eines Feldspathes mit Baryum; das wasserhaltige Aluminium-Calcium-Silikat Heulandit; das Kalk-Thonerde-Silikat Gehlenit von Fassa; der Dioptas, ein kieselsaures Salz mit Kupfer; ein zink-

haltiger Spinell, das Aluminat des Magnesium; das sulfoarsensaure Blei vom Gotthard; das Thonerde-Hydrat Diaspor aus Sibirien; der Freyalith und Orangit aus kieselsaurem Thorium; ein titanhaltiger Peridot aus kieselsaurer Magnesia; das Thonerde-Natron-Silikat Jadeit; der von unserem verstorbenen Mitgliede Schafhäutl entdeckte grüne Chromglimmer; das Thonerde-Silikat Epidot mit Magnesium; ein Beryll von Madagaskar; der Cronstedtit, ein Thonerde-Silikat mit Eisenoxydul und Eisenoxyd; das basische Silikat Idokras von Arendal; ein Granat von Mexiko; das basische Aluminium-Silikat Andalusit; das natürliche Zink-Arseniat vom Kap Garonne; das krystallisierte Aluminium-Borat aus Sibirien; der Predazit, das Hydroxyd des Magnesium; der titanhaltige Wolfram aus dem Departement Haute Vienne; der Periklas aus Magnesiumoxyd; das unter den basischen Silikaten an Kieselsäure ärmste Sapphirin; der Gmelinit, ein Hydrat der Feldspäthe, von der Insel Cypern, und die Cer- und Lanthanverbindung Tscheffkinit von der Küste von Coromandel.

Damour führte auch noch mit einigen seiner Kollegen wertvolle Untersuchungen aus. Mit dem berühmten Mineralogen Des Cloizeaux über den Calabrerit von Laurium in Griechenland; über eine Prüfung Gold und Platin führender Sande; über die optischen und pyrogenetischen Eigenschaften des Beryllium-Yttrium-Eisensilikats Gadolinit; über das Selenkupfer Chalcomenit; und den Arkansit. Mit dem Chemiker und Landwirt Boussingault über das vulkanische Glas Obsidian bei hoher Temperatur. Mit dem Chemiker Saint Claire-Deville über die Natur der Columbite oder Niobite aus niobsaurem Eisenoxydul und des Dianium.

Ausser diesen Studien über die chemische Zusammensetzung der Mineralien rühren von Damour noch mancherlei Angaben über die Standorte von Mineralien her. Er hat z. B. das Vorkommen des Niobits (aus niobsaurem Eisenoxydul) und des Tantalits (aus tantalsaurem Eisenoxydul) in Limoges entdeckt, und den Perowskit (aus titansaurem Kalk) in Zermatt.

Dann hat er wichtige Abhandlungen über physikalische

Eigenschaften der Mineralien geschrieben. Unter anderen über die krystallinischen, optischen und chemischen Eigenschaften des eisenreichen Silikates Homilit; über die Krystallisation des Brogniadit, eines Calcium- und Natrium-Sulfates; über die Dichtigkeit des Zirkons, über die hygroskopischen Eigenschaften der wasserhaltigen Silikate (Zeolithe).

Ferner rühren von ihm her Arbeiten über die Verwendung der Jodalkalien bei der Analyse einiger Mineralien; über die Darstellung mehrerer Amalgame; und über die Zusammensetzung der Meteorsteine von Montrejeau und von Chassigny. Auch hat er die merkwürdigen kieselsäurehaltigen Quellen von Island, sowie die kieseligen Inkrustationen der Geyser analysiert. Lebhaftes Interesse zeigte er für prähistorische Gegenstände: er untersuchte eine aus Kupfer, Silber und Gold bestehende, von den alten Völkern Südamerikas hergestellte Legierung und prüfte die Züsammensetzung der Steinbeile in den keltischen Monumenten; sein Werk über die Steinwerkzeuge bei den Kelten und bei wilden Volksstämmen ist in weiteren Kreisen bekannt geworden.

Damour hat in dieser Weise sein langes Leben wohl angewendet und sich in der Wissenschaft einen höchst geachteten Namen erworben.

Johannes Wislicenus.

Am 5. Dezember 1902 starb das korrespondierende Mitglied unserer Akademie Johannes Wislicenus, Professor der Chemie an der Universität Leipzig. Er war einer der geistreichsten und hervorragendsten Forscher in der Chemie, die vorzüglich ihm die Begründung der so fruchtbar gewordenen Theorie der Stereochemie und die Idee der räumlichen Isomerie verdankt.

Er wurde am 24. Juni 1835 als Sohn des Pfarrers Gustav Adolf Wislicenus zu Kleineichstädt bei Querfurt geboren. Nach der Berufung des Vaters an die Neumarktskirche in Halle a. S. (1841) erhielt der Sohn daselbst auf der Realschule der Francke-

schen Stiftungen den ersten Schulunterricht. Die zahlreiche Familie musste mannigfache Entbehrungen erleiden, als ihr Haupt wegen seiner freiheitlichen Gesinnungen und seines Anschlusses an die Lichtfreunde (1846) seines Amtes entsetzt wurde und als Pfarrer der freien Gemeinde zu Halle eintrat. Aber als bei der Verfolgung der freien Gemeinden dem Vater die Gefängnishaft drohte, entschloss er sich nach Nordamerika zu fliehen (1853), wohin ihm der Sohn mit der ganzen Familie nachfolgte. Der 18 jährige Johannes, der eben an die Universität Halle übergetreten war, wurde durch diese Geschicke und Sorgen früh für das Leben gestählt und charakterfest. Er begann in Boston Naturwissenschaften, insbesondere Chemie, zu studieren; in den Ferien machte er in den an der Ostküste Nordamerikas gelegenen, fast unbekannten Neuenglandstaaten anstrengende und kühne Wanderungen, wobei er seinen Körper kräftigte und seinen Sinn für die Natur und deren Beobachtung bildete.

Nachdem er mit seinem Vater 1856 wieder nach Europa zurückgekehrt war, studierte er in Zürich und dann in Halle, wo er Schüler und Assistent des vortrefflichen Chemikers W. Heintz wurde und 1858/59 seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten begann. Da ihm die Habilitation für Chemie aber nur gestattet wurde, wenn er sich jeder politischen Tätigkeit enthielte, so ging er nach Zürich, wo er sich 1860 als Privatdozent für Chemie an der Universität habilitierte. Bald stand er durch seine fruchtbare Tätigkeit als Forscher und Lehrer als einer der geachtetsten jüngeren Chemiker da, der eine bedeutende Zukunft verhiess: 1864 wurde er ausserordentlicher Professor, 1867 ordentlicher Professor an der Universität und 1870 zugleich Professor an dem Polytechnikum.

Als der berühmte Chemiker Strecker in Würzburg (1872) starb, rief man Wislicenus an die damals in hoher Blüte stehende Alma Julia, wo er höchst erfolgreich wirkte, bis er 1885 als Nachfolger seines grossen Gegners Kolbe an die Universität Leipzig kam. An den drei Universitäten förderte er, zum Teil mit seinen Schülern, durch wichtige Untersuchungen

die Chemie und erzielte auch als Lehrer und Leiter des chemischen Laboratoriums bedeutende Erfolge.

In Halle entstand mit seinem Lehrer Heintz eine Reihe kleinerer Untersuchungen über Aldehydammoniak, Aldehydsäure, über Bestandteile der Gänsegalle, dann auch einige theoretische Abhandlungen; in Zürich beschäftigte er sich anfangs mit der Analyse von Mineralien und Mineralwässern, warf sich aber bald auf das Studium der organischen Säuren der Fettreihe, welches er seitdem mit unermüdlichem Eifer und grossen Erfolgen kultiviert hat.

Zu der Zeit als Wislicenus in die Wissenschaft eintrat, suchte man emsig nach einer Klassifikation der unzähligen Kohlenstoffverbindungen; die herrschende Radikaltheorie hatte der Typentheorie von Gerhard und Laurent Platz gemacht, aber letztere vermochte bald auch nicht mehr allen den neuen Beobachtungen zu entsprechen. Da schrieb er 1859 seine Abhandlung: „Theorie der gemischten Typen", in der er die Lehren der Radikal- und Typentheorie zusammenfasste und ihre Schwächen darlegte; dadurch kam er zu der Lehre von den gemischten Typen, wodurch er einen wichtigen Schritt tat zu der Aufstellung der sogenannten Strukturformeln für chemische Verbindungen.

Hier setzte er mit seiner Arbeit in Zürich ein und bearbeitete während 11 Jahren zunächst unter den Stoffen von gemischtem Typus die Milchsäure. Ich verdanke die folgenden Angaben über die wichtigsten Arbeiten von Wislicenus der Güte unseres verehrten Kollegen W. Königs.

Die gewöhnliche oder Gährungsmilchsäure war, namentlich durch die Arbeiten von Wurtz und Kolbe, als zweiatomige einbasische Säure erkannt worden und ihrer Konstitution nach als α-Oxypropionsäure definiert worden. Wislicenus gelang es die Säure synthetisch aus Acetaldehyd, Blausäure und Salzsäure darzustellen; er brachte weitere Beweise für die alkoholische Natur des einen Hydroxyls in der Säure, untersuchte den von Perkin dargestellten Acetomilchsäureäther und die daraus entstehende Acetomilchsäure, sowie die von Strecker dargestellte

Benzoylmilchsäure. Bei diesen Untersuchungen erhielt Wislicenus aus der β-Jodpropionsäure eine von der Gährungsmilchsäure verschiedene isomere Säure, die er als Hydrakrylsäure bezeichnete. Wiederum verschieden von dieser Hydrakrylsäure sowohl wie von der Gährungsmilchsäure soll nach Wislicenus die Aethylenmilchsäure sein, welche letztere aber Erlenmeyer nicht erhalten konnte. Aus dem Fleischextrakt glaubte Wislicenus ausser der schon von Liebig in demselben entdeckten Fleisch- oder Paramilchsäure noch eine zweite isomere, in geringer Menge auftretende Säure gefunden zu haben, welche aber nach Erlenmeyer stickstoffhaltig sein soll.

Die Fleischmilchsäure wurde bekanntlich schon 1808 von Berzelius in dem Muskelfleisch entdeckt; Liebig machte (1847) auf die Verschiedenheit derselben von der Gährungsmilchsäure aufmerksam und Strecker zeigte (1858), dass sich die rechtsdrehende Fleischmilchsäure durch längeres Erhitzen auf 130 bis 140^0 in das Anhydrid der optisch inaktiven Gährungsmilchsäure und dann durch Wasser in die letztere selbst überführen lässt. Diese Angabe fand Wislicenus, der früher schon über Anhydride der gewöhnlichen Milchsäure gearbeitet hatte, bestätiget; er fand ferner, dass die Fleischmilchsäure genau so wie die Gährungsmilchsäure durch Erhitzen mit verdünnter Schwefelsäure im Einschmelzrohr bei 140—150^0 in Acetaldehyd und Ameisensäure zerfällt. Gährungs- und Fleischmilchsäure unterscheiden sich daher nach Wislicenus namentlich nur durch ihr Verhalten gegen das polarisierte Licht und dann noch durch geringe Differenzen in der Löslichkeit und dem Krystallwassergehalt einiger Salze. Er hält demnach die Gährungs- und Fleischmilchsäure (1871) für strukturidentisch und vermutet, ihre Verschiedenheit sei begründet in einer verschiedenen räumlichen Anordnung der Atome innerhalb des Moleküls; er fasst also ihre Isomerie als eine „geometrische“ auf.

Die Erklärung für diese sowie andere „abnorme“ Isomerien, welche nach der älteren Strukturtheorie nicht verständlich waren, brachte 1874 die geistvolle Hypothese von Le Bel und

van 't Hoff über das asymmetrische Kohlenstoffatom; van 't Hoff gibt ausdrücklich an, gerade die Feststellung dieses neuen Falles von „physikalischer Isomerie" zwischen Gährungs- und Fleischmilchsäure durch Wislicenus und dessen Postulat einer verschiedenen räumlichen Anordnung der Atome innerhalb des Moleküls habe ihn zum Nachdenken über letzteres Problem angeregt. Man begreift die Freude, mit welcher Wislicenus diese Hypothese begrüsste in dem Vorwort, welches er der deutschen Übersetzung von van 't Hoffs: „La chimie dans l'espace" durch seinen Schüler Hermann (1877) voranschickte. Bekanntlich erregte Wislicenus durch dieses Eintreten für van 't Hoffs Ideen den Zorn von Kolbe: „Wislicenus erklärt hiemit, dass er aus der Reihe der exakten Naturforscher ausgeschieden und in das Lager der Naturphilosophen ominösen Andenkens übergetreten ist, welche ein nur dünnes Medium noch von den Spiritisten trennt".

War die Hypothese von Le Bel und van 't Hoff über den Zusammenhang zwischen optischer Aktivität und dem Vorhandensein eines asymmetrischen Kohlenstoffatoms richtig, so musste die Aktivität mit der Asymmetrie verschwinden; Wislicenus veranlasste seinen Schüler Just (1883) zu einer experimentellen Prüfung dieser Frage. Durch Behandlung des aus dem aktiven Gährungsamylalkohol dargestellten aktiven Jodids mit Zink und Salzsäure erhielt dieser in der Tat das inaktive Isopentan, während bei Ersetzung des Jods durch die Aethyl- oder Amylgruppe, also bei Erhaltung der Asymmetrie des Kohlenstoffatoms, die resultierenden Produkte optische Aktivität zeigten. Die glänzendste Probe auf ihre Richtigkeit hat die Hypothese vom asymmetrischen Kohlestoffatom durch die grossen Arbeiten Emil Fischers über die Zuckerarten bestanden.

In Zürich beteiligte er sich an einer ungemein wichtigen Untersuchung seines Freundes Adolf Fick, des Physiologen. Derselbe ging von der Frage aus, ob das Eiweiss die alleinige Quelle der Muskelkraft im tierischen Organismus sei. Ich hatte vorher, entgegen der Lehre Liebigs, nach welcher durch die Arbeit die eiweisshaltige Muskelsubstanz zerstört werden

und dadurch die Kraft für erstere liefern soll, gefunden, dass bei starker Muskelarbeit im Körper nicht mehr Eiweiss zersetzt wird als bei möglichster Ruhe. Zur Lösung der obigen Frage bestiegen die Beiden nüchtern das Faulhorn (1865) und ermittelten aus der Stickstoffausscheidung im Harn das während der Besteigung des hohen Berges in Zerfall geratene Eiweiss; die Menge desselben war nun nach seiner Verbrennungswärme nicht hinreichend die kinetische Energie zu liefern, um das Gewicht des Körpers auf die Höhe des Berges zu erheben, so dass also die stickstoffreinen Stoffe sich bei der Arbeit beteiliget haben müssen.

Nun folgen die Untersuchungen von Wislicenus über die Synthesen der Acetessigester, welche aus seiner Würzburger Zeit stammen. Die Entdeckung des Acetessigesters, der wie kaum eine andere organische Verbindung zu zahllosen Synthesen gedient hat, verdanken wir Geuther sowie Frankland und Duppa; Wislicenus hat sich durch seine umfassenden Untersuchungen über Acetessigestersynthesen grosse Verdienste um die Aufklärung der hierbei verlaufenden verwickelten Reaktionen und die Ausbildung der Darstellungs- und Spaltungsmethoden erworben.

Indem Geuther auf Essigester Natrium einwirken liess, entdeckte er den Natracetessigester, aus dem er den Acetessigester und seine Homologen gewann. Unbekannt mit Geuthers Arbeiten hatten Frankland und Duppa ebenfalls die Einwirkung von Natrium auf Essigester studiert und dann im Anschluss an Franklands klassische Untersuchungen über die Einwirkung von Zink und Jodalkylen auf Oxalsäureester das energischer wirkende Natrium mit Essigäther zusammengebracht, wobei sie vier interessante Reaktionsprodukte abschieden.

Wislicenus arbeitete nun zunächst mit seinen Schülern, namentlich mit Conrad, die beste Darstellungsmethode für den Acetessigester aus. Bei den mannigfaltigen Umsetzungen mit Halogenalkylen oder anderen organischen Halogenverbindungen ging er stets von reinem Acetessigester oder von dessen Natriumverbindung aus. Er zeigte unter Anderem, dass der Acetessig-

ester nicht mehr als 1 Atom Natrium aufnehmen kann; dagegen vermag der Dimethylacetessigäther nicht mehr mit Natrium zu reagieren. Indem er nun vom Acetessigester ausging und schrittweise die reinen Mono- und Dialkyl-Acetessigester darstellte und ihre Spaltungen studierte, gelang ihm die Entwirrung der komplexen Reaktionen, welche sich bei den Frankland-Duppa'schen Synthesen abspielen.

Nachdem Wislicenus so die leichte und glatte Bildung des Natracetessigesters beim Vermischen von Acetessigester mit einer äquivalenten Menge Natriumäthylat nachgewiesen hatte, vereinfachten seine Schüler Conrad und Limpach die Darstellung organisch substituierter Acetessigester wesentlich durch ein besonderes Verfahren. Wislicenus verfolgte dann quantitativ die Bedingungen für die sogenannte Säure- und Ketonspaltung bei Alkylacetessigestern. Durch Reduktion des Acetessigesters mit Natriumamalgam und Wasser erhielt er die β-Oxybuttersäure und aus dieser durch trockene Destillation die feste (α-) Crotonsäure; sein Schüler Rügheimer stellte den Diacetbernsteinsäureester, sein Schüler Harrow die daraus entstehende Carbopyrotritarsäure und die Pyrotritarsäure dar.

Die Theorie der Entstehung des Natracetessigesters bedurfte aber immer noch weiterer aufklärender Versuche. Der Mechanismus dieser Reaktion ist erst später von Claisen in befriedigender Weise interpretiert worden. Wislicenus bevorzugte jedoch aus bestimmten Gründen die frühere Frankland'sche Formulierung; und in der Tat beobachtete auch der schon mehrfach genannte Schüler Conrad sowie Andere allerlei Reaktionen, welche für die Ansicht von Wislicenus sprechen.

In dritter Reihe sind die in Leipzig ausgeführten zahlreichen Arbeiten von Wislicenus über ungesättigte Verbindungen zu nennen.

In ihrer schon erwähnten Theorie vom asymmetrischen Kohlenstoffatom haben Le Bel und van 't Hoff auch die „abnormen" d. h. nach der älteren Strukturtheorie nicht zu verstehenden Isomerien einiger ungesättigter Verbindungen zu

erklären versucht wie z. B. der Fumar- oder Maleinsäure oder der Croton- und der Isocrotonsäure.

Gestützt auf die Gleichwertigkeit der vier Valenzen des Kohlenstoffs nahmen die beiden genannten Chemiker bekanntlich an, dass die 4 Richtungen, in welchen ein Kohlenstoff-Atom andere Atome oder Atomgruppen anzieht, übereinstimmen mit den Axen eines regulären Tetraëders, in dessen Mittelpunkt das betreffende Kohlenstoffatom gedacht wird. Ist dasselbe mit 4 verschiedenen Atomen (oder Radikalen) gebunden, so haben wir den Fall des „asymmetrischen Kohlenstoffs“ und die Möglichkeit zweier stereoisomerer Modifikationen. — Sind 2 Kohlestoffatome durch einfache Bindung mit einander verknüpft, so sind die beiden Kohlenstoffatome, von welchen jedes noch 3 andere Atome oder Atomgruppen bindet, frei und beliebig gegen einander drehbar um die gemeinsame Axe, gelegt durch die in eine Gerade fallenden einfachen Kohlenstoffbindungen. Tritt aber Doppelbindung ein d. h. binden sich 2 Atome Kohlenstoff je mit 2 Valenzen miteinander, so hört die freie Drehbarkeit des einen Kohlenstoff-Systems gegen das andere auf. Bei der einfachen Bindung stossen die beiden Kohlenstofftetraëder der Modelle mit je einer Ecke zusammen und die nach diesen 2 Ecken gerichteten Axen fallen in eine gerade Linie. Bei der doppelten Kohlenstoffbindung haben die beiden Kohlenstoff-Tetraëder eine Kante und bei dreifacher Bindung eine Fläche gemeinsam. In letzterem Falle sind geometrische Isomerien nicht möglich, wohl aber im Falle der Doppelbindung, wenn die 2 Kohlenstoffatome mit je 2 verschiedenen Atomen a und b gebunden sind. Denkt man sich durch die Doppelbindung der 2 Kohlenstoffatome eine Ebene gelegt, so sind 2 strukturidentische, aber geometrisch verschiedene isomere Verbindungen möglich, je nachdem die Atompaare oder Atomgruppen a und b auf derselben Seite dieser Ebene liegen oder auf verschiedenen Seiten. Die erste Anordnung oder „Konfiguration“ bezeichnet Wislicenus als plansymmetrisch (unser Kollege v. Baeyer deutlicher als cis-Form), die andere als centri-symmetrisch (v. Baeyer als Trans-Form).

So hatte schon van 't Hoff aus bestimmten Gründen der Maleinsäure die cis-Formel beigelegt, während die Fumarsäure das Trans-Isomere sein sollte.

Dagegen war es unsicher, welche Konfiguration d. h. welche der beiden räumlichen Formeln der Croton- und welche der Isocrotonsäure zukömmt. Durch eine Erweiterung der Theorie von Le Bel und van 't Hoff, die er in einer berühmten Abhandlung: „über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekülen und ihre Bestimmung in geometrisch isomeren ungesättigten Verbindungen" (1887) begründete, gelangte Wislicenus zu bestimmten, experimentell zu prüfenden Grundlagen und Regeln für die Bestimmung der Konfiguration in ungesättigten stereoisomeren Substanzen. Darnach muss beim Übergang eines Körpers mit Acetylenbindung in einen solchen mit Aethylenbindung die letztere Substanz die cis-Konfiguration besitzen; ferner ist das aus dem Tolan entstehende Tolandichlorür die cis-Konfiguration, während für das aus letzterem entstehende Isomere nur die Trans-Form übrig bleibt.

In ähnlicher Weise haben später Aronstein und Hollemann die Cis-Konfiguration für die Zimmtsäure und die feste Crotonsäure nachgewiesen. Diese Resultate stimmen überein mit den Schlüssen, zu welchen Wislicenus schon auf anderem Wege gelangt war.

Die Überführung von Verbindungen mit 3 fach verbundenen Kohlenstoffatomen in solche mit doppelt gebundenen Kohlenstoffatomen durch Addition von anderen Atomen lässt sich aber nur in den wenigsten Fällen zur Bestimmung der Konfiguration heranziehen. In den weitaus meisten Fällen ist nur die Entstehung von Aethylenverbindungen aus gesättigten Substanzen durch Abspaltung von Wasser oder Halogenwasserstoff oder von 2 Halogenatomen bekannt.

Um auch in solchen Fällen Anhaltspunkte für die Bestimmung der Konfiguration zu gewinnen, erweitert Wislicenus die Anschauungen von Le Bel und van 't Hoff. Sind nämlich zwei Atome einfach miteinander gebunden und ausserdem noch mit unter einander verschiedenen Radikalen oder Atomen a b c

verknüpft, so soll zwar das Kohlenstoff-System gegen das andere frei um die gemeinschaftliche Axe drehbar sein; indessen sollen diese Atome a b c des einen Kohlenstoffatoms ihre chemische Anziehungskraft auch auf die mit den anderen Kohlenstoffatomen verknüpften Atome zu äussern vermögen. Infolge dessen werden sich diejenigen Atome, welche die stärkste Anziehung für einander haben, sich möglichst zu nähern suchen, was durch Drehung des einen Systems gegen das andere erreicht wird. Eine derartige Lagerung, in welcher die sich anziehenden Atome einander möglichst nahe sind, nennt Wislicenus eine „begünstigte Konfiguration“ und er nimmt an, dass sich wenigstens die Mehrzahl der Moleküle durch Drehung des einen Kohlenstoffsystems gegen das zweite so einstellen wird, dass die möglichst begünstigte Konfiguration resultiert. Dadurch soll die Drehbarkeit des einen Kohlenstoffsystems gegen das andere aber nicht verhindert werden, wie dies bei der Kohlenstoff-Doppelbindung angenommen wird, vielmehr soll eine derartig begünstigte Konfiguration schon durch die Wärmeschwingungen eine Verschiebung erleiden können.

Durch weitere Verfolgung dieser komplizierten Vorgänge sucht Wislicenus nun die Konfiguration d. h. die relative Lagerung in den Molekülen ungesättigter Verbindungen zu bestimmen sowie die früher schwer zu verstehenden Übergänge ungesättigter Isomeren in einander in zahlreichen von ihm und seinen Schülern studierten Fällen zu erklären.

Wislicenus hat in dieser Weise durch eine grosse Zahl von ausserordentlich fein ausgedachten und sorgfältig ausgeführten Versuchen mitgewirkt, die so wichtig gewordene Stereochemie zu einer wohl begründeten chemischen Theorie auszugestalten und viele ingeniöse Versuchsanordnungen zur Feststellung der räumlichen Anordnungen der Atome im Molekül eingeführt. Mit aller Kraft suchte er seinen Ideen über die räumliche Isomerie bei den Chemikern Eingang zu verschaffen und die neue chemische Betrachtungsart als naturnotwendig zu begründen; es geschah dies namentlich in einem glänzenden Vortrag auf der Wiesbadener Naturforscherversammlung. Er

erdachte zu diesem Zwecke anschauliche und übersichtliche Modelle, die nicht nur für die Schüler, sondern auch für den Forscher von Bedeutung geworden sind.

In der vortrefflichen Neubearbeitung des bekannten Lehrbuchs der Chemie von Regnault-Strecker führte er die neuen Errungenschaften in der Chemie zum ersten Mal in zusammenhängender Form durch.

Wislicenus besass ein umfassendes chemisches Wissen und eine vielseitige naturwissenschaftliche Bildung. Er war ein ganz ausgezeichneter Lehrer; seine überaus klaren, durch die richtigen, zum Verständnis nötigen Experimente erläuterten Vorlesungen waren wahre Muster akademischer naturwissenschaftlicher Vorträge; allerdings verlangte er dabei von seinen Zuhörern ein Interesse für die Sache und ein eifriges Mitarbeiten und Mitdenken, wie es Studierende einer Hochschule tun sollten, aber leider nur selten tun.

Seine hervorragende Rednergabe, seine Kenntnisse und feinen Formen und seine Gewandtheit machten ihn besonders geschickt zum Leiter grösserer Versammlungen. Insbesondere konnte er diese seine Eigenschaften dartun, als ihm als Rektor der Würzburger Universität in dem Jubeljahre 1882 die schwierige Aufgabe zufiel, die Feier zu leiten; wir haben ihn bei der glänzenden Lösung dieser Aufgabe nur bewundern können. Jahre lang hatten ihm seine Kollegen das Amt des Sekretärs der mathematisch-physikalischen Klasse der K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften anvertraut.

Seine neidlose Teilnahme für die Verdienste Anderer kam dahier einmal so recht zum Ausdruck, als er bei Gelegenheit der Versammlung der kartellierten deutschen Akademien bei einer zwanglosen Zusammenkunft unseren damaligen Präsidenten Pettenkofer, in spontaner Begeisterung für den berühmten, am Ende seiner Tage stehenden Forscher, die Huldigung der Versammlung in den ehrendsten und rührendsten Worten darbrachte. Wir werden ihm das nicht vergessen.

Den Fortschritten des Wissens der Menschheit, jedem Guten und Schönen brachte er das lebhafteste Interesse ent-

gegen; er war wahrhaft ein Mann von allgemeiner Bildung, der durch seine persönliche Liebenswürdigkeit sowie durch seinen edlen, dem Idealen zugewandten Sinn und seine Charakterfestigkeit die Liebe Aller, die ihm näher traten, erwarb.

Sir Georg Gabriel Stokes.[1])

Im abgelaufenen Jahre hat unsere Akademie ihr berühmtes auswärtiges Mitglied, Sir Georg Gabriel Stokes, im hohen Alter von 84 Jahren durch den Tod verloren. Er wurde am 13. August 1819 zu Skreen in Irland geboren, und war wie sein grosser Vorgänger Isaac Newton Professor der Mathematik an der Universität Cambridge, wo er am 2. Februar 1903 gestorben ist.

Obwohl seiner äusseren Stellung nach seit dem Jahre 1849 Professor der Mathematik gehört Stokes doch nach seiner vorwiegenden wissenschaftlichen Tätigkeit zu den hervorragendsten Physikern der Gegenwart. Er hat sich nicht nur als geistreicher Theoretiker in der Physik, welches Gebiet ihm vermöge seiner vollständigen Beherrschung der Mathematik nahe liegen musste, ausgezeichnet, sondern viel mehr noch als scharfer Beobachter physikalischer Erscheinungen und als gewandter Experimentator. Nachdem mit der gewaltigen geistigen Bewegung durch die erste Revolution Frankreich die Führung in der Mathematik und Physik übernommen und Männer wie Lavoisier, Laplace, Arago, Fresnel, Biot, Lagrange, d'Alembert hervorvorgebracht hatte, traten England und Deutschland an die Spitze; zu der Reihe der grossen englischen Mathematiker und Physiker, zu Faraday, Young, Airy, Thomson, Tyndall, Joule, Brewster, Herschel, Maxwell gehört auch Stokes.

Stokes hat die reine Mathematik in zwei umfänglichen Untersuchungen über die numerische Berechnung gewisser Integrale und unendlicher Reihen bereichert; Airy hatte nämlich in einer

---

1) Siehe: Lord Kelvin, Nature 1903. W. Voigt, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1893, Heft 1.

Arbeit über die Intensität des Lichtes in der Nähe der Brennfläche, an der die künstlichen Regenbogen sichtbar werden, von den dreissig von Miller beobachteten schwarzen Streifen zwei mit genügender Genauigkeit durch mathematische Behandlung erklärt; Stokes fand nun eine Lösung der Aufgabe, nach der es möglich ist, nicht allein diese dreissig Streifen, sondern auch noch weitere zwanzig theoretisch zu bestimmen. Im Wesentlichen diente ihm jedoch die Mathematik, die er mit ungewöhnlicher Meisterschaft beherrschte, als nie irrende Leuchte bei seinen Studien der physikalischen Eigenschaften der Materie. Gerade die glückliche Verbindung des ausgeprägten mathematischen und experimentellen Talents machte seine Eigenart aus, durch welche er so Bedeutendes und Besonderes in der Wissenschaft leisten konnte. Auf allen Gebieten der Physik war er mit seinem erhellenden Geiste tätig, sonderbarer Weise nur nicht auf dem der Elektrizität, die sich zu seiner Zeit doch durch Andere so sehr entwickeln sollte. Insbesondere waren es Teile der Hydrodynamik, der Akustik und der Optik, in denen er längere Zeit ein zuverlässiger Führer war und die er nicht nur ausbauen half, sondern zum Teil begründete. Durch mathematische und experimentelle Forschung legte er vor Allem die Erscheinungen der Elastizität und die Vorgänge der Wellenbewegungen in elastischen festen Körpern und Flüssigkeiten klar.

Seine ersten Arbeiten aus den Jahren 1842 und 1843 behandelten Probleme der Hydrodynamik durch mathematische Untersuchungen, zunächst diejenigen Bewegungen imkompressibler sogenannter idealer Flüssigkeiten, welche man als Potentialbewegungen bezeichnet, und zwar unter verschiedenen Verhältnissen. Das Meiste dabei hat nur analytisches Interesse, aber an manchen Stellen knüpfen sich doch auch schon physikalische Fragen von praktischer Bedeutung an wie z. B. die kleinen Oscillationen einer Pendelkugel in Mitte eines durch eine feste Kugelfläche begrenzten Flüssigkeits- oder Luftquantums und die Torsion eines rechteckigen Prismas. In einer meisterhaften Abhandlung vom Jahre 1847 bringt er dann an-

schliessend die Theorie der Flüssigkeitswellen in einem Kanal unter der Voraussetzung, dass die Höhe der Wellen sehr klein ist gegen die Tiefe der Flüssigkeit, mit der Anwendung auf die jähen Tiefseewellen.

In einer bedeutungsvollen Untersuchung geht er von den Bewegungen idealer Flüssigkeiten über zu den wirklichen Flüssigkeiten und zwar zunächst zu den Bewegungen gedachter Flüssigkeiten unter Vernachlässigung der inneren Reibung; darnach gab er (1845) eine Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung. — Eine überaus wichtige Anwendung der Theorie der Flüssigkeitsreibung wird in einer grossen Abhandlung vom Jahre 1850 gemacht, nämlich die Wirkung der inneren Reibung der Flüssigkeiten auf die Bewegung des zur Messung der Schwerkraft der Erde verwendeten Pendels. Bessel hat zwar den Einfluss der Reibung der atmosphärischen Luft auf die Schwingungen des Pendels empirisch zu korrigieren gesucht, aber Stokes gab erst die Theorie von der Oscillation einer Kugel innerhalb einer reibenden Flüssigkeit für den Fall, dass die reibende Flüssigkeit unbegrenzt ist und für den Fall, dass sie durch eine feste Kugelfläche begrenzt ist.

Seine hydrodynamischen Untersuchungen stellen Stokes für alle Zeiten in die Reihe der ersten Förderer der Hydrodynamik; sie lieferten die Grundlage für die heutige Hydrokinetik.

Nun folgen die physikalischen Arbeiten, insbesondere die auf dem Gebiete der Optik, welche zu den kompliziertesten der Physik gehören. Offenbar war er durch das Studium der Wasserwellen zu dem der Wellen des Lichtes geführt worden.

In der ersten dieser Art vom Jahre 1845 wird das überaus schwierige Problem der Aberration des Lichtes in Angriff genommen. Fresnel hatte zur Erklärung dieser Erscheinungen eine besondere Hypothese aufgestellt; Stokes zeigte, dass man auch eine Erklärung derselben in anderer Weise und unter anderen Annahmen geben kann; die neuere elektromagnetische

Theorie des Lichtes schliesst sich allerdings mehr der Fresnelschen Anschauung an.

Das Jahr 1848 brachte eine optische Arbeit über die Theorie gewisser Interferenzerscheinungen sowie eine weitere interessante über Totalreflexion, in der die Theorie einer schon von Newton entdeckten und von Fresnel abermals studierten und qualitativ erklärten Erscheinung gegeben wird. Es handelt sich dabei um die Bildung des zentralen schwarzen Flecks der Newton'schen Ringe bei dem kritischen Winkel, wobei er alle Bewegungs-Komponenten an der Trennungsfläche zweier Medien in die Betrachtung zog.

Von besonderem Werte und eine seiner grössten Leistungen ist eine umfangreiche Arbeit vom Jahre 1849 über die Theorie der Beugung des Lichtes. Fresnel, der Entdecker der Erscheinung, hatte zwar die Anhaltspunkte zur Erklärung derselben gegeben; nachdem aber die Lichtbewegungen auf Schwingungen in einem elastischen Medium zurückgeführt worden waren, ergab sich die Notwendigkeit, die Erklärung Fresnels mit Hilfe der Analysis zu prüfen. Dies war nun eine für Stokes Talent so recht passende mathematische Aufgabe; die Bearbeitung durch ihn enthält die volle mathematische Theorie der Fortpflanzung der Bewegung in einem gleichartigen elastischen Medium. Dieselbe schien die Lehre von der Beugung abzuschliessen und doch ergab die fortgesetzte Beobachtung und die mit der letzteren in Einklang stehende neuere elektromagnetische Lichttheorie Ergebnisse, welche in der Theorie von Stokes nicht Berücksichtigung gefunden hatten.

Das Studium der Beugungserscheinungen führte ihn zum ersten Male von der mathematischen Betrachtung zur naturwissenschaftlichen Beobachtung, nämlich in zwei optischen Arbeiten über Interferenzerscheinungen, wovon die eine schon früher von Anderen behandelte Reflexionsphänomene an dicken Platten erörtert, die andere allgemeine Gesetze über die Zusammensetzung von Schwingungen bringt.

Daran reiht sich die dritte grosse Abhandlung von Stokes (1852), welche rein experimentell ist, über die Veränderung

der Brechbarkeit des Lichtes oder über die Gesetze der Fluorescenz. Sie ist wohl die wichtigste und vollendetste unter seinen optischen Schriften und die originellste seiner Arbeiten überhaupt. Herschel und Brewster haben bekanntlich beobachtet, dass das durchgehende Licht in gewissen Flüssigkeiten eine eigentümliche Lichterscheinung erregt, deren Farbe von der des erregenden Lichtes verschieden ist, und dass das aus der Flüssigkeit austretende Licht die Fähigkeit verloren hat, dieses Leuchten zu erregen. Stokes erkannte nun die Natur der Fluorescenz des Lichtes, indem es ihm mit Hilfe scharfsinniger Methoden gelang nachzuweisen, dass dieselbe hervorgerufen wird durch Absorption von Lichtstrahlen durch feste und flüssige Körper bis zu einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche, die dadurch selbstleuchtend wird, aber mit anderer Farbe als der natürlichen Farbe der Substanz und der der Lichtquelle, wobei die Wellenlänge des Fluorescenzlichtes stets grösser ist als die des erregenden Lichtes, d. h. stärker brechbare Strahleu werden in schwächer brechbare verwandelt und so auch die ultravioletten Strahlen sichtbar gemacht. Er untersuchte diese Vorgänge bei einer grossen Anzahl von festen und flüssigen Substanzen; seitdem ist nur wenig zu den Resultaten von Stokes hinzugekommen. — Die fluorescierenden Substanzen haben eine für die Physiologie sehr wichtige Anwendung gefunden, indem sie für Donders das Mittel wurden zu entscheiden, ob die ultravioletten Strahlen vom Auge für gewöhnlich nicht gesehen werden, weil sie durch die durchsichtigen Medien desselben absorbiert werden oder weil sie wohl durchgehen und die Netzhaut treffen, dieselbe aber nicht zu erregen im Stande sind; Donders tat bekanntlich dar, dass das letztere der Fall ist, indem nach dem Durchgange des Lichts durch die Augenmedien die ultravioletten Strahlen durch fluorescierende Mittel noch sichtbar gemacht werden können. — Die Untersuchung von Stokes über die Fluorescenz wird immer zu den klassischen Meisterwerken der neueren experimentellen Naturwissenschaft gezählt werden.

In einer weiteren sich daran anschliessenden Arbeit über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption des Lichtes

hat er die Vorstudien zu der Theorie der Absorption des Lichtes geliefert, indem er die grosse Entdeckung Kirchhoffs, welche die Grundlage der Spektralanalyse bildet, wenigstens so nahe gestreift hat, dass es einigen seiner Landsleute schien, als ob er schon die volle Wahrheit gekannt hätte, und sie den Versuch machten, die Ehre derselben für ihn in Anspruch zu nehmen; hier trat aber Stokes hohe Wahrheitsliebe und neidlose Anerkennung für die Verdienste Anderer hervor, denn er lehnte es ab der wahre Entdecker zu sein und schrieb Kirchhoff das volle Verdienst zu. Dabei untersuchte Stokes auch die von Hoppe-Seyler zuerst gesehenen Absorptionsstreifen des roten Blutfarbstoffs im Spektrum, des Sauerstoffhämoglobins, und gab ein Mittel an, durch das nach ihm benannte Stokes'sche Reagens, eine reduzierende Lösung von Eisenvitriol, dem Hämoglobin den Sauerstoff zu entziehen und das sauerstofffreie reduzierte Hämoglobin herzustellen.

Ausserdem hat er sich noch mit weiteren optischen Aufgaben in kleineren Arbeiten beschäftiget: über Metallreflexion, über Brennpunkte in Krystallen, über Doppelbrechung, über den Prozess in der Flamme, über irisierende Krystalle, Haidingers Büschel, Farben dicker Platten, Oberflächenfarben, Polarisation des gebeugten Lichtes. Durch diese seine optischen Arbeiten wurde Stokes zu einer der ersten Autoritäten in optischen Fragen. Als im Jahre 1887 die populären Vorträge über wissenschaftliche Themata in Schottland eingeführt wurden, wählte man ihn, um die erste dieser Vorlesungsreihen über das Licht zu halten. Es waren wahre Musterleistungen populärer Darstellung schwieriger wissenschaftlicher Fragen, erfüllt von Liebe zur Wissenschaft, von Begeisterung für die Natur und ihre Erkenntnis.

Seine in den Jahren 1880—1883 erschienenen gesammelten Schriften in zwei Bänden gewähren den besten Überblick über die Unermüdlichkeit und Vielseitigkeit seines Schaffens; alle hier vereinigten Arbeiten tragen den Stempel der Originalität; jede derselben bringt durch neue Tatsachen und durch neue Gesichtspunkte dauernden Gewinn. Und trotz dieser Produktivität

drängen sich seine wichtigsten Arbeiten in eine verhältnismässig kurze Zeit, auf weniger als 20 Jahre (1842—1860) zusammen; schon bald nach der Übernahme der Professur in Cambridge liess sein Schaffensdrang nach und brachte er nur mehr gelegentliche Mitteilungen aus dem Schatze seiner Erfahrungen, obwohl er noch den lebhaftesten Anteil an den Fortschritten der Physik nahm.

Dass ein so verdienter Mann bei seinen Fachgenossen, namentlich in England, in höchster Achtung stand, lässt sich denken; bei seinem 50 jährigen Jubiläum als Professor in Cambridge im Jahr 1900 war die ganze wissenschaftliche Welt Englands zu einer ungemein würdigen Feier versammelt, bei der der greise Cornu aus Paris als Optiker die wissenschaftliche Festrede hielt.

Bis in sein hohes Alter blieb Stokes in regem Verkehr mit den grossen wissenschaftlichen Körperschaften seines Vaterlandes; bereitwillig unterstützte er mit Rat und Tat jüngere Forscher in ihren wissenschaftlichen Bestrebungen. Er war eine ehrwürdige, vornehme Erscheinung mit dem Ausdruck des Wohlwollens und des inneren Friedens.

Karl v. Scherzer.[1])

Am 20. Februar 1903 starb in Görz Dr. Karl v. Scherzer, der seit dem Jahre 1862 als korrespondierendes Mitglied unserer mathematisch-physikalischen Klasse in der Sektion für allgemeine Naturgeschichte angehörte, in dem hohen Alter von 82 Jahren. Er hat sich als Forschungsreisender, Naturforscher und Geograph, auch als Nationalökonom und Staatsmann bedeutende Verdienste erworben und einen höchst angesehenen Namen gemacht.

---

[1]) Siehe: Leopoldina, 1903, Nr. 3, S. 45; Beilage der Allg. Zeitung, 1901, Nr. 101; 1903, Nr. 51; Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik, 1880; Globus, 1903, Nr. 15; Leipziger illustrierte Zeitung, 1901, 4. Mai.

Er wurde am 1. Mai 1821 zu Wien geboren. Die Eltern hegten den lebhaften Wunsch, er möge sich der Beamtenlaufbahn widmen; aber er hatte einen förmlichen Widerwillen dagegen und von früh an eine Vorliebe für die Technik. Er wusste von Anfang an was er wollte und machte seinen Weg ganz aus eigener Kraft. Bald nach Absolvierung der Volksschule trat er im Alter von 13 Jahren als Lehrling in die Kais. Staatsdruckerei in Wien ein, die er nach $3^1/_2$ Jahren verliess, um sich in auswärtigen grossen Druckereien weiter auszubilden. Er arbeitete zunächst bei Brockhaus in Leipzig und machte dann eingehende Fachstudien in den angesehensten Druckereien von Paris und London. In London befasste er sich ausserdem in der Bibliothek des Britischen Museums eifrigst mit sprachlichen und geographischen Studien. Er wollte sich noch nach Nordamerika begeben; da wurde er aber Familienverhältnisse halber nach Wien zurückgerufen; er beabsichtigte dorten seine reichen Erfahrungen zu verwerten und eine grosse Buchdruckerei und Verlagsbuchhandlung zu begründen, erhielt jedoch wegen seiner freiheitlichen Gesinnungen nicht die Genehmigung dazu. Es gelang ihm übrigens in dem stürmischen Jahre 1848 für die Buchdruckergehilfen, deren Lage er stets zu bessern bestrebt war, günstigere Bedingungen durchzusetzen und ihre soziale Stellung zu fördern. Mit Eintritt der politischen Reaktion in seinem Vaterlande ging er missmutig nach dem freien England, um sich in London niederzulassen. Diese seine Absicht wurde aber vereitelt durch ein Halsleiden, das ihn nötigte ein mildes Klima aufzusuchen; er ging nach Nizza, Neapel, Rom und Venedig und hielt sich auf der Rückreise in Meran auf. Dorten trat nun eine Wendung in seinem Geschicke und seiner Tätigkeit auf; er lernte nämlich daselbst den talentvollen und geistreichen Naturforscher und späteren Schöpfer der Migrationslehre, unseren Kollegen Moritz Wagner, der eben von seiner Reise in den Kaukasus zurückgekehrt war, kennen. Dieser kühne, ihm geistesverwandte Forscher schlug ihm vor, eine gemeinsame längere Studienreise zu unternehmen. Dieselbe währte drei Jahre

(1852—1855); von Canada und Nordamerika ausgehend durchwanderten sie die damals wissenschaftlich noch ganz unbekannten 5 Staaten Mittelamerikas von der Grenze Mexikos bis zum Isthmus von Panama; es war die erste wissenschaftliche Durchforschung des zentralamerikanischen Isthmuslandes, welche in Nordamerika das grösste Interesse erregte. Die Reise brachte wichtige Aufschlüsse über die Natur des Landes und die Zustände seiner Bewohner, die in den beiden gemeinsamen Werken: „Reisen in Nordamerika“ (1854) und „die Republik Costa Rica“ (1856), sowie in den von Scherzer verfassten: „Wanderungen durch die mittelamerikanischen Freistaaten“ (1857) niedergelegt sind.

Diese höchst interessant geschriebenen Berichte lenkten die Aufmerksamkeit des genialen österreichischen Finanzministers Freiherrn v. Bruck auf Scherzer; der Minister erkannte ihn als den richtigen Mann für die von dem Erzherzog Ferdinand Max ausgerüstete wissenschaftliche Expedition um die Erde durch die Fregatte Novara. Scherzer schrieb in einem Memorandum über die Ziele und Aufgaben einer solchen Reise sowie über die Stellen, welche dabei vom wissenschaftlichen und volkswirtschaftlichen Standpunkte aus besonders berücksichtiget werden müssten. Das Schiff stand unter der Führung des Kommodore v. Wüllerstorff-Urbair; als wissenschaftlicher Beistand für Scherzer, der die geographischen, ethnographischen und nationalökonomischen Beobachtungen machen sollte, wurde der ausgezeichnete Geologe Ferdinand v. Hochstetter bestimmt. Zur Feststellung des wissenschaftlichen Programms wandte sich Scherzer an die bedeutendsten Gelehrten Europas, namentlich auch in unserer Stadt, um von ihnen gute Ratschläge zu bekommen, ihre wertvolle Unterstützung zu gewinnen und ihre Wünsche zu hören. In solcher Weise wohl vorbereitet ging diese erste deutsche Weltumsegelung mit ausschliesslich wissenschaftlichem Zwecke im Monat August 1857 von Triest aus ab und kehrte nach 2 Jahren Ende August 1859 wohlbehalten wieder in die Heimat zurück. Die Leistungen der Expedition übertrafen alle Erwartungen; es wurden reiche Sammlungen

aus fernen Ländern heimgebracht und eine grosse Anzahl wichtiger naturwissenschaftlicher und volkswirtschaftlicher Beobachtungen gemacht. Scherzer hatte den bei weitem grössten Anteil an der allgemeinen populär gehaltenen Beschreibung der grossen wissenschaftlichen Unternehmung; er bearbeitete die naturgeschichtlichen und statistisch-kommerziellen Ergebnisse der Reise, die er in dem Werke: „Die Reise der österreichischen Fregatte Novara um die Erde“ veröffentlichte, welches einen für die damalige Zeit ganz ausserordentlichen buchhändlerischen Erfolg hatte. Er sammelte auch das linguistische, ethnographische und anthropometrische Material, das dann von Fachgelehrten verwertet wurde. Eine Frucht der Reise war auch seine Schrift: „Aus der Natur und dem Völkerleben im tropischen Amerika“ (1864).

Der ihm wohlgewogene hochstrebende Erzherzog Ferdinand Max hatte ihn vor seinem Weggange nach Mexiko, wo er so unglücklich enden sollte, dem Kaiser für eine Stelle im Staatsdienste, speziell im Konsulatsfache, empfohlen; er wurde infolge davon (1866) in das österreichische Handelsministerium berufen, um dorten die auf seiner Reise erworbenen umfassenden und weitschauenden volkswirtschaftlichen Kenntnisse zu verwerten. Als (1869) eine Expedition nach Ostasien gehen sollte, um bei dem Vordringen der europäischen Mächte vorteilhafte Handelsverträge zu gewinnen und für die österreichische Industrie neue Absatzgebiete zu schaffen, ersah man ihn als ersten Beamten des handelspolitischen Dienstes und als besten Kenner der Verhältnisse dazu aus, die Verhandlungen zu leiten; die fachmännischen Berichte über die österreichische Expedition nach Siam, China und Japan enthalten die Resultate dieser seiner Tätigkeit. Nach der Rückkehr wurde er zum ausserordentlichen Mitglied der statistischen Zentralkommission in Wien ernannt und dann in den Konsulatsdienst übernommen. Als österreichischer Generalkonsul auf verschiedenen Posten führte er ein Wanderleben; er kam 1872 nach Smyrna, 1875 nach London, 1878 nach Leipzig und 1884 nach Genua, an welchen Orten er seinem Vaterlande namhafte Dienste leistete.

Sein Buch über „Smyrna“ (1873) und das über „Weltindustrien“ (1880), namentlich aber sein letztes über „das wirtschaftliche Leben der Völker“ (1885), bezeugen sein umfassendes und tiefes Wissen und seine scharfe Beobachtung. In dem letzteren hat er die Arbeit der Kulturvölker in meisterhafter Weise dargestellt, sowie die Elemente und Faktoren, welche die wirtschaftliche Tätigkeit des Menschen bilden und beeinflussen, entwickelt.

Im Jahre 1897 liess er sich pensionieren und lebte ganz abgeschieden von der Welt in dem schön am Isanzo gelegenen Görz, nur mit seinen Büchern beschäftiget.

Wegen seiner Verdienste um die Wissenschaft wurden ihm vielfache Ehren zu Teil; er war Mitglied vieler gelehrter Gesellschaften für Geographie, Ethnologie, Anthropologie und Statistik; die philosophische Fakultät der Universität Giessen ernannte ihn zum Ehrendoktor.

Man wird in der Wissenschaft seiner immer in Ehren gedenken.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 4. Juli 1903. Seite

Oeffentliche Sitzung zur Feier des 144. Stiftungstages am 11. März 1903.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1903. Heft IV.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 7. November 1903.

1. Herr SEBASTIAN FINSTERWALDER macht Mitteilung über eine von ihm und Herrn W. SCHEUFELE verfasste Abhandlung über: „Das Rückwärtseinschneiden im Raum.“

Die bekannte Pothenot'sche Aufgabe der ebenen Geometrie wird folgendermassen auf den Raum erweitert. Von einem unbekannten Standpunkte aus ist das Bündel von Visierstrahlen, die nach einer grösseren Anzahl von im Raum verteilten bekannten Fixpunkten gehen, durch Messung der gegenseitigen Lage dieser Strahlen am einfachsten auf photogrammetrischen Wege bestimmt. Man soll den unbekannten Standpunkt finden. Die Lösung dieser Aufgabe nebst Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird gegeben und auf die Bestimmung des Ballonortes aus einer im Winter aus 4500 m Höhe auf die Niedern Tauern gerichteten Ballonaufnahme angewendet.

2. Herr Hugo v. Seeliger bringt die zweite Abhandlung: „Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes" von Herrn Arthur Korn a. o. Professor an der K. Universität München zur Vorlage.

Nach der Gravitationstheorie des Verfassers bewegt sich das die Gravitation vermittelnde Zwischenmedium — wenn man es mit ausserordentlich raschen Schwingungen zu tun hat — wie ein inkompressibles Kontinuum, während die Teilchen der ponderablen Materie kompressibel sind. Das ganze System ist sogenannter Eigenschwingungen fähig, ähnlich wie ein akustischer Resonator. Diese Eigenschwingungen lassen sich berechnen, und die Grundschwingung, die in Pulsationsschwingungen (periodischen Kompressionen und Dilatationen) der ponderablen Teilchen besteht, hat die Gravitationswirkung zur Folge, für welche sich das Newton'sche Gesetz ergibt. Damit bei Annahme einer geringen Kompressibilität des Zwischenmediums solche Eigenschwingungen existieren können, muss noch eine Absorptionsfähigkeit desselben vorausgesetzt werden; diese Erweiterung der ursprünglichen Theorie wird in dieser Abhandlung durchgeführt und ergibt ein erweitertes Gravitationsgesetz, das mit der durch die astronomischen Untersuchungen H. v. Seeligers geforderten Erweiterung im Einklang ist.

Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes.

II. Abhandlung.

Von **A. Korn.**

(*Eingelaufen 7. November.*)

IV. Abschnitt.

Über die in einem System schwach kompressibler Teilchen infolge der universellen Schwingungen auftretenden scheinbaren Fernkräfte.

§ 1.

Die Kontinuitätsgleichung:

1) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

lautet für das Zwischenmedium, in dem:

2) $$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

3) $$\Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0$$

ist, folgendermassen:

$$4)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \cdot \mu^2 \varphi,$$

oder, wenn

$$5)\qquad \varphi = \Phi \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

abgesehen von Grössen, die gegen Φ von der Ordnung $\frac{T}{\text{Zeiteinheit}}$ klein sind, und unter der Voraussetzung, dass weder Φ noch $\frac{d\Phi}{dt}$ von der Ordnung $\frac{1}{T}$ gross sind:

$$6)\qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{T}{2\pi} \mu^2 \Phi \cos \frac{t}{T} 2\pi\right),$$

wo ε_0 eine Konstante vorstellt.

Die hydrodynamischen Differentialgleichungen:

$$7)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \varepsilon \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \varepsilon \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

erhalten somit die folgende Form:

$$8)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \\ + \varepsilon_0 \mu^2 \Phi \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \cos^2 \dfrac{t}{T} 2\pi = -\dfrac{\partial p}{\partial x}, \ldots \end{cases}$$

unter Vernachlässigung von Grössen, die von der Ordnung $\frac{T}{\text{Zeiteinheit}}$ klein sind, oder:

$$9)\qquad \begin{cases} p = -\varepsilon_0 \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \\ \qquad - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu^2 \Phi^2 \cos^2 \dfrac{t}{T} 2\pi. \end{cases}$$

Es handelt sich darum, mit Hilfe der Formel 9) für p die scheinbaren Kräfte:

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(nx)\,d\omega\,dt,\\ Y &= -\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(ny)\,d\omega\,dt,\\ Z &= -\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(nz)\,d\omega\,dt \end{aligned}\right.$$

zu berechnen, welche auf ein schwach kompressibles Teilchen mit der Oberfläche ω und den äusseren Normalen n infolge der Drucke p der Flüssigkeit ausgeübt werden.

Schreiben wir 9) in der Form:

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} p = &-\varepsilon_0\left[\frac{d\varphi}{dt}-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right]\\ &-\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\mu^2\Phi^2\cos^2\frac{t}{T}2\pi, \end{aligned}\right.$$

so erkennen wir, dass wir die erste Formel 10) so darstellen können:

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} X = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\Bigg[&\frac{d}{dt}\left\{\int_\omega \varepsilon_0\varphi\cos(nx)\,d\omega\right\}\\ &-\varepsilon_0\int_\omega \Phi\sin\frac{t}{T}2\pi\frac{d}{dt}(d\omega\cos(nx))\\ &-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\omega\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\cos(nx)\sin^2\frac{t}{T}2\pi\,d\omega\\ &+\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\mu^2\int_\omega\Phi^2\cos(nx)\cos^2\frac{t}{T}2\pi\,d\omega\Bigg]dt. \end{aligned}\right.$$

Die erste Zeile rechts enthält zu vernachlässigende Grössen, für die Bedeutung der zweiten Zeile kommen die bekannten Formeln: [1])

[1]) Man vgl. z. B. A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik, Berlin 1896 bis 1898, 2. Aufl., S. 145.

$$13)\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\omega\cos(nx)) &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(nx)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial x}\cos(ny)+\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nz)\right)\right]d\omega,\\
\frac{d}{dt}(d\omega\cos(ny)) &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(ny)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial w}{\partial y}\cos(nz)\right)\right]d\omega,\\
\frac{d}{dt}(d\omega\cos(nz)) &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(nz)\right.\\
&\quad\left.-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial z}\cos(ny)+\frac{\partial w}{\partial z}\cos(nz)\right)\right]d\omega
\end{aligned}\right.$$

in betracht; berücksichtigen wir schliesslich, dass:

$$14)\qquad \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin^2\frac{t}{T}2\pi\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\cos^2\frac{t}{T}2\pi\,dt = \tfrac{1}{2}$$

ist, so folgt aus 12):

$$15)\left\{\begin{aligned}
X = &-\frac{\varepsilon_0\mu^2}{4}\int_\omega \Phi^2\cos(nx)\,d\omega\\
&+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\omega\left[\Phi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cos(nx)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\cos(nz)\right)\right.\\
&\left.-\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\cos(nx)\right]d\omega,
\end{aligned}\right.$$

analog Y und Z, wobei die zweiten Ableitungen von Φ in der äusseren Flüssigkeit zu nehmen sind.

Nach dem Stokes'schen Theorem ist für jede geschlossene Fläche ω:

$$\int_\omega\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\cos(ny)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cos(nz)\right]d\omega = 0,$$

wenn $U\ V\ W$ drei beliebige, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle $(x\ y\ z)$ auf ω vorstellen. Setzen wir:

$$U = 0,$$
$$V = -\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$
$$W = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so folgt:

$$\int_\omega \Biggl\{ \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos(n x)$$
$$- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n z)$$
$$- \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos(n y) - \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \cos(n z) \Biggr\} d\omega = 0,$$

oder:

$$16)\quad \begin{cases} \int_\omega \Phi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos(n x) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos(n y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \cos(n z) \right) d\omega \\ = \mu^2 \int_\omega \Phi^2 \cos(n x)\, d\omega + \int_\omega \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos(n x)\, d\omega \\ - \int_\omega \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\omega, \end{cases}$$

wenn wir:

$$17)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(n x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n z)$$

setzen. Auf diese Weise folgt aus 15):

$$18)\quad \begin{cases} X = \frac{\varepsilon_0 \mu^2}{4} \int_\omega \Phi^2 \cos(n x)\, d\omega \\ \qquad - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_\omega \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n x) \right] d\omega, \end{cases}$$

analog Y und Z.

IV. Die infolge einer Eigenschwingung eines Systems schwach kompressibler Teilchen auf jedes derselben wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten sind durch die Formeln gegeben:

$$19)\quad \begin{cases} X = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_\omega [U\,U_n - \tfrac{1}{2}\{U^2 + V^2 + W^2 + \mu^2\Phi\}\cos(nx)]\,d\omega, \\ Y = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_\omega [V\,U_n - \tfrac{1}{2}\{U^2 + V^2 + W^2 + \mu^2\Phi\}\cos(ny)]\,d\omega, \\ Z = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_\omega [W U_n - \tfrac{1}{2}\{U^2 + V^2 + W^2 + \mu^2\Phi\}\cos(nz)]\,d\omega; \end{cases}$$

dabei ist

$$20)\quad \begin{cases} U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ W = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \end{cases}$$

$$21)\quad U_n = U\cos(nx) + V\cos(ny) + W\cos(nz)$$

gesetzt.

§ 2.

Wir können aus dem Satz IV einige Schlüsse ziehen, welche den sich für den Fall $\mu = 0$ ergebenden Resultaten[1]) einigermassen analog sind:

Setzt sich das System aus einer Zahl n schwach kompressibler Teilchen zusammen, und bezeichnen wir die scheinbaren auf die einzelnen Teilchen wirkenden Kraftkomponenten mit $X_j\ Y_j\ Z_j$ $(j = 1, 2 \ldots n)$, so ergibt sich für die Summen

$$\sum_1^n{}^j X_j, \quad \sum_1^n{}^j Y_j, \quad \sum_1^n{}^j Z_j$$

[1]) A. Korn, eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, Ferd. Dümmlers Verlag 1901, S. 136 ff.

ein einfaches Resultat; es ist, wenn man die Integrale über die Oberflächen ω_j der Teilchen in ein Integral über den Aussenraum a (den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum) umformt:

$$\sum_1^n{}^j X_j = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a \Big[U\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right) + U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z} - U\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial V}{\partial x}-W\frac{\partial W}{\partial x} - \mu^2\,\Phi\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big]\,d\tau,$$

oder:

analog:

22)
$$\begin{cases} \sum_1^n{}^j X_j = 0, \\ \sum_1^n{}^j Y_j = 0, \\ \sum_1^n{}^j Z_j = 0. \end{cases}$$

Zusatz 1 zu IV. Der Schwerpunkt eines Systems schwach kompressibler Teilchen bewegt sich gleichförmig in grader Linie.

Für den Fall $n = 2$ folgt aus 22):

23)
$$\begin{cases} X_1 = -X_2 \\ Y_1 = -Y_2 \\ Z_1 = -Z_2. \end{cases}$$

Zusatz 2 zu IV. Für die scheinbare Wechselwirkung zweier schwach kompressibler Teilchen gilt der Satz der Gleichheit von actio und reactio.

§ 3.

Für die Rechnung in speziellen Fällen ist eine andere Form der Gleichungen 19) für die Kraftkomponenten vorzuziehen.

Wir verwandeln die Integrale über die Oberfläche ω in Integrale über den Innenraum i des betreffenden Teilchens, dann folgt:

$$X = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_i \Big[U\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z} - U\frac{\partial U}{\partial x} - V\frac{\partial V}{\partial x} - W\frac{\partial W}{\partial x} - \mu^2\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big] d\tau,$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}(k^2 + \mu^2)\int_i \Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x} d\tau,$$

oder:

24) $$X = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_0 (k^2 + \mu^2)\int_\omega \Phi^2 \cos(nx)\, d\omega,$$

analog Y und Z.

Zusatz 3 zu IV. Die infolge einer Eigenschwingung eines Systems schwach kompressibler Teilchen mit dem Potential Φ auf jedes der Teilchen wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten sind durch die folgenden Formeln darstellbar:

25) $$\begin{cases} X = \dfrac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2)\displaystyle\int_\omega \Phi^2 \cos(nx)\, d\omega, \\ Y = \dfrac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2)\displaystyle\int_\omega \Phi^2 \cos(ny)\, d\omega, \\ Z = \dfrac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2)\displaystyle\int_\omega \Phi^2 \cos(nz)\, d\omega; \end{cases}$$

dabei bezeichnet k^2 die der universellen Funktion Φ zugehörige Zahl, unter n sind nach vor die in das Innere der Flüssigkeit gerichteten Normalen der Oberfläche ω des betreffenden Teilchens zu verstehen.

Für $\mu = 0$ gehen alle diese Sätze in die früher[1]) abgeleiteten einfachen Resultate der Theorie der universellen Schwingungen über.

V. Abschnitt.

Über die Wechselwirkung kugelförmiger, schwach kompressibler Teilchen infolge ihrer Grundschwingung.

§ 1.

Wir nehmen zwei Kugeln vom Radius R[2]) an und suchen bei beliebig vorausgesetztem μ die universelle Grundschwingung derselben zu finden, d. h. eine mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion des Innen- und Aussenraumes Φ, welche im Unendlichen verschwindet, im Innern der beiden Kugeln der Differentialgleichung:

1) $$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

im Aussenraume der Differentialgleichung:

2) $$\Delta \Phi - \mu^2 \Phi = 0$$

genügt.

Von den Lösungen, deren nach unseren Existenzbeweisen unendlich viele existieren müssen, haben wir die mit kleinsten k^2 auszuwählen, um zur Grundschwingung zu gelangen.

Unsere Aufgabe wird wesentlich erleichtert werden, wenn wir voraussetzen, dass der Radius R der Kugeln sehr klein gegen ihre Zentraldistanz ϱ ist. Wir können dann nämlich eine Methode der successiven Näherungen zur Anwendung

---

[1]) Vgl. S. 568, Anm. 1.

[2]) Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass beide Kugeln denselben Radius haben.

bringen, welche der Methode von Murphy für das Zweikugelproblem in der Elektrostatik analog ist:[1])

Es wird in erster Annäherung in der Kugel 1 und in der Nähe derselben:[2])

$$3^{a})\quad \begin{cases} \Phi = c \cdot \dfrac{e^{-\mu r_1}}{r_1} & \text{ausserhalb } \omega_1, \\ \quad = c \cdot \dfrac{e^{-\mu R}}{\sin k_0 R} \cdot \dfrac{\sin k_0 r_1}{r_1} & \text{in der Kugel 1} \end{cases}$$

sein (r_1 Entfernung des variablen Punktes vom Zentrum der Kugel 1, k_0 die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$4)\qquad k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0),$$

gerade so, als ob die zweite Kugel nicht existierte, und in der Kugel 2 resp. in der Nähe derselben:

$$3^{b})\quad \begin{cases} \Phi = c \cdot \dfrac{e^{-\mu r_2}}{r_2} & \text{ausserhalb } \omega_2, \\ \quad = c \cdot \dfrac{e^{-\mu R}}{\sin k_0 R} \cdot \dfrac{\sin k_0 r_2}{r_2} & \text{in der Kugel 2} \end{cases}$$

(r_2 Entfernung des variabeln Punktes vom Zentrum der Kugel 2), gerade so, als ob die erste Kugel nicht existierte; c ist dabei eine Konstante, die willkürlich bleibt, so lange wir die gesamte lebendige Kraft der Schwingung nicht kennen, und wir haben — was schon aus Symmetriegründen folgt — das c für beide Kugeln gleich angesetzt. Wir müssen nun die Funktion Φ genauer berechnen und setzen:

[1]) Für den Fall $\mu = 0$ habe ich die Berechtigung der Anwendung dieser Methode ausführlich bewiesen (Communications de la Soc. Math. de Kharkow 1903); der Beweis lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf den allgemeinen Fall eines beliebigen μ Schritt für Schritt ausdehnen.

[2]) Man vgl. III. Abschnitt, S. 434.

$$4^{a})\qquad \Phi = \frac{c\,e^{-\mu R}}{R} + \Psi_1, \text{ an der Kugelfläche } \omega_1,$$

$$4^{b})\qquad \Phi = \frac{c\,e^{-\mu R}}{R} + \Psi_2, \text{ an der Kugelfläche } \omega_2,$$

$$5)\qquad k = k_0 + E,$$

wobei wir aussagen können, dass $\Psi_1\ \Psi_2\ E$ gegen die ersten Glieder rechts um so kleiner sein müssen, je kleiner $\frac{R}{\varrho}$ ist; wir wissen übrigens nach den allgemeinen Existenzbeweisen, dass die Zahl k^2 und die Funktion Φ existieren, und dass Φ mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig ist.

Wir können Ψ_1 auf ω_1 nach Kugelfunktionen entwickelt denken:

$$6^{a})\qquad \Psi_1 = c_1 + c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) + c_{13}\cos(r_1 z) + \cdots, \text{ an } \omega_1,$$

ebenso Ψ_2 auf ω_2:

$$6^{b})\qquad \Psi_2 = c_2 + c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) + c_{23}\cos(r_2 z) + \cdots, \text{ an } \omega_2.$$

Tatsächlich wissen wir über die hier vorkommenden Konstanten $c_1\ c_2\ c_{11} \ldots c_{21} \ldots\ldots$ noch gar nichts, abgesehen davon, dass sie gegen $\frac{c\,e^{-\mu R}}{R}$ um so kleiner sein müssen, je kleiner $\frac{R}{\varrho}$ ist; wir werden aber zunächst so verfahren, als ob wir diese Konstanten kennen, mit Hilfe der Randwerte $4^{a})$, $4^{b})$ die Funktion Φ im Aussen- und im Innenraume bestimmen und nachträglich die Konstanten $c_1\ c_2\ c_{11} \ldots c_{21} \ldots\ldots E$ durch die Forderung berechnen, dass auch die ersten Ableitungen von Φ bei dem Durchgange durch ω_1 und ω_2 stetig bleiben müssen.

§ 2.

Unsere erste Aufgabe ist, die Funktion Φ des Aussenraumes zu berechnen, die mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, im Unendlichen verschwindet und der Gleichung:

$$7)\qquad \Delta\Phi - \mu^2\Phi = 0$$

genügt, bei den Randwerten:

$$8^a)\qquad \Phi = \frac{ce^{-\mu R}}{R} + c_1 + [c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) + c_{13}\cos(r_1 z)] + \cdots, \text{ an } \omega_1,$$

$$8^b)\qquad \Phi = \frac{ce^{-\mu R}}{R} + c_2 + [c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) + c_{23}\cos(r_2 z)] + \cdots, \text{ an } \omega_2.$$

Die Lösung dieser ersten Aufgabe lässt sich mit Hilfe der Methode von Murphy[1]) erlangen:

Wir bestimmen die Lösung Φ_{11} für den Aussenraum von ω_1 mit den Randwerten 8^a^):

$$9^a)\qquad \Phi_{11} = \frac{R}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\left\{c\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_1\right\} + \frac{R^2}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1^2} \cdot \frac{1+\mu r_1}{1+\mu R}\{c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) + c_{13}\cos(r_1 z)\} + \cdots,$$

die Lösung Φ_{21} für den Aussenraum von ω_2 mit den Randwerten 8^b^):

$$9^b)\qquad \Phi_{21} = \frac{R}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_2}}{r_2}\left\{c\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_2\right\} + \frac{R^2}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_2}}{r_2^2} \cdot \frac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\{c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) + c_{23}\cos(r_2 z)\} + \cdots;$$

---

[1]) Man vgl. z. B. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, I. Bd., S. 354 ff. Berlin 1899.

hierauf die Lösung Φ_{12} für den Aussenraum von ω_1 mit den Randwerten $(-\Phi_{21})$ an ω_1, also mit den Randwerten:

$$10^{a})\qquad \overline{\Phi}_{12} = -c\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2} - \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\cdot c_2 \quad \text{an } \omega_1$$

und die Lösung Φ_{22} für den Aussenraum von ω_2 mit den Randwerten $(-\Phi_{11})$ an ω_2, also mit den Randwerten:

$$10^{b})\qquad \overline{\Phi}_{22} = -c\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} - \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\, c_1 \quad \text{an } \omega_2$$

bei Vernachlässigung von Grössen, die gegen $c\dfrac{R^2}{\varrho^2}$ klein sind, und so fort, dann wird:

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{22} + \cdots$$

die gesuchte Lösung darstellen, und es ist leicht zu übersehen, dass wir bei unseren Vernachlässigungen die Reihe nach den vier ersten Gliedern abbrechen können:

$$11)\qquad \Phi = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{22}.$$

Es ist nur noch notwendig, die Funktionen Φ_{12} und Φ_{22} aus ihren Randwerten 10^{a}), 10^{b}) zu berechnen.

Versteht man unter ϱ die Entfernung und Richtung: Zentrum der Kugel 1 → Zentrum der Kugel 2, so hat man an ω_2:

$$r_1 = \sqrt{\varrho^2 + R^2 + 2R\varrho\cos(r_2\varrho)},$$

$$\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} = \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\left\{1 - \frac{R}{\varrho}(1+\mu\varrho)\cos(r_2\varrho)\right\},$$

unter Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung, und analog an ω_1:

$$r_2 = \sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos(r_2\varrho)},$$

$$\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2} = \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\left\{1 + \frac{R}{\varrho}(1+\mu\varrho)\cos(r_1\varrho)\right\},$$

so dass wir die Randwerte 10^{a}) und 10^{b}) auch so schreiben können:

$$12^{a})\quad \overline{\Phi}_{12} = -\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}c_2\right)\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} - \frac{Rc}{\varrho^2}(1+\mu\varrho)\cos(r_1\varrho),\quad (\text{an } \omega_1),$$

$$12^{b})\quad \overline{\Phi}_{22} = -\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}c_1\right)\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} + \frac{Rc}{\varrho^2}(1+\mu\varrho)\cos(r_2\varrho),\quad (\text{an } \omega_2),$$

somit:

$$13^{a})\quad \begin{cases} \Phi_{12} = -\dfrac{R}{r_1}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_1}}{e^{-\mu R}}\left(c + \dfrac{R}{e^{-\mu R}}c_2\right)\dfrac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\ \qquad -\dfrac{R^3 c}{\varrho^2 r_1^2}\cdot\dfrac{1+\mu r_1}{1+\mu R}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_1}}{e^{-\mu R}}(1+\mu\varrho)\cos(r_1\varrho), \end{cases}$$

$$13^{b})\quad \begin{cases} \Phi_{22} = -\dfrac{R}{r_2}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_2}}{e^{-\mu R}}\left(c + \dfrac{R}{e^{-\mu R}}c_1\right)\dfrac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\ \qquad +\dfrac{R^3 c}{\varrho^2 r_2^2}\cdot\dfrac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_2}}{e^{-\mu R}}(1+\mu\varrho)\cos(r_2\varrho). \end{cases}$$

Wir bilden nun nach 11), 9) und 13) die Funktion Φ; wir werden dieselbe in der Nähe der Kugel 2 in der folgenden Gestalt darstellen können:

$$\Phi = \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\left\{c\,\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_1\right\}$$

$$+\frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2}\left\{c\,\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_2\right\}$$

$$+\frac{R^2}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2^2}\cdot\frac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\{c_{21}\cos(r_2x)+c_{22}\cos(r_2y)+c_{23}\cos(r_2z)\}$$

$$-\frac{Rc}{r_1\varrho}\cdot\frac{e^{-\mu r_1}\cdot e^{-\mu\varrho}}{e^{-\mu R}}$$

$$-\frac{R\,e^{-\mu r_2}}{r_2\,e^{-\mu R}}\cdot\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}c_1\right)\cdot\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}$$

$$+\frac{R^3 c}{\varrho^2 r_2^2}\cdot\frac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{e^{-\mu R}}(1+\mu\varrho)\cos(r_2\varrho),$$

oder, da wir wieder:

$$\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} = \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\left(1 - \frac{r_2}{\varrho}(1 + \mu\varrho)\cos(r_2\,\varrho)\right)$$

setzen können, in der Nähe der Kugel 2:

$$14^{a})\begin{cases} \Phi = \dfrac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_2}}{r_2}\left\{c\,\dfrac{e^{-\mu R}}{R} + c_2\right\} \\ \quad + \dfrac{R^2}{e^{-\mu R}}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_2}}{r_2^2}\cdot\dfrac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\{c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) \\ \qquad\qquad + c_{23}\cos(r_2 z)\} \\ \quad + \left(1 - \dfrac{R\,e^{-\mu r_2}}{r_2\,e^{-\mu R}}\right)\left(c + \dfrac{R}{e^{-\mu R}}\,c_1\right)\dfrac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\ \quad - \dfrac{c\cos(r_2\,\varrho)\,e^{-\mu\varrho}}{\varrho^2}(1+\mu\varrho)\left\{r_2 - \dfrac{R^3(1+\mu r_2)\,e^{-\mu r_2}}{r_2^2(1+\mu R)\,e^{-\mu R}}\right\}.\ ^{1)} \end{cases}$$

Analog in der Nähe der Kugel 1:

$$14^{b})\begin{cases} \Phi = \dfrac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\left\{c\,\dfrac{e^{-\mu R}}{R} + c_1\right\} \\ \quad + \dfrac{R^2}{e^{-\mu R}}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_1}}{r_1^2}\cdot\dfrac{1+\mu r_1}{1+\mu R}\{c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) \\ \qquad\qquad + c_{13}\cos(r_1 z)\} \\ \quad + \left(1 - \dfrac{R\,e^{-\mu r_1}}{r_1\,e^{-\mu R}}\right)\left(c + \dfrac{R}{e^{-\mu R}}\,c_2\right)\dfrac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\ \quad + \dfrac{c\cos(r_2\,\varrho)\,e^{-\mu\varrho}}{\varrho^2}(1+\mu\varrho)\left\{r_1 - \dfrac{R^3(1+\mu r_1)\,e^{-\mu r_1}}{r_1^2(1+\mu R)\,e^{-\mu R}}\right\}. \end{cases}$$

§ 3.

Unsere nächste Aufgabe ist, Φ für die Innenräume von ω_1 und ω_2 bei den Randwerten 8[a]), 8[b]) zu berechnen. Wir führen zu diesem Zwecke statt der Konstanten

---

1) Wir lassen die Konstante

$$-\frac{Rc}{\varrho^2}\cdot\frac{e^{-2\mu\varrho}}{e^{-\mu R}}$$

fort; dieselbe würde sich bei Berücksichtigung von Φ_{13} und Φ_{23} übrigens von selbst fortheben.

$$\begin{matrix} c_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{matrix}$$

die neuen Konstanten

$$\begin{matrix} C_1 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_2 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{matrix}$$

durch die folgenden Relationen ein:

$$15^{a})\quad \begin{cases} \dfrac{c\,e^{-\mu R}}{R} + c_1 = C_1 \sin k\,R, \\ c_{11} = C_{11} (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R), \\ c_{12} = C_{12} (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R), \\ c_{13} = C_{13} (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R); \end{cases}$$

$$15^{b})\quad \begin{cases} \dfrac{c\,e^{-\mu R}}{R} + c_2 = C_2 \sin k\,R, \\ c_{21} = C_{21} (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R), \\ c_{22} = C_{22} (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R), \\ c_{23} = C_{23} (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R); \end{cases}$$

dann ist im Innern von ω_1:

$$16^{a})\quad \begin{aligned} \Phi &= C_1 \frac{R}{r_1} \sin k\,r_1 \\ &+ \frac{R^3}{r_1^2}(\sin k r_1 - k r_1 \cos k r_1)(C_{11}\cos(r_1 x) + C_{12}\cos(r_1 y) + C_{13}\cos(r_1 z)), \end{aligned}$$

im Innern von ω_2:

$$16^{b})\quad \begin{aligned} \Phi &= C_2 \frac{R}{r_2} \sin k\,r_2 \\ &+ \frac{R^3}{r_2^2}(\sin k r_2 - k r_2 \cos k r_2)(C_{21}\cos(r_2 x) + C_{22}\cos(r_2 y) + C_{23}\cos(r_2 z)). \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der normalen Ableitungen von Φ innen und aussen an ω_1 und ω_2 wird uns nun Relationen liefern, durch welche die Verhältnisse der

$$C_1\; C_2\; C_{11}\; C_{12}\; C_{13}\; C_{21}\; C_{22}\; C_{23}$$

und die Konstante k bestimmt werden, wobei wir uns der Tatsache bedienen können, dass k von k_0 nur um Grössen verschieden ist, die um so kleiner werden, je kleiner $\frac{R}{\varrho}$ ist.

§ 4.

Bezeichnen wir mit n die äussere Normale von ω_1 bezw. ω_2, so ist an ω_2 nach 16ᵇ):

$$
17^{a})\quad \left\{
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_i = & -\frac{C_2}{R}\sin k R + k\, C_2 \cos k R \\
& -\frac{2}{R}(\sin kR - kR\cos kR)(C_{21}\cos(r_2 x) + C_{22}\cos(r_2 y) \\
& + C_{23}\cos(r_2 z)) + k^2 R \sin k R\,(C_{21}\cos(r_2 x) \\
& + C_{22}\cos(r_2 y) + C_{23}\cos(r_2 z)).
\end{aligned}
\right.
$$

und nach 14ᵃ)

$$
17^{b})\quad \left\{
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_a = & -\frac{C_2}{R}(1 + \mu R)\sin k R \\
& -\frac{2}{R}(\sin k R - k R \cos k R)(C_{21}\cos(r_2 x) \\
& + C_{22}\cos(r_2 y) + C_{23}\cos(r_2 z)) \\
& + \frac{C_1}{e^{-2\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}(1 + \mu R)\sin k R \\
& - \frac{3\, C_1\, R\, e^{-\mu\varrho}(1 + \mu\varrho)}{\varrho^2\, e^{-\mu R}}\sin k R \cdot \cos(r_2 \varrho);
\end{aligned}
\right.
$$

in der letzten Zeile rechts konnten wir für c bei unseren Vernachlässigungen

$$\frac{C_1 R}{e^{-\mu R}}\sin k R$$

setzen.

Aus der Gleichung:

$$
18^{a})\qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_i = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_a \quad \text{an } \omega_2
$$

ergeben sich die folgenden 4 Relationen:

$$19^a)\quad C_2\,(k\cos k\,R + \mu\sin k\,R) = C_1\,\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{1+\mu\,R}{e^{-2\mu R}}\sin k\,R,$$

$$20^a)\quad \begin{cases} k^2\,C_{21} = -\,3\,C_1\,\dfrac{\cos(\varrho\,x)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{22} = -\,3\,C_1\,\dfrac{\cos(\varrho\,y)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{23} = -\,3\,C_1\,\dfrac{\cos(\varrho\,z)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}; \end{cases}$$

analog folgt aus der Gleichung:

$$18^b)\quad \left|\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_i = \left|\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_a \quad \text{an } w_1,$$

dass:

$$19^b)\quad C_1\,(k\cos k\,R + \mu\sin k\,R) = C_2\,\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\,\frac{1+\mu\,R}{e^{-2\mu R}}\sin k\,R,$$

$$20^b)\quad \begin{cases} k^2\,C_{11} = +\,3\,C_2\,\dfrac{\cos(\varrho\,x)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{12} = +\,3\,C_2\,\dfrac{\cos(\varrho\,y)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{13} = +\,3\,C_2\,\dfrac{\cos(\varrho\,z)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}. \end{cases}$$

Die 8 Gleichungen 19), 20) bestimmen k und die 7 Verhältnisse:

$$C_1 : C_2 : C_{11} : C_{12} : C_{13} : C_{21} : C_{22} : C_{23}.$$

§ 5.

Aus 19ᵃ), 19ᵇ) folgt für k die Gleichung:

$$(k\cos k\,R + \mu\sin k\,R)^2 = \left[\frac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,R)}{\varrho\cdot e^{-\mu R}}\sin k\,R\right]^2$$

oder:

$$21)\quad k\cos k\,R + \mu\sin k\,R = \frac{e^{-\mu\varrho}\,(1+\mu\,R)}{\varrho\,e^{-\mu R}}\sin k\,R.\ ^{1)}$$

---

[1]) Wir wählen das Vorzeichen so, dass C_1 und C_2, die ja nahe gleich sein sollen, gleiches Zeichen haben.

Wir setzen hier:

$$k = k_0 + E \tag{22}$$

ein, bedenken, dass E gegen k_0 klein ist und dass:

$$k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0, \tag{23}$$

und erhalten in zweiter[1]) Annäherung:

$$E\{\cos k_0 R - k_0 R \sin k_0 R + \mu R \cos k_0 R\} = \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu R)}{\varrho \cdot e^{-\mu R}} \cdot \sin k_0 R,$$

oder:

$$E = -\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \cdot \frac{k_0}{\mu + (k^2 + \mu^2) R} \cdot \frac{1 + \mu R}{e^{-\mu R}}. \tag{24}$$

Es wird ferner nach 19ᵃ), 19ᵇ)

$$C_1 = C_2 \equiv C, \tag{25}$$

und hierauf nach 20ᵃ) und 20ᵇ):

$$\tag{26a} \left\{ \begin{aligned} C_{11} &= 3\, C \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\ C_{12} &= 3\, C \frac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\ C_{13} &= 3\, C \frac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2 \cdot e^{-\mu R}}; \end{aligned} \right.$$

$$\tag{26b} \left\{ \begin{aligned} C_{21} &= -3\, C \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\ C_{22} &= -3\, C \frac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\ C_{23} &= -3\, C \frac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}. \end{aligned} \right.$$

Wir können jetzt sogleich die Werte von Φ an ω_1 und ω_2 bilden:

$$\tag{27a} \left\{ \begin{aligned} \Phi = C_1 \sin k R &+ (\sin k R - k R \cos k R)(C_{11} \cos(r_1 x) \\ &+ C_{12} \cos(r_1 y) + C_{13} \cos(r_1 z)), \quad \text{an } \omega_1; \end{aligned} \right.$$

---

[1]) In erster Annäherung ist $E = 0$.

$$27^{b})\begin{cases}\Phi = C_2 \sin k R + (\sin k R - k R \cos k R)(C_{21} \cos (r_2 x) \\ \qquad + C_{22} \cos (r_2 y) + C_{23} \cos (r_2 z)), \quad \text{an } \omega_2.\end{cases}$$

Es wird

$$28^{a})\begin{cases}\Phi = C \sin k R + 3 C \cdot \frac{\cos(\varrho n)}{\varrho^2} \frac{e^{-\mu \varrho}(1+\mu\varrho)(1+\mu R)}{k_0^2 e^{-\mu R}} \sin k_0 R, \\ \qquad \text{an } \omega_1,\end{cases}$$

$$28^{b})\begin{cases}\Phi = C \sin k R - 3 C \frac{\cos(\varrho n)}{\varrho^2} \cdot \frac{e^{-\mu \varrho}(1+\mu\varrho)(1+\mu R)}{k_0^2 e^{-\mu R}} \sin k_0 R, \\ \qquad \text{an } \omega_2.\end{cases}$$

§ 6.

Wir können jetzt leicht mit Hilfe der Formeln des Zusatzes 3 zu IV (S. 570 und 571) die scheinbaren Kraftkomponenten berechnen, welche auf jedes der beiden Teilchen infolge der Grundschwingung wirken.

Es sind nach diesen Formeln die auf das Teilchen 2 wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten:

$$29)\quad \begin{cases} X_2 = \frac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2) \int\limits_{\omega_2} \Phi^2 \cos (n x)\, d\omega, \\ Y_2 = \frac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2) \int\limits_{\omega_2} \Phi^2 \cos (n y)\, d\omega, \\ Z_2 = \frac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2) \int\limits_{\omega_2} \Phi^2 \cos (n z)\, d\omega. \end{cases}$$

Setzen wir hier für Φ den Wert 28^{b}) ein und bedenken, dass:

$$30^{a})\quad \begin{cases} \int\limits_{\omega_2} \cos (n x)\, d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos (n y)\, d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos (n z)\, d\omega = 0; \end{cases}$$

$$30^{b})\quad \begin{cases} \int\limits_{\omega_2} \cos^2(nx)\,d\omega = \int\limits_{\omega_2} \cos^2(ny)\,d\omega = \int\limits_{\omega_2} \cos^2(nz)\,d\omega = \frac{4\pi}{3} R^2, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos(ny)\cos(nz)\,d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos(nz)\cos(nx)\,d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos(nx)\cos(ny)\,d\omega = 0, \end{cases}$$

so folgt:

$$31^{a})\quad \begin{cases} X_2 = -a^2 \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho), \\ Y_2 = -a^2 \frac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho), \\ Z_2 = -a^2 \frac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho), \end{cases}$$

wo a^2 einen positiven Faktor vorstellt, der von der gegenseitigen Lage der beiden Teilchen ganz unabhängig ist; analog sind die auf das erste Teilchen wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten:

$$31^{b})\quad \begin{cases} X_1 = a^2 \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho), \\ Y_1 = a^2 \frac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho), \\ Z_1 = a^2 \frac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho); \end{cases}$$

ϱ bedeutet stets die Entfernung und Richtung:

Zentrum der Kugel 1 $\longrightarrow$ Zentrum der Kugel 2.

V. Zwei schwach kompressible Teilchen mit der Zentraldistanz ϱ üben infolge ihrer universellen Grundschwingung aufeinander eine anziehende Kraft:

$$32)\quad P = a^2 \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{\varrho^2}$$

aus, wenn das Zwischenmedium derart mit Absorption begabt ist, dass das Geschwindigkeitspotential φ des-

selben nicht der Laplaceschen Gleichung, sondern der Differentialgleichung:

33) $$\Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0$$

genügt. Dabei ist α^2 eine positive, von der gegenseitigen Lage der beiden Teilchen unabhängige Konstante, und es werden rechts in 32) Glieder vernachlässigt, welche gegen das erste Glied von der Ordnung $\frac{\text{Radius der Teilchen}}{\varrho}$ klein sind.

Denken wir uns 2 Gruppen von Teilchen vom Radius R, von denen die eine n_1, die andere n_2 Teilchen enthält, so dass:

$$n_1 : n_2 = m_1 : m_2,$$

wenn m_1 und m_2 die Massen der beiden Gruppen bezeichnen, so ist [entsprechend der Formel 32), die man ohne Schwierigkeit für die Wechselwirkung zwischen je zwei Teilchen eines aus beliebig vielen Teilchen zusammengesetzten Systems erhält, wenn nur der Radius R gegen die Zentraldistanzen klein ist] die Anziehungskraft zwischen den beiden Gruppen

34) $$P_{12} = \beta^2 n_1 n_2 \frac{e^{-\mu\varrho}(1 + \mu\varrho)}{\varrho^2},$$

wo β^2 eine von der gegenseitigen Lage der Teilchen unabhängige positive Konstante ist und ϱ den Abstand der beiden Gruppen bezeichnet, unter der Voraussetzung, dass die Distanzen innerhalb der einzelnen Gruppen gegen ϱ klein sind.

Da nun schliesslich:

35) $$m_1 : m_2 = n_1 : n_2,$$

so folgt aus 34):

36) $$P_{12} = G\, m_1 m_2 \frac{e^{-\mu\varrho}(1 + \mu\varrho)}{\varrho^2},$$

wo G eine positive, von der gegenseitigen Lage der Teilchen unabhängige positive Konstante vorstellt.

Die Formel 36) stellt das erweiterte Gravitationsgesetz dar, welches ich durch diese Untersuchungen auf eine mechanische Grundlage zurückzuführen versucht habe.

Schlussbemerkung.

Die Theorie der Gravitation, welche sich auf die Theorie der universellen Schwingungen stützt, wurde von mir ursprünglich unter der einfachst möglichen Annahme ausgearbeitet, dass sich das Zwischenmedium, welches die Wirkungen von einer Masse auf die andere vermittelt, wenigstens in bezug auf rasche Schwingungsbewegungen genau so verhält, wie eine ideale, inkompressible Flüssigkeit, d. h. dass das Geschwindigkeitspotential einer universellen Schwingung in dem Zwischenmedium der Gleichung:

37) $$\Delta \varphi = 0$$

genügt. Diese Annahme führt zu dem Gravitationsgesetz in der Newton'schen Form, zu einer Anziehungskraft zwischen zwei Massen $m_1\, m_2$ in der Entfernung r:

38) $$K = -f\, m_1\, m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wo f eine positive Konstante vorstellt.

In dieser Abhandlung haben wir zwar auch noch angenommen, dass das Zwischenmedium den hydrodynamischen Gleichungen folgt, dass aber eine gewisse Absorptionsfähigkeit des Zwischenmediums vorhanden ist, infolge deren das Geschwindigkeitspotential der universellen Schwingung nicht der Laplace'schen, sondern der folgenden Differentialgleichung zu genügen hat:

39) $$\Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0,$$

wo μ^2 eine positive Konstante vorstellt. Diese allgemeinere Annahme führte zu einem verallgemeinerten Gravitationsgesetz, zu einer Anziehungskraft zwischen zwei Massen $m_1\, m_2$ in der Entfernung r:

40) $$K = -f\, m_1\, m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right),$$

wo

41) $$\mu = \sqrt{\mu^{2\prime}}$$

zu setzen ist.

Es bedarf kaum des Hinweises, dass auch bei dieser zweiten allgemeineren Annahme nur von einer mathematischen Abstraktion die Rede sein kann, welche in der Gleichung

$$\Delta\varphi - \mu^2\varphi = 0$$

ihren analytischen Ausdruck findet.

Es erhebt sich die Frage: Wenn sich das Zwischenmedium etwa auch, wie ein schwach kompressibles Medium, verhalten würde, ähnlich wie die eingebetteten Teilchen, nur viel schwächer kompressibel, wie wird sich das Gravitationsgesetz in diesem Falle abändern? Wir wollen hier zunächst bemerken, dass in diesem Falle die Ausschliessung jeglicher Absorption des Zwischenmediums für die universellen Schwingungen zu absurden Folgerungen führen würde.

Das Geschwindigkeitspotential einer universellen Schwingung müsste in diesem Falle im Zwischenmedium der Gleichung:

42) $$\Delta\varphi + K^2\varphi = 0,$$

in den eingebetteten Teilchen der Gleichung:

43) $$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$$

genügen, wo K^2 eine gegen k^2 kleine Konstante vorstellt und die kleine Zahl $\frac{K^2}{k^2}$ als bekannt vorausgesetzt wird.

In dem einfachsten Falle der Grundschwingung eines kugelförmigen Teilchens muss dann φ von der Form sein:

44) $$\begin{cases} \varphi = a \sin\frac{t}{T}2\pi\cdot\frac{\sin kr}{r} & \text{in dem Teilchen,} \\ \varphi = \sin\frac{t}{T}2\pi\left[\beta\frac{\cos Kr}{r} + \gamma\frac{\sin Kr}{r}\right] & \text{ausserhalb,} \end{cases}$$

und wie immer β und γ sich bestimmen mögen, in jedem Falle wird für

$$K \neq 0$$

die lebendige Kraft im Aussenraume:

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_a \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau$$

unendlich; genau dasselbe gilt für jede beliebige Oberschwingung.

Universelle Schwingungen sind nur möglich, wenn das Zwischenmedium entweder ideal inkompressibel, oder kompressibel und absorbierend angenommen wird.

Der allgemeinste Fall der gleichzeitigen Kompressibilität und Absorptionsfähigkeit findet darin seinen analytischen Ausdruck, dass das Geschwindigkeitspotential φ einer Differentialgleichung von der Form genügt:

45) $$\Delta \varphi = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Wenn φ das Geschwindigkeitspotential einer universellen Schwingung sein soll, muss:

46) $$\varphi = \Phi_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + \Phi_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

sein, wo T eine ausserordentlich kleine Zeitdauer vorstellt, und Φ_1 Φ_2 Funktionen von x, y, z, t, deren Ableitungen nach t nicht von der Ordnung $\frac{1}{T}$ gross sind. In dem einfachsten Falle der Grundschwingung eines einzigen kugelförmigen Teilchens ergibt sich dann durch bekannte Rechnungen,[1]) dass φ im Aussenraume von der Form sein muss:

47) $$\varphi = c \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi - Kr + \delta\right),$$

---

[1]) Man vgl. z. B. Riemann-Weber, Die part. Dffgl. d. math. Phys. Braunschweig 1901, 2. Bd., p. 312 und 322 ff.

wo c und δ beliebige Konstanten vorstellen nnd μ, K den Gleichungen genügen:[1])

$$48)\quad \begin{cases} \mu^2 - K^2 = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha, \\ 2\mu K = \frac{2\pi}{T}\beta, \end{cases}$$

so dass:

$$49)\quad \begin{cases} \mu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha\left\{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - 1\right\}, \\ K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha\left\{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} + 1\right\}. \end{cases}$$

Damit die äussere lebendige Kraft endlich sei, muss μ positiv, also:

$$50)\quad \mu = \sqrt{\mu^2}$$

sein, und — da β stets positiv ist — auch:

$$51)\quad K = \sqrt{K^2}$$

wegen der zweiten Gleichung 48).

μ und K müssen ausserordentlich klein sein, so, dass, wenn z. B. ϱ eine Entfernung innerhalb des Sonnensystems vorstellt, auch

$$\mu\varrho \text{ und } K\varrho$$

noch ausserordentlich kleine Grössen darstellen.

Wie nun dem Geschwindigkeitspotentiale

---

[1]) Denn es ist:

$$\Delta\varphi = c\frac{e^{-\mu r}}{r}\left\{(\mu^2 - K^2)\cos\left(\frac{t}{T}2\pi - kr + \delta\right) - 2\mu K \sin\left(\frac{t}{T}2\pi - kr + \delta\right)\right\},$$

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha\cdot c\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\left(\frac{t}{T}2\pi - kr + \delta\right),$$

$$\beta\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\cdot\beta\cdot c\frac{e^{-\mu r}}{r}\sin\left(\frac{t}{T}2\pi - kr + \delta\right).$$

$$\frac{c}{r}\cos\left(\frac{t}{T}+\delta\right)2\pi$$

eines kugelförmigen Teilchens die Anziehungskraft:

$$-f\,m_1\,m_2\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

dem Geschwindigkeitspotentiale

$$c\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\left(\frac{t}{T}+\delta\right)2\pi$$

eines kugelförmigen Teilchens die Anziehungskraft:

$$-f\,m_1\,m_2\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\right)$$

zwischen 2 Teilchen $m_1\,m_2$ in der Entfernung ϱ entspricht, so ergibt eine völlig analoge Betrachtung, dass dem Geschwindigkeitspotentiale

$$c\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\left(\frac{t}{T}2\pi-Kr+\delta\right)$$

eines kugelförmigen Teilchens die Anziehungskraft entspricht:

$$52)\quad G_0=-\,m_1\,m_2\frac{\partial}{\partial\varrho}\left\{f_1\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\cos K\varrho+f_2\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\sin K\varrho\right\},$$

wo f_1 und f_2 gewisse universelle Konstanten (im besonderen $f_1>0$) vorstellen.

Die Formel 52) stellt das allgemeinste Gravitationsgesetz dar, wenn wir die Theorie der universellen Schwingungen zu grunde legen und das Zwischenmedium zugleich sehr schwach kompressibel und absorbierend voraussetzen.

Freilich ist noch zu bedenken, dass wir dabei Glieder vernachlässigen, welche gegen G_0 von der Ordnung $\frac{R}{\varrho}$

$$\left(\frac{\text{Radien der Teilchen}}{\text{Entfernungen der Teilchen}}\right)$$

klein sind.

Die wirkliche Anziehungskraft ist:

53) $$G = G_0 + G_1 + G_2 + \cdots,$$

wo $G_1\, G_2 \ldots$ gegen G_0 von der Ordnung $\frac{R}{\varrho}, \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \ldots$ klein sind. Wenn wir eine weitere Annäherung, etwa durch Hinzunahme von G_1, zu erreichen wünschen, können wir, solange $\mu\,\varrho$ und $K\varrho$ noch kleine Grössen sind, für die Berechnung von G_1 grade so verfahren, als ob das Zwischenmedium eine ideale Flüssigkeit wäre. Ich gedenke, auf die Berechnung von G_1 auf Grundlage der Theorie der universellen Schwingungen bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Das Rückwärtseinschneiden im Raum.

Von S. Finsterwalder und W. Scheufele.

(Eingelaufen 7. November.)

Zu den in der geodätischen Praxis am häufigsten gelösten Aufgaben gehört zweifellos das nach Pothenot (1692) benannte und auf Willebrod Snellius (1617) zurückgehende Problem des Rückwärtseinschneidens. Dasselbe ist ein Problem der ebenen Geometrie, welches sich folgendermassen formulieren lässt: In der Ebene sind eine Anzahl (ein Haufen) von n Punkten (Fixpunkten) gegeben; von einem weiteren Punkt (Standpunkt) sind Strahlen nach den Fixpunkten gezogen, und das von ihnen gebildete Strahlenbüschel ist durch Messung der Winkel der Strahlen gegeneinander festgelegt. Es soll die Lage des Standpunktes ermittelt werden. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt in zwei Teilen. Da drei Fixpunkte P und das Büschel der drei zugehörigen Strahlen vom Standpunkt aus im allgemeinen hinreichen, um den Standpunkt festzulegen, so wird zunächst aus drei passend gewählten Fixpunkten und den zugehörigen Strahlen des Büschels eine Lage des Standpunkts (Näherungslage) bestimmt. Ergänzt man das Büschel der drei Strahlen durch die übrigen Strahlen, so werden dieselben infolge der unvermeidlichen Messungsfehler nicht genau durch die entsprechenden Fixpunkte hindurchgehen und es entsteht nun die Aufgabe, durch kleine Verrückung des Standpunktes und Veränderung des Strahlenbüschels ein genaues Einpassen des letzteren in den Haufen der Fixpunkte herbeizuführen. Dabei verfährt man im Anschluss an Gauss (1823) nach dem

Grundsatz, dass die Summe der Quadrate der Richtungsänderungen der Strahlen des Büschels, oder auch der Änderungen der Winkel, die sie untereinander einschliessen, zu einem Minimum gemacht wird. Es ist dabei offenbar vorausgesetzt, dass die Lage der Fixpunkte gegeneinander ungleich genauer ist, als die Messung der Winkel. Würde man, was in der Tat manchen Verhältnissen in der Praxis mehr Rechnung trägt, die gemessenen Winkel als unbedingt richtig, dagegen die Lage der Fixpunkte gegeneinander als weniger genau annehmen, so wäre offenbar eine Ausgleichung vorzuziehen, bei welcher die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den Strahlen des Büschels ein Minimum wird, wobei das Strahlenbüschel seine Form ungeändert beibehält. In diesem Falle sind bei der Ausgleichung drei Grössen zu bestimmen, nämlich die Koordinatenverschiebungen des Standpunktes und der Winkel, um welchen das Strahlenbüschel gedreht wird. Beide Methoden der Ausgleichung lassen sich als Sonderfälle einer dritten auffassen, bei welcher an dem Grundsatz festgehalten wird, dass die Koordinatenverschiebungen des Standpunktes und die Drehung des Strahlenbüschels so erfolgen, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den Strahlen, jeweils multipliziert mit passenden Gewichten, zu einem Minimum gemacht wird. Wählt man als Gewichte die Quadrate der reziproken Werte der Strahlenlängen, so kommt man auf das erste Ausgleichungsprinzip; wählt man sie gleich 1, so folgt das zweite.

Wie ausgedehnt auch die Literatur über das so formulierte ebene Problem des Rückwärtseinschneidens ist, so findet man kaum einen Versuch, dasselbe auf den Raum zu erweitern, wie naheliegend ein solcher Gedanke vom geometrischen Standpunkt aus erscheinen mag. Es hat das darin seinen Grund, dass eine solche räumliche Erweiterung der praktischen Verwendbarkeit, welche das ebene Problem so sehr auszeichnet, zu entbehren scheint. Durch die Einführung der Photographie in die Geodäsie wird aber auch das räumliche Problem einer gewissen Anwendung fähig, wie in den nachfolgenden Zeilen auseinandergesetzt werden soll. Das räumliche Problem möge dabei

folgendermassen formuliert werden: Es ist eine Anzahl (ein Haufen) von Fixpunkten im Raum gegeben. Das Bündel von Strahlen, welche von einem Standpunkt aus nach den Fixpunkten führen, sei durch Messung bekannt. Man soll die Lage des Standpunktes finden. Die Photographie setzt uns nämlich in den Stand, von einem Punkt aus ein Bündel von Strahlen auf einmal festzulegen; dazu ist nur nötig, dass man die sogenannte innere Orientierung[1]) der betreffenden Photographie kennt. Darunter versteht man die relative Lage des perspektivischen Zentrums gegenüber der Photographie, welche am einfachsten durch die Bildweite, nämlich die Entfernung jenes Zentrums von der Ebene der Photographie, und den Hauptpunkt oder den Fusspunkt des Lotes von jenem Zentrum auf die Ebene der Photographie gegeben wird.[2]) Kurz gefasst kann man das Problem so ausdrücken: Von einem bekannten Objekt ist eine Photographie mit innerer Orientierung gegeben; es soll der Standpunkt, von dem aus die Photographie aufgenommen wurde, wieder gefunden werden. Auch diese Aufgabe löst man am besten in zwei Teilen. Es genügen hier wieder drei Fixpunkte und das aus den drei zugehörigen Strahlen gebildete Bündel zur Auffindung des Standpunktes. Ist eine grössere Zahl von Fixpunkten und Strahlen gegeben, so wird man zuerst aus drei passend gewählten Punkten und Strahlen eine Näherungslage des Standpunktes suchen und diesen sowie die Strahlen des Bündels so verändern, dass ein möglichst genaues Einpassen des Strahlenbündels in den Haufen der Fixpunkte erzielt wird. Man wird dabei, entsprechend der vorhin erwähnten Formulierung des ebenen Problems, am besten von dem Grundsatz ausgehen, die Verschiebung des Standpunktes und die Drehung des Strahlenbündels so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den Strahlen des gedrehten Bündels (allenfalls noch multipliziert

---

[1]) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. VI, 2, Seite 8.

[2]) Dieses Lot soll künftighin als die optische Axe des photographischen Apparates bezw. der orientierten Photographie bezeichnet werden.

mit passenden Gewichten) zu einem Minimum wird. Bei der photogrammetrischen Anwendung des Problems werden im allgemeinen die Fehler in der Identifizierung der photographischen Punkte mit den Kartenpunkten erheblich grösser sein als die Messungsfehler auf der Photographie selbst. In diesem Falle wird man die erwähnten Gewichte gleich 1 setzen, und also die Summe der Quadrate der kürzesten Abstände, die im wesentlichen durch die Fehler der Identifizierung bedingt sind, zu einem Minimum machen. Hat man Grund, bei einzelnen Fixpunkten grosse Fehler der Identifizierung zu vermuten, so könnte man diesem Umstand durch Einführung geschätzter Gewichte Rechnung tragen.

Der erste Teil der Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschneidens ist bereits in den geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie[1]) behandelt worden. Die unmittelbare Veranlassung, uns mit dem zweiten Teil, nämlich der systematischen Ausgleichung, zu beschäftigen, gab eine Ballonphotographie aus den Alpen, welche gelegentlich einer wissenschaftlichen Hochfahrt des Münchener Vereins für Luftschiffahrt, die über 7000 m emporführte, von Herrn Professor K. Heinke am 21. Februar 1903 gewonnen wurde. Dieselbe bildet die Grundlage des Rechenbeispieles, welches unsere Ausführungen illustrieren soll. Vorher mögen noch der Vollständigkeit halber die früheren Ausführungen über die Lösung des ersten Teiles der Aufgabe wiederholt werden.

I.

Durch den Hauptpunkt A in der Ebene des photographischen Bildes sollen beliebige zwei zu einander senkrechte Linien als Koordinatenaxen gezogen und nach ihnen die Bilder $P_1' P_2' P_3' \ldots$ der Fixpunkte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ festgelegt werden (Fig. 1). Der zu suchende Standpunkt sei mit O bezeichnet. Das Dreikant

---

[1]) S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Mathematikervereinigung, Bd. VI, 2, pag. 26 ff.

$O P_1 P_2 P_3$ lässt sich aus der Photographie und den inneren Orientierungselementen berechnen. Bezeichnen wir mit (O) das zur Photographie gehörige perspektivische Zentrum, so ist jenes Dreikant dem Dreikant $(O)\, P_1'\, P_2'\, P_3'$ kongruent. Wir bezeichnen zur Abkürzung die Kanten des Tetraeders

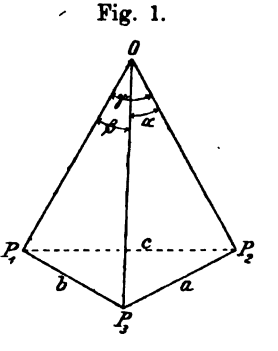
$$P_2 P_3 = a,\ P_3 P_1 = b,\ P_1 P_2 = c,\ P_1 O = l,\ P_2 O = m,\ P_3 O = n,$$

ferner die Winkel

$$P_1 O P_2 = P_1'(O) P_2' = \gamma,\ P_2 O P_3 = P_2'(O) P_3' = \alpha,\ P_3 O P_1 = P_3'(O) P_1' = \beta;$$

dann gelten die Gleichungen:

Fig. 1.



$$1)\quad \begin{cases} a^2 = m^2 + n^2 - 2\,m\,n \cos\alpha \\ b^2 = n^2 + l^2 - 2\,n\,l\, \cos\beta \\ c^2 = l^2 + m^2 - 2\,l\,m \cos\gamma, \end{cases}$$

aus welchen man das Verhältnis $l : m : n$ folgendermassen berechnen kann:

Durch Kombination der beiden ersten Gleichungen bezw. der ersten und dritten Gleichung erhält man:

$$\left.\begin{aligned} m^2 b^2 + n^2(b^2 - a^2) - l^2 a^2 - 2mnb^2 \cos\alpha + 2n\,la^2 \cos\beta = 0 \\ n^2\, c^2 + m^2(c^2 - a^2) - l^2 a^2 - 2mnc^2 \cos\alpha + 2mla^2 \cos\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

welche man nach Division mit l^2 als zwei quadratische Gleichungen für die Verhältnisse $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$ auffassen kann. Anstatt nun durch Elimination eines der beiden Verhältnisse eine Gleichung 4. Grades für das andere Verhältnis zu bilden, kann man diese beiden Gleichungen auch so mittels eines Faktors λ linear kombinieren, dass das Resultat der Kombination in zwei Linearfaktoren zerfällt. Zu diesem Behufe muss man den Faktor λ so wählen, dass er folgender in Determinantenform geschriebenen Gleichung 3. Grades genügt:

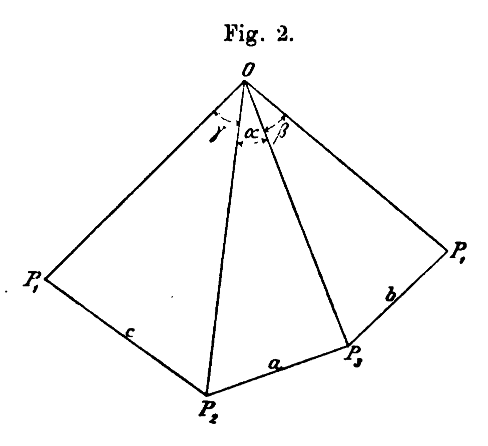
$$\begin{vmatrix} b^2 - \lambda(c^2 - a^2) & (-b^2 + \lambda c^2)\cos\alpha & -\lambda a^2 \cos\gamma \\ (-b^2 + \lambda c^2)\cos\alpha & b^2 - a^2 - \lambda c^2 & a^2\cos\beta \\ -\lambda a^2\cos\gamma & a^2\cos\beta & -a^2(1-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ausgerechnet lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \lambda^3 c^2 (c^2 \sin^2\alpha - a^2 \sin^2\gamma) \\ & + \lambda^2 (a^2 \sin^2\gamma [b^2 - a^2] - c^2 \sin^2\alpha [2b^2 + c^2] + 2a^2c^2[1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma]) \\ & + \lambda (a^2 \sin^2\beta [a^2 - c^2] + b^2 \sin^2\alpha [b^2 + 2c^2] - 2a^2b^2[1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma]) \\ & + b^2 (a^2 \sin^2\beta - b^2 \sin^2\alpha). \end{aligned}$$

Jeder Wurzel λ entspricht eine Kombination der 2 Gleichungen, deren Zerfällung in 2 Linearfaktoren die Auflösung einer quadratischen Gleichung nötig macht. Die Kombination eines jeden der Linearfaktoren mit einer der beiden Gleichungen (2) ergibt die gesuchten Seitenverhältnisse. Das Verfahren ist analog der Berechnung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte mit Hilfe der zerfallenden Kegelschnitte des Büschels, das sie bilden. Bei der Auswahl der Wurzeln ist der Umstand in Betracht zu ziehen, dass man von vornherein über die Reihenfolge der Grössen l, m, n aus der Photographie unterrichtet ist. An Stelle der etwas langwierigen analytischen Lösung wendet man besser folgendes geometrisches Näherungsverfahren an. Man schneidet das Dreikant an einer Kante (l) auf und breitet es in die Ebene aus. In die drei Winkel α, β, γ passt man nun durch Probieren die drei Strecken a, b, c (am einfachsten mit Hilfe eines dreifüssigen Zirkels, dessen Spitzen

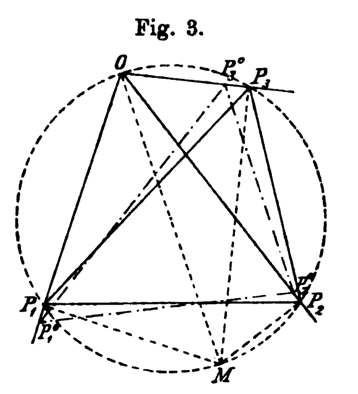
Fig. 2.



man auf die 3 Strecken a, b, c einstellt) so ein, dass die aufgeschnittene Kante auf beiden Seiten gleich lang erscheint. Auf diese Weise erhält man auf jeden Fall einen Näherungswert für die letztere. Man kann dann die ebene Figur mit dem Näherungswert l und den Gegenseiten a, b, c sowie den Winkeln α, β, γ unter Benützung logarithmischer Differenzen durchrechnen und auf diese Weise eine Korrektur für den Näherungswert so ermitteln, dass das Tetraeder beim Zusammenlegen sich schliesst. Die weitere Konstruktion des Grundrisses und Aufrisses des Standpunktes erfolgt nach bekannten Regeln der darstellenden Geometrie, oder, wenn man die Rechnung vorzieht, mittels Auflösung einiger sphärischer Dreiecke.

Bei der Auswahl der 3 Punkte P_1 P_2 P_3, welche zur Auffindung des Näherungsortes von O benützt werden, ist zu bedenken, dass diese Auffindung ähnlich wie beim ebenen Pothenotschen Problem unter Umständen unmöglich wird. Es gibt nämlich als Gegenstück zu dem gefährlichen Kreis durch die drei Punkte beim ebenen Problem auch hier einen geometrischen Ort, bestehend aus einem Kreiszylinder, der den genannten Kreis als Hauptschnitt hat und dessen Punkte durch Rückwärtseinschneiden nach den 3 Fixpunkten nicht bestimmt werden können. Um den gefährlichen Ort in unserem Fall festzulegen, bedienen wir uns kinematischer Vorstellungen. Wir denken uns das Dreikant in das Dreieck eingepasst. Wenn dabei dem Dreieck gegenüber dem Dreikant noch eine unendlich kleine Beweglichkeit zukommt, so liegt die Spitze des Dreikants in dem gefährlichen Ort. Es sei P_1 P_2 P_3 das Dreieck, O die Projektion der Spitze des Dreikants auf die Ebene P_1 P_2 P_3. Wir schneiden nun das Dreikant mit einer zur Projektionsebene P_1 P_2 P_3 unendlich benachbarten Ebene. Es sei P_1^0 P_2^0 P_3^0 die

Fig. 3.



Projektion des Schnittdreieckes. Die Seiten der Projektion können sich nur um ein Unendlichkleines der 2. Ordnung von ihren wahren Längen unterscheiden, sobald der Winkel der beiden Dreiecksebenen unendlich klein von der 1. Ordnung ist. Wenn es also, wie im Fall des gefährlichen Ortes, zwei unendlich benachbarte kongruente Schnittdreiecke gibt, so muss $P_1^0 P_2^0 P_3^0$ bis auf Grössen zweiter Ordnung mit $P_1 P_2 P_3$ kongruent sein. Durch Drehung um eine zur Projektionsebene $P_1 P_2 P_3$ vertikale Axe kann man dann das Dreieck $P_1^0 P_2^0 P_3^0$ immer zur Deckung mit $P_1 P_2 P_3$ bringen. Das zugehörige Momentanzentrum M wird gefunden, indem man in den Punkten $P_1 P_2 P_3$ Lote auf $P_1 O$, $P_2 O$, $P_3 O$ errichtet. Diese drei Lote müssen sich in M schneiden, was nur dann möglich ist, wenn $P_1 P_2 P_3$ auf einem Kreis mit dem Durchmesser $O M$ liegen. Die Spitze des Dreikantes liegt alsdann auf dem geraden Kreiszylinder, der sich über dem Umkreis des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ erhebt.

Denkt man sich zu dem Dreikant $O P_1 P_2 P_3$ noch die Vertikale durch O als vierten Strahl hinzugefügt und dasselbe dann mit dem kongruenten Dreikant $(O) P_1' P_2' P_3'$ zur Deckung gebracht, so wird der vierte Strahl die Bildebene im Punkte N (Nadir, bezw. Zenith[1]) schneiden; dieser Punkt N ist nichts anderes als der Fluchtpunkt der Vertikalen. Seine Koordinaten können durch Auflösung einer Reihe sphärischer Dreiecke ohne Schwierigkeit berechnet werden. In ähnlicher Weise denkt man sich dem Dreikant $(O) P_1' P_2' P_3'$ die optische Axe $(O) A$ hinzugefügt und dann das genannte Dreikant mit dem Dreikant $O P_1 P_2 P_3$ zur Deckung gebracht. Die Lage, welche dabei die optische Axe im Raum annimmt, kann ebenso berechnet und durch Horizontal- und Vertikalwinkel oder auch durch die 3 Richtungscosinus im Raumkoordinatensystem der Fixpunkte festgelegt werden.

---

[1]) Je nachdem das Lot (optische Axe) vom perspektivischen Zentrum zur Bildebene nach unten oder nach oben geneigt ist.

II.

Für den weiteren Verlauf der Rechnung legt man ein neues Koordinatensystem in der Bildebene zu Grunde, dessen Y-Axe in der Richtung NA liegt, und dessen X-Axe durch die Senkrechte hiezu im Punkt A gegeben ist. Auf dieses Koordinatensystem werden nun sämtliche Bildpunkte bezogen. Mit Hilfe dieser neuen Koordinaten und der vorhin im Raum festgelegten Richtung der optischen Axe lassen sich sowohl die Horizontal- und Vertikalwinkel als auch die Richtungscosinus sämtlicher Strahlen nach den Bildpunkten berechnen, oder auch durch Zeichnung ermitteln.

Um die Bedingungen für das möglichste Zusammenstimmen des Strahlenbündels mit dem Haufen der Fixpunkte abzuleiten, bedienen wir uns der Vektorrechnung.[1]) Die Einheitsvektoren auf den Strahlen vom Näherungspunkt O aus nach den Bildpunkten werden mit $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3 \ldots \mathfrak{b}_i$ bezeichnet; ihre Komponenten sind die soeben ermittelten Richtungscosinus $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i$. Die Vektoren, welche von demselben Punkte O nach den Fixpunkten laufen, mögen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \ldots \mathfrak{A}_i$ und ihre Komponenten $X_i\ Y_i\ Z_i$ heissen. Man erteilt nun dem Strahlenbündel der $\mathfrak{b}_i$ durch O eine kleine Drehung, die wir durch den Vektor $\mathfrak{U}$ mit den Komponenten u, v, w ausdrücken; die Vektoren $\mathfrak{b}_i$ gehen dabei über in $\mathfrak{b}_i + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i$. Wir erteilen ferner dem Näherungspunkt O eine kleine Verschiebung $\mathfrak{X}$ mit den Komponenten x, y, z; dadurch gehen die Vektoren $\mathfrak{A}_i$ in $\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}$ über. Das äussere Produkt $[\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times [\mathfrak{b}_i + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]$ stellt einen Vektor dar, dessen Länge dem Abstand des Fixpunktes vom zugehörigen Strahl gleich ist. Multipliziert man denselben auf innere Art mit sich selbst, so bekommt man das Quadrat jenes Abstandes. Wir bilden nun die Summe über die Quadrate aller Abstände und machen dieselbe durch geeignete Wahl von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ zu einem Minimum. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Grössen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ als klein zu gelten haben und ihre Quadrate gegenüber den ersten Potenzen zu vernachlässigen sind.

---

[1]) Bezüglich der Bezeichnung vergleiche man Wilson-Gibbs: Vektoranalysis, Newyork 1901.

$$S = \sum_1^n {}^i ([\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times [\mathfrak{b}_i + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i])^2$$
$$= \sum_1^n {}^i (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i])^2 = \text{Minimo.} \qquad 3)$$

Um die Bedingung dafür zu erhalten, rechnen wir die Veränderung, welche die Summe erleidet, wenn $\mathfrak{X}$ um $d\,\mathfrak{X}$ bezw. $\mathfrak{U}$ um $d\,\mathfrak{U}$ geändert wird.

$$-2 \sum_1^n {}^i (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]) \cdot d\,\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i$$
$$= -2\, d\,\mathfrak{X} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]$$
$$= -2\, d\,\mathfrak{X} \cdot (\Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] - \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] + \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]])$$

Ebenso:

$$2 \sum_1^n {}^i (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]) \cdot \mathfrak{A}_i \times [d\,\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]$$
$$= 2\, \Sigma (d\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i) \cdot (-\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] - \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]])$$
$$= 2\, d\,\mathfrak{U} \cdot (\Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i]] + \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i]]$$
$$- \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]]).$$

Da ein inneres Produkt nur dann für alle Werte des einen Faktors (hier $d\,\mathfrak{X}$ bezw. $d\,\mathfrak{U}$) verschwindet, wenn der andere Faktor Null ist, so ergeben sich die nachstehenden zwei Bedingungsgleichungen 4 und 5 für die Vektoren $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$. In denselben sind bereits folgende Vereinfachungen durch Weglassung von Gliedern 2. Ordnung angebracht, die durch den Umstand, dass die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ sich nur sehr wenig unterscheiden, gerechtigt sind: $\mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{b}_i = A_i$ und $\mathfrak{A}_i = A_i\, \mathfrak{b}_i$. Dabei bedeutet $A_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}$ die Länge des Vektors $\mathfrak{A}_i$. Im Produkt $\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i$ darf dagegen $\mathfrak{A}_i$ nicht durch $A_i\, \mathfrak{b}_i$ ersetzt werden, da dies Vernachlässigung von Grössen 1. Ordnung zur Folge hätte.[1])

---

[1]) Bei diesen Umformungen werden wiederholt die Formeln benützt:
$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$; $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} = 0$;
$\mathfrak{A} \times [\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}] = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}\, \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\, \mathfrak{C}$.

$$\Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] - \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] + \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]$$
$$= \Sigma \mathfrak{A}_i - \Sigma \mathfrak{b}_i \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{b}_i - n\mathfrak{X} + \Sigma \mathfrak{b}_i \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i = 0. \qquad 4)$$
$$-\Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i]] + \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i]] - \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]]$$
$$= + \Sigma A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]]$$
$$= \Sigma A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \Sigma A_i \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{b}_i \times [A_i \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]$$
$$= \Sigma A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \Sigma A_i \mathfrak{b}_i - \mathfrak{U} \Sigma A_i^2 + \Sigma A_i^2 \mathfrak{b}_i \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{b}_i = 0. \qquad 5)$$

Geht man von den Vektoren zu den Koordinaten über, so entstehen aus jeder der zwei Vektorengleichungen 4 und 5 drei Koordinatengleichungen, die nachstehendes System zur Bestimmung der Werte von u, v, w, x, y, z liefern:[1])

$$\left.\begin{array}{l}
+u\Sigma A^2(1-\alpha^2) - v\Sigma A^2\alpha\beta - w\Sigma A^2\alpha\gamma \quad - y\Sigma A\gamma + z\Sigma A\beta + \sigma_1 = 0 \\
-u\Sigma A^2\alpha\beta + v\Sigma A^2(1-\beta^2) - w\Sigma A^2\beta\gamma + x\Sigma A\gamma \quad - z\Sigma A\alpha + \sigma_2 = 0 \\
-u\Sigma A^2\alpha\gamma - v\Sigma A^2\beta\gamma + w\Sigma A^2(1-\gamma^2) - x\Sigma A\beta + y\Sigma A\alpha \quad + \sigma_3 = 0 \\
\qquad + v\Sigma A\gamma - w\Sigma A\beta + x(n-\Sigma\alpha^2) - y\Sigma\alpha\beta - z\Sigma\alpha\gamma + \sigma_4 = 0 \\
-u\Sigma A\gamma \qquad + w\Sigma A\alpha - x\Sigma\alpha\beta + y(n-\Sigma\beta^2) - z\Sigma\beta\gamma + \sigma_5 = 0 \\
+u\Sigma A\beta - v\Sigma A\alpha \qquad - x\Sigma\alpha\gamma - y\Sigma\beta\gamma + z(n-\Sigma\gamma^2) + \sigma_6 = 0
\end{array}\right\} 6)$$

wobei:

$$\left.\begin{array}{ll}
\sigma_1 = \Sigma A(Y\gamma - Z\beta) & \sigma_4 = -\Sigma X + \Sigma\alpha(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \\
\sigma_2 = \Sigma A(Z\alpha - X\gamma) & \sigma_5 = -\Sigma Y + \Sigma\beta(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \\
\sigma_3 = \Sigma A(X\beta - Y\alpha) & \sigma_6 = -\Sigma Z + \Sigma\gamma(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)
\end{array}\right\} 7)$$

Auch das gesuchte Minimum der Summe der Quadrate der Abstände lässt sich leicht ausdrücken:[2])

$$S = \Sigma(\mathfrak{A}\times\mathfrak{b} - \mathfrak{X}\times\mathfrak{b} + \mathfrak{A}\times[\mathfrak{U}\times\mathfrak{b}])^2 = \Sigma(\mathfrak{A}\times\mathfrak{b} - \mathfrak{X}\times\mathfrak{b} + A\mathfrak{U} - \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{U}\,\mathfrak{b})^2$$
$$= \Sigma\{(\mathfrak{A}\times\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{X}\times\mathfrak{b})^2 + A^2\mathfrak{U}^2 + (\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{U})^2 - 2(\mathfrak{A}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{X}\times\mathfrak{b}) + 2A(\mathfrak{A}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{U}$$
$$- 2A\mathfrak{X}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{U} - 2A\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{A}\}$$
$$= \quad (n\mathfrak{X} - \Sigma\mathfrak{b}\,\mathfrak{X}\cdot\mathfrak{b} - \Sigma A\,\mathfrak{U}\times\mathfrak{b} - \Sigma\mathfrak{A} + \Sigma\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{X}$$
$$+ (-\Sigma A\mathfrak{X}\times\mathfrak{b} - \Sigma A\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{U} + \mathfrak{U}\Sigma A^2 + \Sigma A\mathfrak{A}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{U}$$
$$+ \Sigma(\mathfrak{A}\times\mathfrak{b})^2 - \Sigma\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X} + \Sigma\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{X}\cdot\mathfrak{b} + \Sigma A\,\mathfrak{U}\cdot\mathfrak{A}\times\mathfrak{b}.$$

---

[1]) Zur Vereinfachung der Schreibweise ist der Index i im folgenden weggelassen.

[2]) Man beachte, dass $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\times\mathfrak{A} = 0$.

Die eingeklammerten Ausdrücke in den beiden ersten Zeilen sind aber infolge der Gleichungen 4 und 5 Null. Der übrig bleibende Teil lautet dann, in Koordinaten geschrieben:

$$S = u\,\sigma_1 + v\,\sigma_2 + w\,\sigma_3 + x\,\sigma_4 + y\,\sigma_5 + z\,\sigma_6 + S_1, \qquad 8)$$

wo $S_1 = \Sigma(\mathfrak{A} \times \mathfrak{b})^2$ die Summe der Quadrate der Abstände vor der Ausgleichung bedeutet.

Die 6 Gleichungen haben die Form von Normalgleichungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.[1]) Dass sie wirklich Normalgleichungen sind, was bei der Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung nicht unbedingt der Fall sein muss, lässt sich durch eine andere Ableitung desselben Gleichungssystems zeigen, welche sich den üblichen Methoden der Ausgleichsrechnung mehr anschliesst: Der kürzeste Abstand $\mathfrak{F}_i$ des Punktes P_i vom zugehörigen Strahl in der korrigierten Lage lässt sich bis auf Grössen 2. Ordnung als Differenz zweier Vektoren ausdrücken:

$$\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X} - \sqrt{(\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X})^2}\,(\mathfrak{b}_i + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i) = \mathfrak{F}_i. \qquad 9)$$

Entwickelt man die Wurzel und behält man die Glieder niedrigster Ordnung bei, so ergibt sich die Gleichung:

$$\mathfrak{A}_i - A_i\,\mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} + \frac{\mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{X}}{A_i}\,\mathfrak{b}_i - \mathfrak{U} \times \mathfrak{A}_i = \mathfrak{F}_i. \qquad 10)$$

---

[1]) Verzichtet man auf die Herstellung von Normalgleichungen, so lassen sich im Gleichungssystem 6 die Summen $\sigma_1 \ldots \sigma_6$ mit Benützung der Abkürzungen $A\,\Delta\,\alpha = X - A\,\alpha$; $A\,\Delta\,\beta = Y - A\,\beta$; $A\,\Delta\,\gamma = Z - A\,\gamma$ und unter Vernachlässigung weiterer Grössen 2. Ordnung folgerichtiger schreiben:

$$\sigma_1 = \Sigma A^2 (\gamma\,\Delta\,\beta - \beta\,\Delta\,\gamma) \qquad \sigma_4 = -\Sigma A\,\Delta\,\alpha$$
$$\sigma_2 = \Sigma A^2 (\alpha\,\Delta\,\gamma - \gamma\,\Delta\,\alpha) \qquad \sigma_5 = -\Sigma A\,\Delta\,\beta$$
$$\sigma_3 = \Sigma A^2 (\beta\,\Delta\,\alpha - \alpha\,\Delta\,\beta) \qquad \sigma_6 = -\Sigma A\,\Delta\,\gamma$$

Die Grössen $\sigma_4\,\sigma_5\,\sigma_6$ können als Komponenten der geometrischen Summe der kürzesten Abstände vor der Ausgleichung gedeutet werden. Ebenso $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ als Komponenten der Momentensumme jener Abstände in Bezug auf den Näherungspunkt. Ihr Verschwinden sagt aus, dass diese Abstände ein Gleichgewichtssystem bilden. In diesem Falle verschwinden auch $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{X}$ und das Minimum der Quadratsumme ist schon vor der Ausgleichung vorhanden.

Dieselbe kann als Repräsentant von drei Fehlergleichungen aufgefasst werden, die man bei Zerfällen der Gleichung nach den 3 Koordinatenrichtungen erhält:

$$\left.\begin{array}{l} +vA\gamma-wA\beta+x(1-\alpha^2)-y\alpha\beta-z\alpha\gamma-X+A\alpha=f_x \\ -uA\gamma \qquad +wA\alpha-x\alpha\beta+y(1-\beta^2)-z\beta\gamma-Y+A\beta=f_y \\ +uA\beta-vA\alpha \qquad -x\alpha\gamma-y\beta\gamma+z(1-\gamma^2)-Z+A\gamma=f_z \end{array}\right\} 11)$$

Bildet man aus den 3 n Fehlergleichungen in der üblichen Weise die Normalgleichungen, so kommt man unmittelbar zum Gleichungssystem 6. Man kann daher das System ohne weiteres nach dem in der Ausgleichsrechnung üblichen Verfahren auflösen.

III.

Wir wollen uns noch mit zwei Sonderfällen der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens im Raum befassen. Der erste ist dadurch ausgezeichnet, dass die Orientierung des Strahlenbündels gegen die Vertikale bekannt ist, oder wie man sich kurz ausdrücken könnte, dass die Vertikale ein bekannter Strahl des Bündels ist. Das wird der Fall sein, wenn die Photographie mit einem photogrammetrischen Apparat, der den Horizont auf dem Bild festzulegen gestattet, aufgenommen wurde. In diesem Fall ist der Standpunkt bereits durch zwei Fixpunkte und die zugehörigen Strahlen bestimmt.[1]) Man hat hier nur mehr eine Gleichung zweiten Grades zu lösen, die man durch folgende einfache Betrachtung erhält: Man kann dem Dreikant, das durch die Vertikale im Standpunkt O und die Strahlen nach den beiden Fixpunkten P_1 und P_2 gebildet wird, die beiden Höhenwinkel β_1 und β_2 (Seiten des Dreikants) und den Horizontalwinkel α (Winkel des Dreikants), welche die Sichten vom Standpunkt O nach den Punkten P_1 und P_2 einschliessen, entnehmen. Ist z_1 die Höhe von P_1 über der Projektionsebene, z_2 die von P_2, und z die gesuchte Höhe des

[1]) Liegen mehr Fixpunkte und Strahlen vor, so kann man statt der im Folgenden gegebenen Methode die des ebenen Rückwärtseinschneidens mit Vorteil benützen.

Standpunktes O, sind ferner r_1 und r_2 die Entfernungen des Grundrisses O_0[1]) von den Punkten P_{10} und P_{20} und a die Länge $P_{10}\,P_{20}$, so wird:

$$a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\alpha; \quad r_1 = (z - z_1)\operatorname{cotg}\beta_1; \quad r_2 = (z - z_2)\operatorname{cotg}\beta_2. \qquad 12)$$

Setzt man in die erste Gleichung die Werte von r_1 und r_2 ein, so erhält man folgende quadratische Gleichung für die Höhe z:

$$\begin{aligned} a^2 = (z - z_1)^2 \operatorname{cotg}^2 \beta_1 + (z - z_2)^2 \operatorname{cotg}^2 \beta_2 \\ - 2 (z - z_1)(z - z_2) \operatorname{cotg} \beta_1 \operatorname{cotg} \beta_2 \cos \alpha. \end{aligned} \qquad 13)$$

Ist z ermittelt, so folgen die übrigen Stücke mittels einfacher Rechnung. Der gefährliche Ort wird hier diejenige Ebene durch die Basis $P_1\,P_2$, welche senkrecht auf einer durch sie und die ausgezeichnete Richtung gelegten Ebene steht.

Die Ausgleichung, die bei Bestimmung des Standpunktes aus einer überschüssigen Zahl von Fixpunkten und Strahlen notwendig wird, vereinfacht sich auch in diesem Fall erheblich. Im Gleichungssystem 6 werden die Grössen u und v zu Null, und die erste und zweite Gleichung fällt fort, da der Vektor $\mathfrak{U}$ nur in der Z-Richtung veränderlich ist und daher aus der Erfüllung der Gleichung 5) nur eine gewöhnliche Gleichung, die sich auf die Z-Komponente bezieht, gefolgert werden kann. Man hat also hier nur die folgenden 4 Gleichungen aufzulösen:

$$\left.\begin{aligned} w \Sigma A^2 (1 - \gamma^2) - x \Sigma A \beta + y \Sigma A \alpha \qquad\qquad + \sigma_3 = 0 \\ - w \Sigma A \beta + x (n - \Sigma \alpha^2) - y \Sigma \alpha \beta - z \Sigma \alpha \gamma + \sigma_4 = 0 \\ w \Sigma A \alpha - x \Sigma \alpha \beta + y (n - \Sigma \beta^2) - z \Sigma \beta \gamma + \sigma_5 = 0 \\ - x \Sigma \alpha \gamma - y \Sigma \beta \gamma + z (n - \Sigma \gamma^2) + \sigma_6 = 0 \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Ein zweiter Sonderfall von einfacherer Art entsteht dann, wenn die Orientierung des Strahlenbündels vollständig bekannt ist, wie es etwa bei einem mit einer Bussole ausgerüsteten photogrammetrischen Apparat der Fall ist. Die Art der Be-

---

[1]) Der angehängte Index 0 kennzeichnet den Grundriss des betreffenden Raumpunktes.

rechnung einer Näherungslage des Standpunktes aus 2 Fixpunkten liegt hier auf der Hand. Die Formeln für die Ausgleichung bei überschüssigen Fixpunkten und Strahlen, die durch Nullsetzen von w in den Gleichungen 6 entstehen, lassen in diesem Fall eine einfache geometrische Deutung für den Korrektionsvektor $\mathfrak{X}$ zu. Da die Drehung $\mathfrak{U}$ hier gänzlich wegfällt, ist in diesem Fall der Ausdruck $\Sigma([\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times \mathfrak{b}_i)^2$ zu einem Minimum zu machen. Hieraus folgt die Bedingung:

$$2\, d\mathfrak{X} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [[\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times \mathfrak{b}_i] = 0$$

oder:

$$\Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [[\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times \mathfrak{b}_i] = 0 \qquad 15)$$

$$\Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] = \Sigma\, \mathfrak{A}_i - \Sigma\, A_i\, \mathfrak{b}_i = \mathfrak{M} \qquad 16)$$

Wir betrachten nun die Fläche 2. Ordnung von der Gleichung:

$$\Sigma\, (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i)^2 = \mathfrak{M}^2. \qquad 17)$$

Dieselbe ist das Trägheitsellipsoid eines Massensystems, welches man erhält, wenn man die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{b}_i$ mit den Massen 1 versieht. Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich:

$$d\mathfrak{X} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = 0 \qquad 18)$$

und hieraus die Gleichung der Tangentialebene

$$(\mathfrak{Y} - \mathfrak{X}) \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = 0, \qquad 19)$$

wobei $\mathfrak{Y}$ den Vektor nach einem beliebigen Punkt der Tangentialebene, $\mathfrak{X}$ den nach dem Berührpunkt der Tangentialebene bedeutet. Die Gleichung kann man noch folgendermassen umformen:

$$\mathfrak{Y} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \mathfrak{X} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \Sigma\, (\mathfrak{b}_i \times \mathfrak{X})^2 = \mathfrak{M}^2.$$

Für den gesuchten Vektor $\mathfrak{X}$ ist:

$$\Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \mathfrak{M}.$$

Auf der Tangentialebene im Endpunkt von $\mathfrak{X}$ liegt daher der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{Y} = \mathfrak{M}$, da dieser zusammen mit der obigen Gleichung die Gleichung der Tangentialebene erfüllt. Der Vektor $\mathfrak{M}$ steht senkrecht auf der Tangentialebene im

Endpunkt von $\mathfrak{X}$, weil die Bedingung $\mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ erfüllt ist. Man kann demnach den Vektor $\mathfrak{X}$ in folgender Weise konstruieren: Man errichtet im Endpunkt des Vektors $\mathfrak{M}$ eine Ebene senkrecht zum Vektor $\mathfrak{M}$ und sucht das dem Trägheitsellipsoid ähnliche und konzentrische Ellipsoid auf, welches diese Ebene berührt; der Radiusvektor nach dem Berührungspunkt ist der gesuchte Korrektionsvektor $\mathfrak{X}$. Das Minimum der Summe der Quadrate der kürzesten Abstände lässt sich noch in eine einfachere Form bringen:

$$S = \Sigma (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i)^2 - 2\, \Sigma (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i) \cdot (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i) + \Sigma (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i)^2. \qquad 20)$$

Dabei ist aber:

$$\Sigma (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i) \cdot (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i) = \mathfrak{X} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] = \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{M}$$
$$= \mathfrak{X} \cdot \Sigma\, \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \Sigma (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i)^2 = \mathfrak{M}^2.$$

Hiernach wird:

$$S = \Sigma (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i)^2 - \mathfrak{M}^2. \qquad 21)$$

Zu einem dritten Spezialfall des Problems gelangt man, wenn man den Standpunkt bereits als bekannt ansieht und nur noch die Aufgabe hat, das Strahlenbündel um den Standpunkt so zu drehen, dass die Strahlen möglichst genau durch die entsprechenden Fixpunkte hindurchgehen. In diesem Fall hat man in den Gleichungen 6 x, y, z gleich Null zu setzen und erhält ein Gleichungssystem, welches in Vektorform geschrieben folgendermassen lautet:

$$\Sigma\, \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{A}_i] = \Sigma\, A_i\, \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i = \mathfrak{N}. \qquad 22)$$

Die Aufsuchung des Vektors $\mathfrak{U}$ kann nun mit Hilfe des Ellipsoids von der Gleichung

$$\Sigma (\mathfrak{U} \times \mathfrak{A})^2 = \mathfrak{N}^2 \qquad 23)$$

und des Vektors $\mathfrak{N}$ ebenso bewerkstelligt werden, wie im vorigen Fall. Das Ellipsoid kann als **Trägheitsellipsoid** des mit den Massen 1 versehenen Systems der Fixpunkte in bezug auf den Standpunkt gedeutet werden.

IV.

Wir wenden uns nun zur Besprechung des schon erwähnten Beispiels zum allgemeinen Fall. Figur 4 stellt eine Reproduktion der Photographie vor, in welcher die zum Rückwärtseinschneiden benützten Fixpunkte durch Kreuze und Nummern kenntlich gemacht sind. Figur 5 gibt einen Ausschnitt aus der österreichischen Spezialkarte (Blatt St. Michael, Zone 17, Col. IX) im Massstab 1 : 75000, mit der Lage und den Höhen der Fixpunkte. Die Koordinaten derselben, auf ein durch die Mitte der Karte gelegtes rechtwinkliges System bezogen, ergaben sich folgendermassen:

Tabelle I.

	x	y	z	
1	— 7204	— 305	2370	Dolzenberg
2	— 6088	— 425	2342	Brettereck
3 Δ	— 5459	— 876	2424	Grosseck, trig. Punkt
4	— 5245	— 1461	2321	Kendlspitze
5	— 3969	— 1330	2201	Schrovinkogel
6	— 3746	— 1662	2205	Kuppe oberhalb der Ödenkaralpe
7	— 869	— 3636	1850 [1])	Zickenberg
8	— 3020	+ 473	1220 [1])	Waldecke
9	— 1242	— 60	1111	Brücke am Cederhausbach bei Feld
10	— 1041	— 302	1105	Knie des Cederhausbaches
11	— 429	— 790	1100	Knie des Cederhausbaches
12	— 3857	— 3475	1095	Knie des Murbaches
13	— 1704	— 4271	1085	Murbrücke bei Walisch

Sie sind bereits in Bezug auf den Papiereingang, der in der X-Richtung 2,13 %, in der Y-Richtung 0,72 % beträgt, reduziert. Die Bildweite des Apparates ist 148,4 mm. Die Koordinaten der Bildpunkte, auf das den Umfassungslinien der Photographie parallele Koordinatensystem durch den Mittelpunkt bezogen, sind in Tabelle II zusammengestellt. (Vergl. Fig. 4.)

---

[1]) Die Höhen der Punkte 7 und 8 sind geschätzt.

Tabelle II.

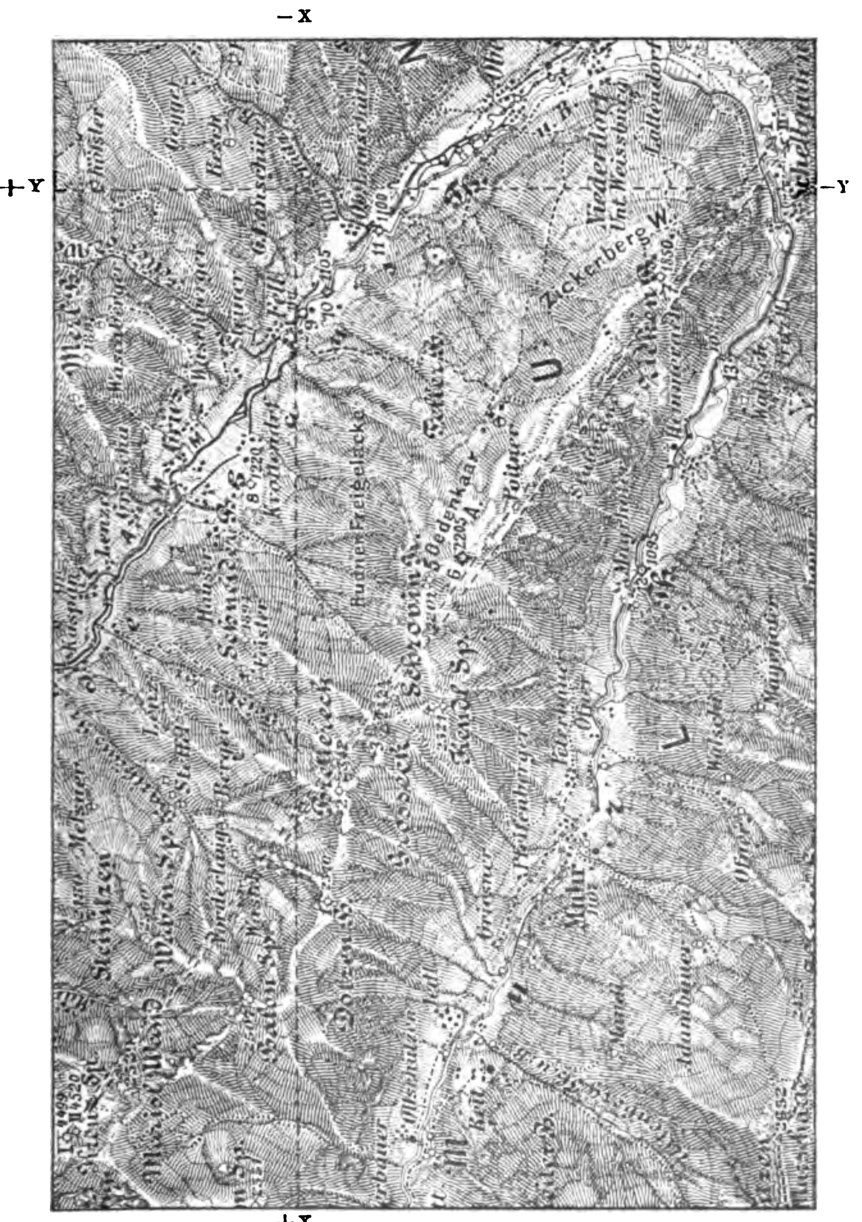
	x	y
1	+ 26,3	— 20,9
2	+ 5,8	— 4,2
3 Δ	+ 5,0	+ 5,3
4	+ 12,6	+ 7,6
5	— 6,7	+ 14,5
6	— 2,5	+ 16,5
7	— 1,6	+ 27,1
8	— 49,1	— 5,4
9	— 49,0	+ 6,9
10	— 45,8	+ 8,9
11	— 42,1	+ 13,0
12	+ 23,1	+ 2,1
13	+ 10,8	+ 14,7

Fig. 4.



Gebirgskamm zwischen Cederhaustal und Murtal in Salzburg.
Aus 4520 m Höhe aufgenommen von Prof. K. Heinke am 21. Febr. 1903.

Fig. 5.



Zunächst wurde auf graphischem Wege eine näherungsweise Position I (Fig. 5) des Standpunktes mit den Koordinaten $x = -9617$, $y = 2203$, $z = 4499$ bestimmt, wobei der Umstand benützt wurde, dass auf der Photographie ein vom Äquator des Ballons herabhängendes Windtau abgebildet ist, dessen Richtung man als annähernd vertikal ansehen konnte. Bei dieser Gelegenheit wurde auch eine genäherte Lage für die Neigung des Apparates (Richtungscosinus der optischen Axe: $\alpha = 0{,}7435$, $\beta = -0{,}5240$, $\gamma = -0{,}4160$, Neigung derselben gegen die Horizontale $-24{,}^{0}58$[1]) ermittelt; der Horizont wurde vorläufig parallel der einen Rahmenseite angenommen. Auf dem Wege der darstellenden Geometrie liessen sich alsdann die Richtungscosinus der 13 Strahlen bezogen auf das Koordinatensystem der Karte mit einer Genauigkeit von etwa 0,001 ermitteln; sie sind in der Tabelle III zusammengestellt:

Tabelle III.

	α	β	γ
1	+ 0,5794	− 0,6189	− 0,5303
2	+ 0,7105	− 0,5480	− 0,4415
3 Δ	+ 0,7355	− 0,5585	− 0,3835
4	+ 0,7090	− 0,6010	− 0,3690
5	+ 0,7978	− 0,5065	− 0,3270
6	+ 0,7870	− 0,5320	− 0,3125
7	+ 0,7988	− 0,5490	− 0,2460
8	+ 0,8740	− 0,2310	− 0,4275
9	+ 0,9005	− 0,2510	− 0,3550
10	+ 0,8978	− 0,2725	− 0,3460
11	+ 0,8981	− 0,2990	− 0,3225
12	+ 0,6507	− 0,6457	− 0,3995
13	+ 0,7285	− 0,6030	− 0,3250

Aus den Näherungskoordinaten des Standpunktes I und den Koordinaten der Fixpunkte (Tabelle I) ergaben sich alsdann die in Tabelle IV verzeichneten Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A}_i$:

[1]) Die Horizontalprojektion der optischen Axe vor der Ausgleichung ist in Fig. 5 mittels einer gestrichelten Linie durch den Punkt I angegeben.

Tabelle IV.

	X	Y	Z	Z korrigiert
1	+ 2413	− 2508	− 2129	− 2130
2	+ 3529	− 2628	− 2157	− 2159
3 Δ	+ 4158	− 3079	− 2075	− 2077
4	+ 4372	− 3664	− 2178	− 2180
5	+ 5648	− 3533	− 2298	− 2301
6	+ 5871	− 3865	− 2294	− 2298
7	+ 8748	− 5839	− 2649	− 2657
8	+ 6597	− 1730	− 3279	− 3283
9	+ 8375	− 2263	− 3388	− 3394
10	+ 8576	− 2505	− 3394	− 3400
11	+ 9188	− 2993	− 3399	− 3406
12	+ 5760	− 5678	− 3404	− 3409
13	+ 7913	− 6474	− 3414	− 3422

Die Z-Komponenten der 4. Kolonne sind in Bezug auf Erdkrümmung und mittlere Refraktion verbessert.

Das Koeffizientenschema der Normalgleichungen 6, das mit Hilfe von Tafeln berechnet wurde, wird folgendes:

+ 304,18	+ 303,84	+ 236,22	0	+ 36,170	− 47,380	− 0,796
	+ 665,31	− 134,21	− 36,170	0	− 80,743	+ 0,322
		+ 760,24	+ 47,380	+ 80,743	0	− 6,344
			+ 5,0804	+ 4,6474	+ 3,6582	− 0,410
				+ 9,7420	− 2,3056	− 0,620
					+ 11,1779	− 0,044
						+ 0,1283

Für die Koordinaten wurde dabei der Kilometer als Einheit gewählt.

Die Auflösung nach der Gaussschen Methode der successiven Elimination ergab bei Benützung eines 50 cm langen Rechenschiebers nachstehende Werte für die Unbekannten:

$$u = -0{,}0403 \pm 0{,}0033 \qquad x = +0{,}0408 \pm 0{,}0195$$

$$v = +0{,}0257 \pm 0{,}0024 \qquad y = +0{,}0786 \pm 0{,}0254$$

$$w = +0{,}0145 \pm 0{,}0023 \qquad z = +0{,}0212 \pm 0{,}0233$$

Die beigeschriebenen mittleren Fehler sind aus den Gewichtskoeffizienten

$[\alpha\alpha] = 0{,}03816,\quad [\beta\beta] = 0{,}02108,\quad [\gamma\gamma] = 0{,}01886,$
$[\delta\delta] = 1{,}368,\quad [\varepsilon\varepsilon] = 2{,}310,\quad [\varphi\varphi] = 1{,}943,$

und der reduzierten Fehlerquadratsumme 0,00921, sowie der Anzahl 33 der überschüssigen Fehlergleichungen gerechnet. Die Ausrechnung der Gleichung 8 für das Minimum der Summe der Fehlerquadrate ergab in genügender Übereinstimmung 0,0103. Zur Probe wurden auch noch die 39 Fehlergleichungen, die sich aus den Gleichungen 11 ergeben mit den Korrektionswerten ausgerechnet und hiernach die Summe der Fehlerquadrate in ebenfalls entsprechender Übereinstimmung zu 0,00978 gefunden. Hiernach sind die Koordinaten der endgiltigen, in Fig. 5 mit II bezeichneten Lage des Ballonortes:

$$x = -9576 \pm 20\ \text{m};\quad y = 2282 \pm 25\ \text{m};\quad z = 4520 \pm 23\ \text{m}.$$

Die Komponenten des Drehvektors $\mathfrak{U}$ bewirken eine Veränderung der Hauptvertikalen und damit des Koordinatensystems auf der Bildebene, die man in folgender Weise erhält: Man sucht im Strahlenbündel jenen Strahl, der nach der Drehung um den Vektor $\mathfrak{U}$ in die Vertikale übergeht. Dieser gibt die Lage der Vertikalen nach der Ausgleichung an. Bezeichnen wir denselben mit $\mathfrak{b}_0 = \alpha_0\,\mathfrak{i} + \beta_0\,\mathfrak{j} + \gamma_0\,\mathfrak{k}$, so ist dadurch die Gleichung gegeben: $\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_0 = -\mathfrak{k}$, woraus mit Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung $\alpha_0 = v$, $\beta_0 = -u$, $\gamma_0 = -1$ sich ergibt. Der Schnittpunkt dieses Strahles $\mathfrak{b}_0$ mit der Bildebene gibt den verbesserten Nadir auf dem Bilde. Wird dieser mit A verbunden, so erhält man die verbesserte Hauptvertikale, welche in Figur 4 punktiert eingetragen ist. Die Figur zeigt, dass die Richtung der neuen Hauptvertikale sehr gut zur Richtung des Windtaues stimmt, wie eine nach dem verbesserten Nadir gezogene, punktierte Linie, die sich fast mit dem Bilde des Windtaues deckt, ausweist. Zum Schlusse sei noch eine Zusammenstellung der Koordinaten (x, y, z) der Fixpunkte und jener (x', y', z') der Endpunkte der kürzesten Abstände auf den Strahlen nach der Ausgleichung gegeben. Die Komponenten der kürzesten Abstände sind mit $f_x\, f_y\, f_z$ bezeichnet.

Tabelle V.

	x	x'	f_x	y	y'	f_y	z	z'	f_z
1	— 7204	— 7210	— 6	— 305	— 319	— 14	+ 2370	+ 2378	+ 8
2	— 6088	— 6093	— 5	— 425	— 454	— 29	+ 2342	+ 2367	+ 25
3 Δ	— 5459	— 5470	— 11	— 876	— 872	+ 4	+ 2424	+ 2396	— 28
4	— 5245	— 5231	+ 14	— 1461	— 1433	+ 28	+ 2321	+ 2295	— 26
5	— 3969	— 3949	+ 20	— 1330	— 1307	+ 23	+ 2201	+ 2213	+ 12
6	— 3746	— 3746	0	— 1662	— 1670	— 8	+ 2205	+ 2217	+ 12
7	— 869	— 880	— 11	— 3636	— 3665	— 29	+ 1850	+ 1872	+ 22
8	— 3020	— 3025	— 5	+ 473	+ 500	+ 27	+ 1220	+ 1192	— 28
9	— 1242	— 1247	— 5	— 60	— 66	— 6	+ 1111	+ 1101	— 10
10	— 1041	— 1047	— 6	— 302	— 320	— 18	+ 1105	+ 1105	0
11	— 429	— 422	+ 7	— 790	— 779	+ 11	+ 1100	+ 1112	+ 12
12	— 3857	— 3852	+ 5	— 3475	— 3465	+ 10	+ 1095	+ 1088	— 7
13	— 1704	— 1699	+ 5	— 4271	— 4263	+ 8	+ 1085	+ 1076	— 9

Für die Lage der optischen Axe nach der Ausgleichung, die in Fig. 5 mittels einer gestrichelten Linie durch Punkt II dargestellt ist, findet man die Richtungscosinus: $\alpha = 0{,}7404$, $\beta = -0{,}5300$, $\gamma = -0{,}4140$ und den Neigungswinkel gegen die Horizontale zu $-24{,}^{\circ}46$. Die durchschnittlichen Koordinatendifferenzen der Tabelle V betragen in der X-Richtung 8 m, in der Y-Richtung 16 m, in der Z-Richtung 15 m; vor der Ausgleichung waren die betreffenden Werte 39 m, 49 m, 55 m. Im allgemeinen entsprechen die übrig bleibenden Widersprüche bei der Ausgleichung den Anforderungen, die man an eine topographische Karte im Massstab 1 : 75000 zu stellen geneigt ist, wenigstens soweit als die Horizontalpositionen in Frage kommen. Die kleineren Koordinatenunterschiede in der X-Richtung erklären sich einfach aus dem Umstand, dass die Strahlen des Bündels gegen die X-Axe nur wenig geneigt sind und die übrig bleibenden kürzesten Abstände daher annähernd senkrecht zur X-Axe stehen. Bemerkenswert sind die grossen Fehler bei den Höhen, soweit wenigstens die Berggipfel in Frage kommen. Für die Talpunkte sind sie nicht auffällig, da die Höhe bei Punkt 8 nur auf Schätzung zwischen den Höhenlinien beruht und leicht um mehr als 10 m falsch sein kann. Auf ähnliche Weise liesse sich auch die Differenz bei Punkt 7

erklären, dessen Höhe ebenfalls nur ziemlich unsicher geschätzt ist. Dagegen sind die grossen und ihrem Vorzeichen nach entgegengesetzten Differenzen bei Punkt 2 und 3, wobei Punkt 3 noch dazu ein trigonometrischer Punkt ist, schwer zu erklären. Dieselben traten schon bei der graphischen Näherungsbestimmung sehr störend auf und es liess sich auch durch Weglassung des Punktes 2 keine bessere Uebereinstimmung erzielen. Die verhältnismässig grosse Unsicherheit in der Bestimmung des Ballonortes, die in den mittleren Fehlern der Koordinaten x, y, z im Betrage von 20 m, 25 m, 23 m zum Ausdruck kommt, ist wesentlich auf diesen Umstand zurückzuführen. Ungünstig für die Genauigkeit der Rekonstruktion des Ballonortes ist ausserdem noch der Umstand, dass das Bildfeld des benützten Apparates klein ist, und von demselben in der Horizontalrichtung nur etwa 30°, in der Vertikalrichtung kaum 20° zur Ausnützung kommen kann. Die ausgedehnte Schneebedeckung der Landschaft erschwert im Verein mit dem Nebelschleier die genaue Identifikation des Bildes mit der Karte. Für Aufnahmen während der Sommerszeit, die mit einem photogrammetrischen Apparat von etwa 50° Bildfeld in der Horizontalrichtung und 35° in der Vertikalrichtung bei gutem Wetter gemacht werden, würden die Verhältnisse bei weitem günstiger liegen. Allerdings würde dann voraussichtlich die Unzulänglichkeit des Kartenmaterials noch auffallender zutage treten, als es bei diesem Beispiel schon der Fall ist. Es darf nicht verschwiegen werden, dass diesem Teil der Spezialkarte der österreichisch-ungarischen Monarchie Aufnahmen aus dem Anfang der 70er Jahre zu Grunde liegen, die mit ziemlich primitiven Hilfsmitteln ausgeführt wurden, und bei denen der genauen Darstellung des Hochgebirges noch kein erheblicher Wert beigelegt wurde. Abgesehen von den erwähnten Unstimmigkeiten in den Höhen und der durch den Zeichenschlüssel bedingten Unbeholfenheit der Felsdarstellung ist die Wiedergabe des Gebirgszuges in der Karte als durchaus entsprechend zu bezeichnen.

— — — —

Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 25. November 1903.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnet die Festsitzung mit der folgenden Rede:

Königliche Hoheit!
Hohe Festversammlung!

Wenn sich die Mitglieder der K. B. Akademie der Wissenschaften heute zu Ehren ihres Allerhöchsten Protektors, des Prinzregenten Luitpold von Bayern in festlicher Sitzung vereinigen, so haben wir bei einem Rückblick auf das verflossene Jahr besondere Veranlassung zur Dankbarkeit. Zahlreiche Beweise der Huld unseres hohen Protektors haben uns gezeigt, dass sein Interesse an dem Gedeihen und Blühen unserer Akademie unverändert fortdauert und auch von seiten der K. Staatsregierung und der hohen Kammern des Landtags hatten wir uns einer besonders wohlwollenden Berücksichtigung mancher langjähriger Wünsche zu erfreuen.

In erster Linie verdanken wir es der Initiative des früheren Herrn Kultus-Ministers von Landmann, dass heute das Wilhelminische Gebäude zum grössten Teil mit Zentralheizung versehen ist, die es nunmehr gestattet, auch in den Wintermonaten in den Museumsräumen zu arbeiten und die Sammlungen dem öffentlichen Besuche zugänglich zu machen. Soweit

sich bis jetzt übersehen lässt, fungiert die Zentralheizung befriedigend und da bei dieser Gelegenheit auch eine gründliche Renovierung der inneren Räume unseres Gebäudes stattgefunden hat, so besitzen dieselben nunmehr ein würdigeres Aussehen.

Der von Sr. Exzellenz Herrn von Landmann projektierte Umbau des Wilhelminums konnte leider noch nicht in Angriff genommen werden, weil die Justizbehörden die von ihnen eingenommenen Lokalitäten voraussichtlich erst Ende nächsten Jahres verlassen werden und weil sich der Verlegung des Münzkabinetts unerwartete Schwierigeiten in den Weg stellten. Auch der geplante Neubau eines Museums für Abgüsse antiker Bildwerke ist leider nicht zustande gekommen.

So dauert der fast unerträgliche Platzmangel in unseren Museen noch unverändert fort und mit Sehnsucht sehen wir der Zeit entgegen, wo es die Finanzlage Bayerns gestattet, diesem beklagenswerten Zustand ein Ende zu machen.

Mittlerweile wachsen unsere Sammlungen in einem früher unerhörten Massstabe. Durch die Fürsorge der K. Staatsregierung sind die Dotationen des Antiquariums, Münzkabinetts, der zoologischen, prähistorischen und ethnographischen Sammlungen nicht unerheblich vermehrt und auch die Verhältnisse des Personals in vielfacher Hinsicht verbessert worden. Aber auch durch namhafte Geschenke wurden unsere Museen fortdauernd bereichert.

Von den Erwerbungen des Jahres 1902 seien folgende hervorgehoben:

Antiquarium: A. Terrakotten: 1. archaisch: Gefäss in Form eines knienden Mannes, ein grotesker, sitzender Polyphem; 2. aus der Zeit des grossen Stiles: ein Silen und Dionys; 3. aus der hellenistischen Periode: ein Büchsendeckel (Nachbildung nach einem in Silber getriebenen Original) mit sich küssenden Köpfen; ferner ein griechisches Kohlenbecken und eine etruskische Totenkiste. B. Bronzen: Statuette eines Gottes mit Wolfsfell (halbbarbarisch); jugendlicher Kopf mit phrygischer Mütze; ein altjonisches Flachrelief; ein bäumendes

Pferd; zwei etruskische Greifenköpfe. C. Gold: Ein altpersisches Gehängsel. D. Ein etruskischer Bernsteinkopf als Amulett. E. Mehrere graziöse, antike Gläser.

Ägyptische Abteilung: 5 Bronzen, darunter eine Göttergruppe (Osiris mit Isis und Horus) und ein kniender Priester, Skarabäen, drei altbabylonische Tontäfelchen aus den Ausgrabungen von Niffer (Nippur).

Botanisches Museum: Durch Kauf und Tausch wurden 760 Arten aus Kamerun, Spanien, Australien, Nordamerika, Südafrika und Brasilien erworben; durch Geschenk 4626 Arten, darunter 3000, welche das Herbarium des K. russischen Leibarztes Dr. Seb. Fischer erhielt, hierunter solche aus Arabien, Madeira, übergeben von dem Sohne des Sammlers Landgerichtsrat Anton Fischer; 900 Arten stammen aus der Schenkung des Professors Dr. Fr. W. Neger, hauptsächlich solche aus Chile und Patagonien.

Botanischer Garten: Durch Tausch ging aus den botanischen Gärten in Göttingen uud Würzburg eine Anzahl wertvoller Pflanzen zu, so namentlich ein grosses Exemplar von Abotium Schiedei und Asplenium marginatum. Die Demonstrationssammlung des Pflanzenphysiologischen Instituts wurde besonders bereichert durch ausgezeichnete Exemplare der merkwürdigen, parasitisch lebenden Raffeniaceen Javas, welche Dr. Xaver Lang dem Institut übersendete. Das Kryptogamen-Herbarium bestrebte sich hauptsächlich, durch Erwerbungen von zahlreichen Moosen die Lücken der sonst sehr reichen Sammlung auszufüllen. Im Alpengarten auf dem Schachen wurde infolge einer Zuwendung von 1400 M. aus der Münchner Bürgerstiftung und 900 M. von dem Verein zum Schutz und zur Pflege des Alpengartens damit begonnen, die Pflanzen in Gruppen nach den natürlichen Familien anzupflanzen, während vorher nur eine Anzahl biologischer Gruppen vorhanden war.

Ethnographisches Museum: Von den 250 Nummern Zugänge werden hervorgehoben als Geschenk Sr. Majestät des Deutschen Kaisers aus den Darbietungen des Prinzen Chun zwei grosse prunkvolle Halbvasen chinesisches Cloisonné und

die Faksimilereproduktion einer altsiamesischen Bilderschrift des sogenannten cod. Nutall, ein Geschenk des Peabodymuseums der Universität Cambridge-Boston.

Mineralogische Sammlung: 1. für die Mineraliensammlung wurden sehr seltene Mineralien aus Australien, New-Mexiko, Dakota, Missouri, Japan und Grönland sowie eine alte Prachtstufe aus Rotgiltigerz aus der Grube Kurprinz in Freiberg i. S. erworben. Hervorragend sind die nicht im Handel befindlichen grönländischen Mineralien, welche Professor K. V. Ussing in Kopenhagen schenkte. 2. Von den Erwerbungen der Gesteins- und Lagerstättensammlung sind zu nennen: eine vollständige Kollektion der Gesteine des Mont Blanc, eine Sammlung Schwarzwaldgesteine, eine volle Erz- und Gesteinsserie aus den Gruben der „Mitterberger Kupfergewerkschaft“ bei Bischofshofen; ferner Gesteins- und Erzproben aus der neuen Goldzeche „Fundkogel“ am Zwickenberg bei Oberdrauburg in Kärnten, dem neuen Kiesbergbau Panzendorf im vorderen Vilgrattental; eine vollständige Lokalsuite vom Hüttenberger Erzberg, ein Profil des Franz Joseph-Erbstollens zu Nagyag, eine Serie Erze und Gesteine des grossen Zinkblendeganges am Schneeberg bei St. Martin im Passeyr; ein Stück Dolomit mit eingesprengten Korundkristallen aus dem Lozzachtal, das erste, bekannt gewordene Vorkommen dieses Minerals in den Ostalpen. Eine Serie von Marmoren, Kalken, Dolomiten, Nebengesteinen und Einschlüssen von den Fundorten Sterzing, Laas, Carrara, Massa, Ornavasso und Crevola. Ein wertvoller Zuwachs wurde erworben aus Amberg, wo ein Hochofen nach 15 jähriger Tätigkeit abgebrochen wurde, dessen Gestellsteine und Wände mit Mineralneubildungen erfüllt waren, darunter besonders Graphit, kristallisiertes Zink, Ferrocyantitan etc.

Münzkabinett: Ein Tetradrachmon von Syrakus schönen Stiles, ein Goldstater von Pantikapaeum, ein Aureus des Septimius Severus aus dem Fund von Karnak, ein sehr seltener und kostümlich interessanter Schautaler der Anna Maria von Brandenburg-Bayreuth, eine sehr seltene Medaille auf Boccaccio. Unter den mittelalterlichen Erwerbungen beansprucht beson-

deren Wert der Turnosenfund von Alskaterbach, unter jenen für die Gemmensammlung mehrere kostbare und archäologisch interessante, altorientalische und griechische Stücke.

Museum für Abgüsse antiker Bildwerke: Neuformungen durch den Präparator des Museums nach Originalen in den Museen von München, Kopenhagen, Neapel und der Villa Borghese, darunter etwa 120 geschnittene Steine. Käuflich erworben 10 Stück aus Venedig, Kopenhagen, Berlin, Dresden; als Geschenk erhalten 12 Stück aus Venedig, Corneto, Neapel, Würzburg, Rom und Cypern. Die Photographiensammlung wurde um 567 Stück vermehrt.

Paläontologisches Museum: a) Geschenke: Ein vollständiger Schädel des kleinen, diluvialen Flusspferdes nebst Skeletteilen aus Madagaskar von Eugen Wolf; eine grosse Anzahl Säugetierreste aus der Pampasformation, darunter Toxodon, Panochthus und Glyptodon von Otto Günther in Fray-Bentos, aus Ägypten ein prachtvoller Schädel von Zeuglotodon Osiris und zahlreiche andere Reste aus dem Eozän des Fayûm von Dr. Stromer von Reichenbach. b) Ankäufe: Von Florentin Ameghino wurde eine interessante Sammlung aus den ältesten Tertiärablagerungen Patagoniens erworben; sie enthält die wichtigsten Gattungen aus den Pyorhoterium-, Colpodon- und Notostylopsschichten und gibt einen trefflichen Einblick in diese vor vier bis fünf Jahren noch völlig unbekannte Fauna, die die Vorfahren der jetzt in Südamerika verbreiteten Edentaten, Marsupialier, Raub-, Huftiere, Nager u. s. w. enthält und ausserdem durch eine Fülle höchst fremdartiger, in anderen Kontinenten absolut unbekannter Säugetiertypen ausgezeichnet ist. Aus den Mitteln des von Herrn A. Sedlmayr zusammengebrachten Fonds konnte Herr Albert Hentschel eine zweite Sammelreise nach Samos unternehmen, welche von grossem Erfolg begleitet war. Aus den sonstigen Erwerbungen seien genannt: eine stattliche Sammlung von fossilen Fischen und das Originalexemplar des von Kramberger beschriebenen Aigolosaurus dalmatinus, ferner nordische Diluvialgeschiebe mit wohlerhaltenen Versteinerungen aus Preussisch-Holland, eine Samm-

lung Kohlenkalkversteinerungen aus Irland, Crinoïdeen und Asteriden aus dem rheinischen Devon und Säugetierreste aus dem Miozän von Georgensgmünd und Tutzing.

Anthropologisch-prähistorische Sammlung: a) Geschenke: Eine Reihe ausserbayerischer Vergleichsgegenstände aus der Steinzeit vom römisch-germanischen Zentralmuseum in Mainz; von Dr. P. Reinecke Feuersteine und Scherben von einer Feuersteinwerkstätte auf dem Heideberg unweit Biesenthal (bei Berlin); von Otto v. Kühlmann Steinbeile und Netzsenker aus Katiköi an der anatolischen Eisenbahn; von Freiherrn v. Stromer Feuersteinmesser aus der Umgebung des Fayûm (Ägypten); von Hofrat Schliz (Heilbronn) eine Serie neolithischer Gefässscherben aus Grossgartbach; von Maurer (Reichenhall) Gefässscherben und Tierknochen sowie Abguss eines bronzezeitlichen Gefässes von den Wohnstätten am Karlstein. b) Unter den Erwerbungen aus den mit Zuschüssen der Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns erfolgten Ausgrabungen ragen hervor die Funde des Bezirksarztes Dr. Thenn in Beilngries, die des Assistenten Dr. Birkner südlich von Mettendorf (zwei Bronzearmringe mit Tonkern, eiserne Pfeilspitzen aus der Hallstattperiode). c) Aus den Ankäufen: Bronze- und Hallstattzeitliche Funde aus der Höhle bei „Dürrloch“ im Schweighauser Forst, steinzeitliche aus der Gegend von Halle a. S., ferner Bronzesicheln, gefunden am Schafhof bei Nürnberg. Die La Tène-Sammlung wurde bereichert durch Funde des Lehrers Strehle aus dem Gräberfeld bei Manching, die zum Teil unter Leitung des technischen Beirates der Kommission für Urgeschichte, Oberamtsrichter a. D. Franz Weber, ausgegraben wurden.

Zoologische Sammlung: Infolge einer durchgreifenden Neu-Organisation konnten nur wenige erhebliche Objekte erworben werden. Den Hauptzuwachs bildeten mehrere bedeutende Schenkungen: von Herrn Klumbeck aus München eine Sammlung Hexaktinelliden aus Japan und eine Kollektion Kamerunscher Säugetiere und Skelette; aus dem Nachlass des Herrn Hofsattlermeisters Gmelch eine Sammlung heimischer Spinnen;

von Herrn Kunstmaler Hans Beatus Wieland zwei seltene Paradiesvögel; von der Witwe des Herrn Dr. Funk in Bamberg eine Insektensammlung in etwa 100 Kästen; von Herrn Geheimrat Exzellenz v. Kölliker Octocorallien.

Von Geschenken des Jahres 1903 seien als besonders hervorragende vorläufig erwähnt: Von I. K. Hoheit, Prinzessin Therese von Bayern, unserm hochverehrten Ehrenmitglied, ging dem botanischen Garten eine Anzahl wertvoller Orchideen aus Kolumbien zu.

Der anthropologisch-prähistorischen Sammlung schenkte Herr Eugen Wolf 5 Schädel von madagassischen Eingeborenen und das Skelett eines vornehmen Madagassen, deren Erwerbung mit erheblichen Schwierigkeiten und Gefahren verknüpft war. Dieselbe Sammlung besitzt ferner als höchst interessantes und einzigartiges Geschenk von dem Marinestabsarzt Herrn Dr. Mixius in Tsingtau die mit allen Fleisch- und Gehirnteilen wohlkonservierten Köpfe von 6 hingerichteten chinesischen Räubern.

Herr Fabrikant Reimer in Augsburg übergab der zoologischen Sammlung 3000 M. zum Ankauf einer Variantenserie von Tierarten der Galapagos-Inseln, auf denen Darwin seine berühmten Studien gemacht hat.

Die paläontologische Staatssammlung erhielt von Herrn Eugen Wolf einen Schädel und viele Skeletteile des kleinen fossilen Flusspferdes (Hippopotamus Lemerlei) aus Madagaskar nebst einer Auswahl von Skelettknochen des madagassischen fossilen Riesenvogels Aepyornis.

Die Akademie sah sich ferner veranlasst, an folgende Herren die silberne Medaille Bene merenti zu verleihen:

1. Herrn Bezirksarzt Dr. Thenn, der wichtige prähistorische Ausgrabungen in Beilngries mit Umsicht und wissenschaftlichem Eifer geleitet und die wertvollen Funde der prähistorischen Sammlung überlassen hat,

2. an Herrn Zeiske, welcher der mineralogischen Sammlung zahlreiche Dienste durch Geschenke grösserer Serien aus

dem Gebiet von Mansfeld und der Salzlagerstätten bei Stassfurt und Leopoldshall erwiesen hat,

3. an Herrn Professor Dr. Fr. W. Neger in Eisenach, der eine Sammlung von 900 selbstgesammelten Pflanzen aus Chile und Patagonien und

4. an Herrn Apotheker August Loher in Manila, welcher die Doubletten einer reichen Kollektion von Pflanzen der Philippinen dem botanischem Museum zugewendet hat.

5. Die silberne Medaille wurde ausserdem zuerkannt dem Professor an der Industrieschule in Nürnberg Herrn Johann Kaspar Rudel für seine mit grösster Aufopferung ausgeführten Beobachtungen über die meteorologischen Verhältnisse Nürnbergs.

Die Akademie selbst hat ihre wissenschaftliche Tätigkeit in gewohnter Weise fortgesetzt. In den monatlichen Sitzungen wurden eine grosse Anzahl von Mitteilungen gemacht, die meist in den Sitzungsberichten und Denkschriften Veröffentlichung fanden. Durch die Erhöhung unseres Druckkostenetats ist es möglich geworden, hinsichtlich der Ausstattung unserer Publikationen mit anderen Akademien Schritt zu halten und deren Wert durch reichlichere Zugabe von Abbildungen zu erhöhen. So veröffentlicht z. B. die I. Klasse eine mit 120 Tafeln ausgestattete prachtvolle Monographie über die von Herrn Professor Furtwängler geleiteten äginetischen Ausgrabungen und in den Denkschriften der II. Klasse finden sich verschiedene mit zahlreichen und schön ausgeführten Tafeln versehene Abhandlungen.

Überblicken wir die Fülle von Arbeit, welche im Jahre 1902 teils in den Schriften der Akademie zur Veröffentlichung gelangte, teils in den verschiedenen Attributen des Generalkonservatoriums geleistet wurde, so dürfen wir mit Befriedigung auf unser Tagwerk zurückblicken. Von weiteren Kreisen wird es freilich kaum nach seinem vollen Werte gewürdigt werden, denn häufig liegen die Ergebnisse mühsamer Arbeit eines Forschers in Schubladen oder Fächern eines Museums begraben, die nur von Spezialisten benützt und richtig beurteilt werden

können. Auch viele der gelehrten Abhandlungen in unseren Akademieschriften gewinnen nur Interesse und Bedeutung, wenn sie mit der oft unendlich weitschichtigen, einschlägigen Literatur in Zusammenhang gebracht werden. Aber es ist das alles Material, das zur Gewinnung wissenschaftlicher Wahrheiten führt. Vieles davon erscheint dem Laien unnütz und Manches sogar verlorene Mühe. Er wundert sich, warum man statt solcher Detailarbeit sich nicht mit den höchsten Problemen der Wissenschaft beschäftigt. Er vergisst dabei, dass der Weg zu jenen luftigen Höhen mit unendlicher Mühe gebahnt werden muss und dass es nur wenigen Auserwählten überhaupt gelingt, sie zu erreichen. Aber auch die wissenschaftliche Kleinarbeit kann zu den herrlichsten Resultaten führen; sie ist es, welche uns die Naturkräfte untertan macht und unsere irdischen Daseinsbedingungen verbessert. Aber auch die auf rein geistigem Gebiet errungenen Werte üben einen massgebenden Einfluss auf die Entwicklung der ethischen und moralischen Kultur der Menschheit aus.

Solche Erwägungen sind es wohl, welche die Bestrebungen und Arbeiten der Akademien dem Volksbewusstsein wieder näher gebracht haben, und welche in den letzten Jahren auch unserer Akademie eine Anzahl Stiftungen zuführte.

Heute bin ich in der glücklichen Lage, Ihnen von einer in Aussicht stehenden Stiftung berichten zu dürfen, welche zu den bedeutendsten zählen wird, über die unserer Akademie das Verfügungsrecht zustehen soll.

Der Urheber dieser Stiftung, Herr Albert Samson, lebt gegenwärtig als Rentner in Brüssel. Er ist deutscher Staatsangehöriger und wurde im November 1837 zu Braunschweig geboren. Im Hause eines Pastors zu Braunschweig erzogen, absolvierte er daselbst das Gymnasium und widmete sich sodann dem kaufmännischen Berufe des Vaters, der ihn alsbald der Filiale seines Bankhauses in New York zuteilte. Schon nach einem Jahre gab er indes diese Tätigkeit auf und unternahm längere Reisen durch England, Deutschland, die Schweiz und Italien, begleitete u. a. General Lamoricière auf seinem Zuge

über die Apenninen nach dem belagerten Ancona, und war Zeuge der Schlachten von Castelfidardo, Santa Maria di Capua und am Volturno. Sodann liess er sich in Turin nieder und unternahm von dort aus Reisen durch alle Küstenländer des Mittelmeeres. Später verlegte er seinen Wohnsitz nach London und unterrichtete sich durch mehrfache wissenschaftliche Reisen über die sozialen Zustände in Nordeuropa und Nordamerika.

Im Jahre 1869 errichtete er unter seinem Namen ein Bankhaus in Berlin, trat jedoch im Jahre 1874 die Leitung desselben ab. Nunmehr 37 Jahre alt geworden, begann Herr Samson sich ganz dem ihm angeborenen, wissenschaftlichen Triebe hinzugeben, aus dem bereits seine planmässig angelegten Reisen hervorgegangen waren. Von dem idealen Drange beseelt, sich selbst und die Welt kennen zu lernen, warf er sich mit jugendlichem Enthusiasmus nacheinander auf das Studium der Medizin, der Naturwissenschaften, der Nationalökonomie, der Geschichte, der Völkerkunde und der Philosophie. Es gibt kaum einen berühmten Lehrer dieser Fächer in Berlin, den Herr Samson damals nicht gehört hätte. Mit vielen stand er in persönlichem Verhältnis. Sogar mit ferner liegenden Fächern, mit der Agyptologie und Assyriologie, machte er sich bekannt. Die Pflege dieser allzeit mit grossem Ernst betriebenen Studien nahm nicht weniger als 12 Jahre in Anspruch. Endlich hat er nach dem Spruche: „Homini nobili jura sua ignorare non licet“ noch vier Jahre den juristischen Fächern zugewendet.

Auf dem Grunde einer ebenso allseitigen als tiefen Bildung erhob sich in ihm mit der Macht einer Lebensaufgabe der heisse Wunsch, mit kräftiger Hand am moralischen Fortschritt der Menschheit mitzuwirken. Es schien ihm, als ob in dem grossen Kreis der menschlichen Wissenschaft die Erforschung der Moral nicht den Platz einnehme, den sie nach ihrer Bedeutung zu beanspruchen berechtigt ist. Und in der Tat kann es nicht geleugnet werden, dass hierin Grosses geschaffen und eine umfassende Tätigkeit zum Wohle der Wissenschaft und der Zivilisation entwickelt werden kann. Freilich hat die Durchführung einer so grossen und umfassenden Aufgabe zur Voraus-

setzung, dass die zur Verfügung stehenden Mittel ausserordentlich bedeutend sind.

Unter Beobachtung aller Erfordernisse des internationalen Privatrechtes, hat Herr Samson unserer Akademie durch sein hier hinterlegtes Testament einen Zufluss zu ihrem Vermögen zugewendet.

Das dieser Stiftung zu Grunde gelegte Programm wurde nach langen Verhandlungen, bei welchen sich Herr Rechtsanwalt Professor Dr. Loewenfeld als der Vertreter des Herrn Samson und der Sekretär unserer Akademie, Herr Dr. Karl Mayr, die grössten Verdienste erworben haben, von den beiden Herren in stetem Einvernehmen mit dem Präsidenten der Akademie vereinbart und hat bereits durch Ministerial-Entschliessung vom 14. April 1903 die Billigung des K. Staatsministeriums des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten gefunden. Es lautet:

Statut der Samsonstiftung.

I.

Der Zweck der Stiftung besteht in der wissenschaftlichen Erforschung und Begründung der Moral des Einzelmenschen und der gesellschaftlichen Moral an der Hand der Ergebnisse der Natur- und Geschichtsforschung, und besonders der empirischen Psychologie, ferner in der Feststellung der Folgerungen aus den Ergebnissen dieser Forschung für das Leben des Einzelmenschen und für das Gesellschaftsleben.

Die Mittel der Stiftung sollen insbesondere gewidmet sein:

1. Der Erforschung des Ursprungs, der urgeschichtlichen und weiteren geschichtlichen Entwickelung der Moral und der einzelnen Moralgesetze,

2. der Erforschung des Einflusses der körperlichen und geistigen Veranlagung des Menschen, besonders der Rasse, weiter des Einflusses der Bodenbeschaffenheit, der topographischen, geographischen und meteorologischen Verhältnisse, ferner der Erforschung des Einflusses der Kultur, der Erziehung, der Arbeit, der wirtschaftlichen, vorzüglich der gewerblichen Bedingungen derselben, der Ernährung und ähnlicher Verhältnisse,

3. der Feststellung und Unterstützung der Folgerungen aus den Ergebnissen der zu 1 und 2 bezeichneten Forschungen für die physische und sittliche Lebenshaltung des Einzelmenschen, sowie für das Gemeinschaftsleben. — Dogmatische, speziell dogmatisch-philosophische oder theologische Moralbegründungen sind — in Gemässheit der Satzungen der Akademie — von dem Stiftungszwecke ausgeschlossen und können nur als Gegenstand der Geschichtsforschung (Ziffer 1) in Betracht kommen.

II. Stiftungsverwaltung.

1. Die Stiftung, die von der K. Akademie der Wissenschaften in München zu organisieren ist, wird durch einen eigenen mehrgliederigen Vorstand mit dem Sitze in München verwaltet. Die Mitglieder des Vorstandes bestimmt die K. Akademie der Wissenschaften. Der Vorsitzende des Vorstandes soll ein Vertreter der Naturwissenschaft sein. In den Vorstand sollen Gelehrte aller Länder aufgenommen werden können. Unter allen Umständen sind der jeweilige Präsident der Akademie und die Klassensekretäre Mitglieder des Vorstandes;

2. die Mitglieder des Vorstandes und die Verwaltung sollen aus Stiftungsmitteln honoriert werden.

III. Verfolgung des Stiftungszweckes.

Der Stiftungszweck soll verfolgt werden:

1. Durch Bestellung einer ständigen, wissenschaftlichen Leitung, bestehend aus Gelehrten der in Betracht kommenden, hauptsächlichen Disziplinen.

Bezüglich dieser ständigen wissenschaftlichen Leitung sollen die Bestimmungen zu II, Ziffer 1, Satz 2 bis 5, sowie Ziffer 2 gelten;

2. durch Bestellung der erforderlichen wissenschaftlichen Kräfte für die Ausführung der jeweils als veranlasst erscheinenden Forschungsarbeiten und Veröffentlichungen;

3. durch Unterstützung verwandter Institute und wissenschaftlicher Unternehmungen.

Falls die Mittel durch das Arbeitsprogramm eines Jahres nicht aufgebraucht werden, können sie für verwandte Zwecke, insbesondere aus dem Gebiete der Naturwissenschaften und Geschichte verwendet werden.

IV. Namen der Stiftung.

Die Stiftung soll den Namen „Samson-Stiftung" führen.

Die für diesen Zweck testamentarisch vermachte Summe beträgt eine halbe Million Mark.

Als ein Zeichen ihrer Dankbarkeit für diese hochherzige Stiftung hat die Akademie Herrn Albert Samson ihre höchste Auszeichnung, die

goldene Plato-Medaille Bene Merenti

mit Zustimmung der K. Staatsregierung verliehen.

Möge es uns und unseren Nachfolgern gelingen den Erwartungen, welche der edle Stifter in die K. Bayer. Akademie setzt, allezeit gerecht zu werden."

Sodann verkündigten die Klassensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Klasse, Herr C. v. Voit, die der mathematisch-physikalischen Klasse.

Es wurden von der mathematisch-physikalischen Klasse gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätiget:

I. zu ordentlichen Mitgliedern die bisherigen ausserordentlichen Mitglieder:

1. Dr. Wilhelm Königs, ausserordentlicher Professor der Chemie an der hiesigen Universität;
2. Dr. Hermann Ebert, ordentlicher Professor der Experimentalphysik an der hiesigen technischen Hochschule;
3. Dr. Sebastian Finsterwalder, ordentlicher Professor der Mathematik an der hiesigen technischen Hochschule;

II. zu ausserordentlichen Mitgliedern:

1. Dr. August Föppl, ordentlicher Professor der Mechanik an der hiesigen technischen Hochschule;
2. Dr. Wilhelm Muthmann, ordentlicher Professor der anorganischen Chemie an der hiesigen technischen Hochschule;
3. Dr. Erwin Voit, ordentlicher Professor der Physiologie an der hiesigen tierärztlichen Hochschule;

III. zu korrespondierenden Mitgliedern:

1. Dr. Theodor Boveri, ordentlicher Professor der Zoologie an der Universität Würzburg;
2. Dr. Max Fürbringer, grossherzoglich badischer Geheimer Hofrat und ordentlicher Professor der Anatomie an der Universität Heidelberg;
3. Dr. David Hilbert, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Göttingen;
4. Dr. Hermann Graf zu Solms-Laubach, ordentlicher Professor der Botanik an der Universität Strassburg;
5. Dr. Heinrich Weber, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Strassburg;
6. Dr. Julius Wiesner, kaiserlicher Hofrat und ordentlicher Professor der Botanik an der Universität Wien.

Sitzung vom 5. Dezember 1903.

1. Herr Sigmund Günther berichtet über eine mit Herrn Dr. phil. J. Reindl verfasste Abhandlung: „Seismologische Untersuchungen."

Dieselbe zerfällt in drei selbständige Teile. Im ersten wird, teilweise auf Grund neuen Materiales, die Ausdehnung der grossen Erdbebenkatastrophen von 1348 und 1356 auf Westdeutschland und speziell auf das Gebiet des gegenwärtigen Königreiches Bayern verfolgt. Der zweite behandelt die Seismizität der Riesmulde, scheidet die seit mehr denn vierhundert Jahren dortselbst beobachteten Erdbeben in lokale und durch Übertragung dorthin gelangte und setzt sie mit dem Riesvulkanismus in Beziehung. An dritter Stelle endlich wird eine Überprüfung der zahlreichen Daten vorgenommen, welche zur Erforschung des Wesens der „Bodenknalle" seit einiger Zeit neu hinzugekommen sind, und daraus folgt eine Bestätigung der früher schon gewonnenen Einsicht, dass die ungeheure Mehrzahl dieser dumpfen Detonationen „endogenen" Ursprunges ist.

2. Herr Alfred Pringsheim legt eine Abhandlung: „Der Cauchy-Goursatsche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale" vor.

3. Herr Sebastian Finsterwalder macht: „Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichsrechnung und solchen der Statik."

Gewisse, in der Photogrammetrie auftretende Ausgleichungsprobleme lassen sich durch mechanische Versinnlichung auf

die Ermittelung des Gleichgewichtes elastischer Systeme zurückführen, wobei der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit eine leitende Rolle spielt.

4. Herr Wilhelm Konrad Röntgen teilt die Resultate zweier Abhandlungen mit:

a) von Dr. S. Valentiner: „Bestimmung des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft bei verschiedenen Drucken.“

Der Verfasser bestimmt K nach der Kundtschen Methode und findet, dass dasselbe bei der Temperatur der flüssigen Luft um ca. 5 Prozent zunimmt, wenn der Druck des Stickstoffs von ca. 12 auf ca. 120 cm Quecksilber erhöht wird.

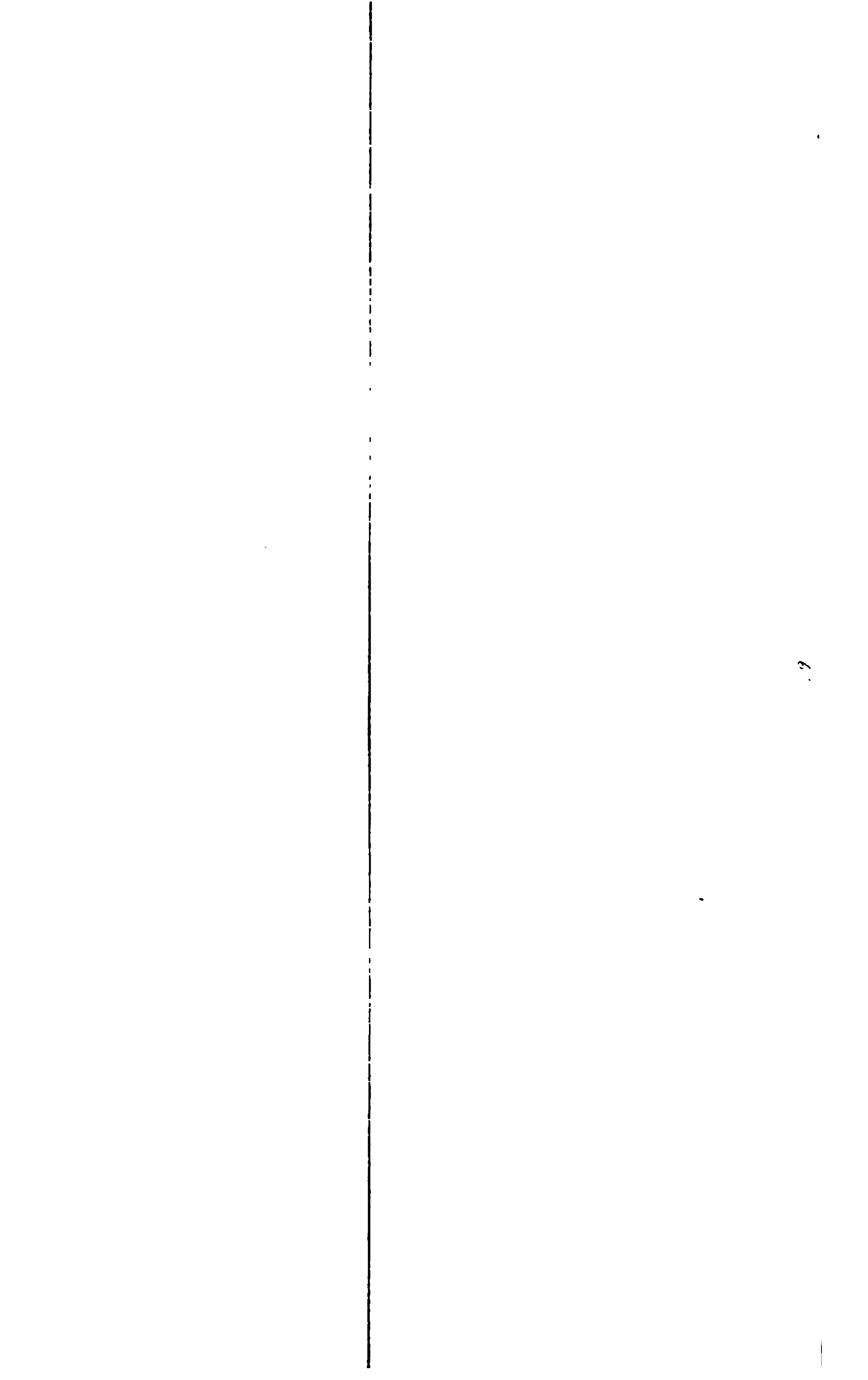
b) von Dr. A. Bestelmeyer und Dr. S. Valentiner: „Bestimmung der Dichte des Stickstoffs und der Abhängigkeit derselben vom Druck bei der Temperatur der flüssigen Luft.“

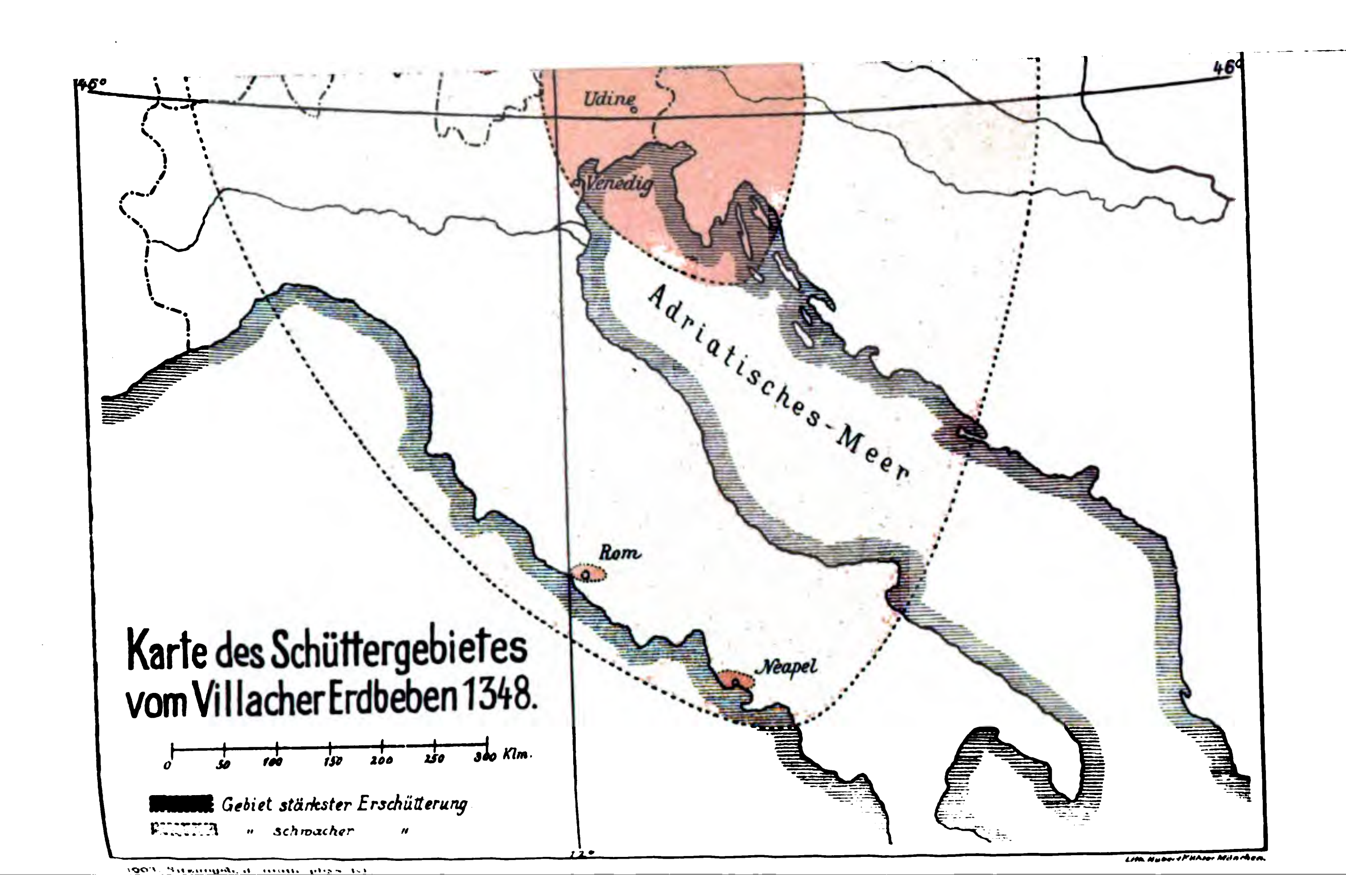
Die Verfasser erhalten aus ihrer zum Zweck der Verwertung bei anderen im physikalischen Institut angestellten Untersuchungen unternommenen Arbeit das Resultat, dass innerhalb der bei den Versuchen vorkommenden Druck- und Temperaturgrenzen die Dichte ϱ des Stickstoffs bezogen auf die Dichte bei 0^0 und 76 cm Druck sich darstellen lässt durch die Gleichung:

$$\frac{p}{\varrho} = 0{,}27774\,\vartheta - (0{,}03202 - 0{,}000253\,\vartheta)\,p,$$

wo ϑ die von $-273{,}^{0}04$ C. an gerechnete absolute Temperatur und p den Druck in cm Quecksilber bedeutet.

5. Herr Richard Hertwig legt eine Abhandlung des Herrn W. A. Schulz: „Hymenopteren Amazoniens“ vor.




Karte des Schüttergebietes vom Villacher Erdbeben 1348.
46°
46°
12°
Udine
Venedig
Adriatisches-Meer
Rom
Neapel
0
50
100
150
200
250
300 Klm.
Gebiet stärkster Erschütterung
" schwacher "

Seismologische Untersuchungen.

Von **S. Günther** und **J. Reindl.**

(*Eingelaufen 9. Dezember.*)

(Mit Taf. II.)

Die Erdbebenkunde hat sich seit kurzer Zeit zu einer überaus vielgestaltigen Disziplin entwickelt, welche mit den verschiedensten Wissenschaften in engem Zusammenhange steht. Die Menge der ihr gestellten Aufgaben wächst von Tag zu Tag, und jede derselben führt auf neue Fragen, zu deren Beantwortung die Hilfsmittel von allen Seiten herangezogen werden müssen. Die vorliegende Arbeit, welche einige einschlägige Probleme von an sich verschiedenem Charakter unter einer Kollektivbezeichnung zusammenfasst, soll später Fortsetzungen erfahren. Diesmal handelt es sich um drei Gegenstände, die mit den Richtungen, nach denen sich gegenwärtig die seismologische Forschungstätigkeit hauptsächlich entfaltet, nahe Beziehungen unterhalten.

I. Die beiden grossen Erdbeben des XIV. Jahrhunderts.

Mehr und mehr macht sich das Bedürfnis geltend, grosse und von nachweisbaren Folgen, zumal von solchen morphologischer Natur, begleitete seismische Ereignisse der Vergangenheit einer gründlichen monographischen Bearbeitung zu unterziehen. Man kann so dazu gelangen, namentlich auch die Grösse der Flächen, über welche sich ein bestimmtes Vorkommnis erstreckte, mit einer wenigstens ausreichenden Genauigkeit zu ermitteln, was der Vergleichung halber oft sehr

zu wünschen ist. In einem konkreten Falle[1]) hat sich so ergeben, dass in der Tat die Erschütterungsbereiche mitunter eine ganz ungeheure Ausdehnung besitzen. Auch sonst lässt sich einer sorgfältigen Prüfung der Quellen, so trübe dieselben auch oft zu fliessen scheinen, manch interessantes Teilergebnis abgewinnen.

Dass die Erdbebenstatistik immer unvollkommener wird, je weiter wir in der Geschichte zurückgehen, liegt in der Natur der Sache; für aufzeichnungswürdig wurden nur Vorfälle von mehr oder weniger katastrophenartigem Typus erachtet. Allein nur allzu oft traten solche ein, und insbesondere ist das XIV. Jahrhundert gekennzeichnet durch zwei der furchtbarsten Erderschütterungen, von denen Mitteleuropa überhaupt jemals betroffen worden ist. Es sind diejenigen, welche sich in den Jahren 1348 und 1356 zutrugen, und die man wohl kurz, den Namen nach den am schwersten geschädigten Orten wählend, als das Villacher und das Baseler Erdbeben kennzeichnet. Soweit es sich um die mehr epizentralen Gebiete handelt, ist man von den näheren Umständen beider Katastrophen gut unterrichtet, aber dafür, dass dieselben auch nach weit entfernten Gegenden ausstrahlten, hat es bisher an Nachweisen gefehlt, und diese sollen also hier erbracht werden. Vorzugsweise ist beidemale Gewicht darauf gelegt worden, festzustellen, inwieweit diejenigen Landesteile, welche heute zusammen das Königreich Bayern[2]) ausmachen, in ernstere Mitleidenschaft gezogen worden sind.

---

[1]) Woerle, Der Erschütterungsbezirk des grossen Erdbebens zu Lissabon, Münch. Geograph. Studien, herausgeg. von S. Günther, 8. Stück (1900). Vgl. auch: Lagrange, À propos du tremblement de terre de Lisbonne de 1755, Ciel et Terre, 1902, Nr. 16.

[2]) Selbstverständlich liessen sich einige Ergänzungen geben zu W. v. Gümbels mühsam zustande gebrachten Erdbebenkatalogen in den Jahrgängen 1889 und 1898 dieser „Sitzungsberichte". Vgl. auch Günther, Das bayerisch-böhmische Erdbeben vom Jahre 1329, Jahresber. d. Geograph. Gesellschaft in München für 1896 und 1897, S. 76 ff. Ähnliches ist bereits geschehen in dem Aufsatze von Reindl (Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern, diese „Sitzungsberichte", 1903, S. 171 ff.). Es möge hier ausdrücklich konstatiert werden, dass die an letzterem Orte

Am 25. Ianuar 1348 (St. Paulstag) erlitt Kärnten samt allen angrenzenden alpinen und voralpinen Landschaften jenen entsetzlichen Schlag, von welchem es sich lange nicht erholen sollte. Wir besitzen zur Beurteilung aller Verhältnisse, soweit die Ostalpen in Betracht kommen, eine ausgezeichnete Spezialschrift von Hoefer,[1]) und auch Fuchs[2]) ist anlässlich einer auf ein allgemeineres Ziel gerichteten Studie darauf eingegangen. Man hat es nicht sowohl mit einem Einzelbeben, als vielmehr mit einem Erdbebenschwarme zu tun, indem volle vierzig Tage lang der Erdboden nicht zur Ruhe kam; immerhin scheint der erste Tag der Reihe auch der schlimmste gewesen zu sein.[3]) Von keinem europäischen Erdbeben werden so eingreifende Veränderungen des Aussehens der Erdoberfläche berichtet.[4]) Am schlimmsten erging es natürlich dem mit einer Hauptstosslinie zusammenfallenden Drautale, aber es zitterten in ihren Grundfesten auch Udine und Venedig, und Dalmatien, Südtirol (vorab das Tal von Primiero) und die

---

(S. 179) zu findende Bemerkung über H. Credners Karte des sächsisch-bayerisch-böhmischen Grenzbebens nicht etwa in dem Sinne verstanden werden darf, als sei für dieselbe aus Bayern bezogenes Material unberechtigterweise verwertet worden. Der sächsische Forscher stützte sich ausschliesslich auf Daten, die ihm seine selbständig angestellten Umfragen eingebracht hatten.

[1]) Hoefer, Die Erdbeben Kärntens und deren Stosslinien, Denkschriften der Kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien, Math.-Naturw. Kl., 42. Band (1880), S. 7 ff. Das annalistische Material findet sich grossenteils gut gesammelt bei A. Pilgram (Calendarium chronologicum medii potissimum aevi monumentis accomodatum, Wien 1781). Ganz neuerlich hat wertvolle Nachträge zu dem bereits Bekannten geliefert F. G. Hann (Belars Erdbebenwarte, 3. Jahrgang, S. 68 ff.).

[2]) C. W. C. Fuchs, Ueber Erdbeben in den Alpen und deren Beobachtung, Zeitschr. d. deutschen u. österr. Alpenver., 11. Band, S. 351 ff.

[3]) Die Zerstörung von Villach und von anderen innerösterreichischen Ortschaften ist jedenfalls auf die Abendstunden des 25. Januar zu verlegen.

[4]) Darüber spricht sich des näheren aus R. Hoernes (Erdbebenkunde, Leipzig 1883, S. 214 ff.). Vom Dobratsch ging ein Bergschlipf nieder, staute die Gail auf und machte aus blühender, volkreicher Talebene eine öde, menschenleere Sumpfgegend. Das „Verwüstungsfeld" hatte nach Hann (s. o.) eine Ausdehnung von 11 km.

Lombardei erfuhren Stösse. Sogar aus Rom und Neapel liegen Nachrichten dieser Art vor. In der Schweiz wurde Basel, dieser Mittelpunkt eines habituellen Stossgebietes, stark berührt,[1]) wogegen vom Wallis, dieser seismisch schwächsten Stelle der Schweiz, nichts Sicheres bekannt ist.[2]) Niederösterreich, Böhmen und Mähren verspürten die Kraft des Bebens zum Teile noch sehr kräftig.[3]) Lernen wir nunmehr die über Bayern sich äussernden Stimmen näher kennen.

Da haben wir zunächst je eine zeitgenössische Notiz aus Weihenstephan und Passau.[4]) Die erstere, von einem dortigen Benediktiner herrührend, besagt, dass sich am Nachmittage des fraglichen Tages, eines schönen, heiteren Wintertages, der Himmel mit Wolken bezogen habe,[5]) und dass dann

---

[1]) Basel nimmt einen wenig angenehmen Ehrenplatz als seismischer Vorort Mitteleuropas ein (Langenbeck, Die Erdbebenerscheinungen in der oberrheinischen Tiefebene und ihrer Umgebung, Geogr. Abhandl. aus den Reichslanden, herausgeg. v. Gerland, 1. Heft, Stuttgart 1882, a. v. St.). Auch Volgers Werk (Untersuchungen über das Phänomen der Erdbeben in der Schweiz, 3 Teile, Gotha 1857—1858) enthält viel Stoff.

[2]) Man findet zwar bei Furrer (Geschichte von Wallis, Sitten 1850, S. 130) folgende Angabe: „Anfangs des Jahres 1348 verfinsterte sich die Sonne plötzlich, und bald darauf entstand ein grosses Erdbeben fast durch ganz Europa, welches manche Städte und Dörfer gänzlich verwüstete und die Einwohner unter dem Schutte der Kirchen, in die sie sich geflüchtet hatten, begrub.“ Der Umstand jedoch, dass kein wallisischer Ort besonders namhaft gemacht wird, deutet darauf hin, dass eben jene Schreckensbotschaft aus einer Chronik in die andere überging.

[3]) v. Gümbel, Das Erdbeben vom 22. Februar 1889 in der Umgegend von Neuburg a. D., diese Sitzungsberichte, 1889, S. 89.

[4]) Bayerland, 1891, S. 371; Reindl, Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern, a. a. O., S. 183. Eine eingehende diplomatische Erörterung über die Bedeutung und den Zusammenhang der beiden in Betracht kommenden Manuskripte hat man von A. Ebner (Die ältesten Spuren geschichtlicher Aufzeichnungen in Straubing, Sammelblätter zur Geschichte der Stadt Straubing, Nr. 164, Nr. 165, Nr. 166, Nr. 197).

[5]) Ehemals galten atmosphärische Vorzeichen der Erdbeben für zweifellos; in Wirklichkeit sind sie höchst problematisch (Kries, De nexu inter terrae motus vel montium ignivomorum eruptiones et statum atmosphaerae, Leipzig 1832).

Kirchtürme und andere hohe Gebäude ins Wanken geraten, die Glocken zum Läuten gekommen seien. Die Fenster hätten geklirrt, das Wasser in Bächen und Flüssen sei über seine Ufer getreten, auch sei es ganz aufgewühlt und trübe geworden. Die Menschen fielen auf der Strasse um. Auch dem Passauer Chronisten zufolge sah man die Leute taumeln; Häuser und Kirchen erlitten arge Beschädigungen. Die Windberger Handschrift[1]) scheint geneigt, in dieser schlimmen Durchbrechung der Alltäglichkeit eine Art Erinnerungsfeier der Bekehrung des Saulus zum Paulus zu erblicken,[2]) und auch der Niederaltaicher Kodex[3]) hebt das Zusammentreffen hervor.[4]) Man könnte nun freilich einwerfen, auch diese Einträge seien, da zumal der Niederaltaicher Gewährsmann zweifellos aus der Windberger Quelle geschöpft hat, zu wenig substantiiert, um sichere Gewähr dafür zu bieten, dass wirklich Bayern unter den Ausläufern des Villacher Erdbebens gelitten hat. Immerhin verträgt sich die hier gegebene Erzählung doch viel zu gut mit anderweitigen Berichten, als dass sich ein ernsthafter Zweifel an ihrer Authentizität ergeben könnte. Die bayerischen Geographen und Historiker hatten ihre eigenen Zeugen,[5]) auf die sie sich berufen konnten, und so lesen wir bei Ertl[6]) eine

---

[1]) Auf der Münchener K. Hof- und Staatsbibliothek befindlich (Cod. lat. M. 23109).

[2]) „Anno Domini · MCCCXLVIII · terremotus magnus factus est in die conversionis sancti pauli apostoli. Unde versus

MC · triplicata, semel · L · minus · I · geminata
Dat terre motum pauli conversio notum
Vespera dum canitur, hec motio sic agitur:
Singula terrentur et castra moventur."

[3]) Im Besitze der Wiener Kaiserl. Hofbibliothek (Cod. membr. fol. 418).

[4]) „Anno Domini · MCCCXLVIII · factus est terre motus magnus in die conversionis sancti pauli hora vespertina."

[5]) Z. B. auch die Münchener Stadtchronik (Wolf, Urkundliche Chronik von München, 2. Band, ebenda 1854, S. 248).

[6]) Ertl, Relationes Curiosae Bavariae ..., Augsburg 1685, S. 13. „Ich finde aber in unseren uralten Bayerischen Jahres-Vorstellungen gleichfalls eine sehr remarquable Geschicht, welche sich nach Bezeugung Apiani" — ist Peter oder Philipp gemeint? — „in dem Jahr 1348.

Darstellung, die sich völlig deckt mit dem, was wir sonst wissen, indem nur für den Zeitpunkt der Hauptphase eine Zwiespältigkeit besteht. Dieselbe wird sich jedoch heben lassen, wenn man sich erinnert, dass das Schwarmbeben mehr als einen Monat andauerte, so dass sehr wohl am 8. Februar auf bayerischem Boden besonders energische Stösse gespürt werden konnten. Des ferneren sind zwei Traktätchen des Vielschreibers Rasch[1]) zu nennen, deren Schilderung,[2]) zumal auch bezüglich

---

den 8. Februarij zu getragen." Oberbayern sei „absonderlich" erschüttert worden, aber auch der „Nordgau" (Oberpfalz von heute) sei nicht leer ausgegangen.

[1]) Von der hier einschlägigen Kompilatorentätigkeit wurde an anderem Orte gehandelt (Günther, Münchener Erdbeben- und Prodigienliteratur in älterer Zeit, Jahrb. f. Münchn. Gesch., 4. Band, S. 241 ff.). Zitiert müssen hier vorzugsweise die beiden nachstehenden Schriftchen von Rasch werden: Von Erdbiden, Etliche Tractät, alte und newe, ... München s. a.; Erdbiden Chronick Nach art eines Calenders, samt einem kurtzen bericht und Catalogo Auctorum, ebenda 1591.

[2]) „Tausend dreyhundert acht und viertzkt,
Ein grosser Erdbidn hat gestürtzt,
Viel Kirchen, Schlösser, Häuser, Baw,
Davon erschrak manch mann und fraw,
Der Villach, Basel und andere Stätt,
In grund und bodn verderbet hett,
Ein Berg umbgfallen schwölt die Drag,
Davon Villach erschwembt erlag,
Basel am Rhein sich selbst zünd an,
Von Erdbiden, und in grund verbrann,
Gross Pestilentz und sterb drauff kam,
Überall vil Leut an zahl hinnam,
Über 40. tag der erdbidn wehrt,
2. Gantzer jar der sterb abkehrt,
Dess must der Jud entgelten schwär,
Als ob er daran schuldig wär."

Die furchtbarste aller deutschen Judenverfolgungen hatte noch im Erdbebenjahre 1348 selber statt. Die Behauptung des Dichters, dass der Bergrutsch die „Drag" (Drau) in ihrem Laufe aufgehalten habe, wird von Rasch später korrigiert (s. o.). Neu ist hier die auf Basel sich beziehende Aussage, eine in den Trümmern ausgekommene Feuersbrunst habe noch schlimmer als das eigentliche Erdbeben gewütet.

der terrestrischen Umwälzungen, völlig in den bereits vorhandenen Rahmen passt. Wir wissen endlich, dass gerade hier jene furchtbaren Folgen des grossen Unglückes, die ganz Süddeutschland betrafen, Seuche und abergläubischer Hass, sich ganz besonders geltend gemacht haben.[1] So kann es denn als festgestellt betrachtet werden: Gesamtbayern, wie es seinem Umfange nach der unlängst verstorbene Ludwig der Bayer hinterlassen hatte, unterlag in der zweiten Hälfte des Winters 1347/48 schweren seismischen Zuckungen. Von Bamberg[2] ist es sichergestellt, dass auch dort Erschütterungen wahrgenommen wurden, und wenn in Frankfurt a. M.[3] am 6. Februar die Erde bebte, so liegt es nahe genug, an eine Fortleitung der seismischen Wellen von der oberen Drau zum unteren Main zu denken. In der beigegebenen Figur (s. die Tafel) wird versucht, den Schütterbezirk möglichst genau zu umgrenzen, indem die innere Kurve das pleistoseiste Gebiet abschliesst; jenseits desselben wurden Bozen und Basel härter als andere Orte mitgenommen. Dass die Donaulinie mit den vier stark erschütterten Städten Regensburg, Straubing,[4]

---

[1] Zschokke, Baierische Geschichten, 2. Band, Aarau 1821, S. 235; Riezler, Geschichte Bayerns, 3. Band, Gotha 1889, S. 23 ff. Der naturkundige Konrad von Megenberg (s. dessen „Buch der Natur," herausgegeben von Pfeiffer, Stuttgart 1861, S. 109) stellte die Hypothese auf, der bald nach dem Erdbeben grassierende „schwarze Tod" sei auf die Gase zurückzuführen, die während des ersteren dem sich öffnenden Boden entströmt seien (Hoeniger, Der Schwarze Tod in Deutschland, Berlin 1882, S. 153 ff.). So dachte er sich wohl auch den Versteinerungsvorgang, der nach der Mitteilung, welche er vom Kanzler Biterolf erhalten, einige Menschen in den steirischen Alpen bei jener Veranlassung betroffen haben sollte; dieselben seien gleichsam in „Salzsäulen" verwandelt worden.

[2] Hoefer, a. a. O., S. 5.

[3] Langenbeck, a. a. O., S. 40.

[4] Die Klöster Windberg und Niederaltaich liegen nicht weit von dieser damals eine gewisse Rolle spielenden Stadt entfernt, und die Annalen ersterer wissen gar viel von Straubing mitzuteilen; auch die Erdbebennachrichten beziehen sich wohl zunächst auf diese Donaustadt.

Passau und Wien sich der Fortleitung sehr günstig erwies, dürfte kaum in Abrede gestellt werden können.

Fragen wir nun nach den genetischen Bedingungen dieser tief greifenden Erschütterung eines so grossen Teiles unseres Kontinentes, so folgt aus der Analyse Hoefers (s. o.), die allen Anforderungen gerecht wird, dass man es, soweit das mehr epizentrale Territorium in Betracht kommt, mit einem geradezu klassisch ausgeprägten Dislokationsbeben zu tun hat.[1]) Sobald jedoch die Verhältnisse für Bayern geprüft werden, wird man wohl nur noch von einem Uebertragungsbeben[2]) sprechen können; in diese Kategorie gehören ja die allermeisten Gleichgewichtsstörungen, welche sich innerhalb unseres engeren Vaterlandes bemerklich machen. Freilich könnte es dann wieder zweifelhaft erscheinen, weshalb die doch viel weiter vom Herde entfernte Gegend von Basel wiederum einem so viel vehementeren Stosse ausgesetzt war. Immerhin gehört das auch tektonisch scharf gekennzeichnete Rheinknie, bei welchem der grosse Grabenbruch zwischen Vogesen und Schwarzwald seinen

---

[1]) E. Suess (Das Antlitz der Erde, erster Band, Prag-Leipzig 1885, S. 347) lässt sich folgendermassen darüber vernehmen: „Blätter mit Verschiebung sind z. B. bei Raibl und im Tale von Weissenfels vorhanden, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass auch das grosse Erdbeben von Villach im Jahre 1348 ein Querbeben gewesen ist.“ Der Schütterbezirk solcher Blattbeben ist aus nahe liegender Ursache immer ein sehr grosser.

[2]) Nicht weniger als 27 Einzelberichte, von denen allerdings nur 3 der Zeit des Unheils selbst entstammen, hat W. Wackernagel (Festschrift zur fünften Säkularfeier des Erdbebens von 1356, Basel 1856) gesammelt und verarbeitet. Des ferneren verbreiteten sich über das Ereignis Merian (Über die in Basel wahrgenommenen Erdbeben, nebst einigen Untersuchungen über Erdbeben im allgemeinen, Basel 1836), Volger (a. a. O., 1. Teil, S. 50 ff.) und Langenbeck (a. a. O., S. 15 ff.). Andererseits ist für die Fachliteratur noch gar nicht ausgenützt worden eine viel Neues bietende Schrift von L. Sieber (Zwei neue Berichte über das Erdbeben von 1356, Basel 1882). Vor allem wichtig ist die zeitgenössische Aufzeichnung des Barfüssermönchs Johannes de Rupescissa, welche die schon mehr bekannte des Dominikaners Konrad von Waltenkofen (in dessen „Alphabetum narrationum“) noch ergänzt.

Anfang nimmt, zu den schwachen Stellen der Erdrinde; hier ist noch keine endgültige Vernarbung, kein dauerhafter Gleichgewichtszustand eingetreten, und es bedarf nur eines schwachen Anstosses, um gleich wieder eine Umlagerung der Schichten herbeizuführen, die sich ihrerseits durch Begleiterscheinungen kundgeben muss. Die Erdbebenwellen durchliefen das stabil gewordene Zwischenland und verursachten nur insoweit Stosseffekte, als dies eine jede oszillatorische Bewegung tun muss; um Basel dagegen wurde ein zwar sekundäres, in seiner Art jedoch selbständiges Beben ausgelöst. Und nicht viel anders mag es sich auch, wie unsere Karte andeutet, für das altvulkanische, jederzeit erregbare Litorale Rom-Neapel verhalten haben.

Das unglückliche Basel war dazu verurteilt, noch lange nicht wieder zur Ruhe zu gelangen. Kleineren Unruhen in dem auf das erste Unglücksjahr folgenden Zeitraume mochte keine grosse Bedeutung beigelegt werden, aber ein zweites, furchtbares Unglück brach schon acht Jahre später über die Stadt herein.[3]) Die lebhaft aufgetragenen Farben in dem vom Bruder Johannes entworfenen Gemälde erinnern allerdings daran, dass es vor fünf und sechs Jahrhunderten üblich war, etwas übertreibende Schilderungen in die Welt zu senden; wenn man indessen auch dementsprechend einige Abzüge macht, bleibt doch noch genug des Entsetzlichen übrig. Als der grossen Mehrzahl der Seismologen erwähntermassen nicht bekannt, soll der Bericht hier textuell wiedergegeben werden.[1])

---

[1]) Jean de Roquetaillade, Vademecum in tribulatione, Intentio XV. „Plurimae solemnes civitates graviter opprimuntur in tribulatione propinqua primo per horribiles terrae motus futuros, quales non fuerunt ab origine mundi, qui erunt inter annum Domini 1360 et 65, quorum imago praecessit hoc anno" — 1356 — „in festo beati Lucae in Alamania in illa famosa imperiali civitate Basilea, quae concussa inaudito terrae motu quasi per decem horas funditus corruit, innumeris habitatoribus interfectis, quoniam erumpens miraculosus ignis de visceribus terrae per triduum, in typum ignis infernalis, reduxit eam in calcem exemplo antiquorum quondam Sodomae et Gomorrhae, LXXV castris circumquaque destructis. Et sacerdos dignus fide, qui vidit oculis suis, haec nobis

Sehr ähnlich, aber doch offensichtlich von einem anderen Zeitgenossen herrührend ist die zweite Mitteilung.[1]) Die Koinzidenz der Erderschütterungen mit Ueberschwemmungen darf kaum als eine zufällige Sache angesehen werden. Was Sebastian Münster von der Katastrophe zu sagen weiss,[2]) hat natürlich nur den Wert einer abgeleiteten Quelle, und ein Gleiches gilt von Wursteisens „Baseler Chronik" aus dem Jahre 1580.[3]) In der ganzen Westschweiz — in Solothurn,

omnia praedicta narravit. . . ." Die Prophezeiung, dass noch mehr Unglücksfälle derselben Art nachkommen würden, stützt sich vielleicht auf die Erdbebenprognose in jener famosen „Epistola de astronomica scientia" (V. Rose, Ptolemaeus und die Schule von Toledo, Hermes, 8. Band, S. 327 ff.), welche von 1322 an viel Staub in der damaligen gebildeten Welt aufwirbeln liess.

[1]) Anonymi Vita Innocentii VI. (Baluzii Vitae Paparum Avenionensium, I), S. 351: „Eodem anno, qui pro tunc erat 1356, in festo beati Lucae Evangelistae fuit magnus terrae motus in civitate et territorio Basiliensi, unde civitas ipsa pene tota corruit et fere LXXX castra et turres circum dictam civitatem ex hoc ad terram sunt prostrata, duravitque quasi per totum illum annum, licet non continue, sed per dilucida intervalla, circa Argentinam, Spiram et Treverim, ac alias civitates prope Rhenum descendendo; fuitque terra in pluribus locis aperta, ex qua alba aqua fervens et sulphurea abundanter emanavit, quae etiam loca admodum fortia ad terram prostravit. Et ex hoc demum subsecuta est aliarum aquarum abundantia maxima turres et muros diruens; et deinde fames valida, et pestilentia magna, ex quibus Alamannia passa est damna infinita." Die Emanationen schwefelhaltigen Wassers legen nahe, zu glauben, dass sich jene Schlammvulkane in der Rheinebene gebildet hätten, wie man sie (Hoernes, a. a. O., S. 210 ff.) z. B. vom Agramer Erdbeben her kennt.

[2]) Seb. Münster, Cosmographey, Basel 1564, S. 598. Hier wird rühmend der brüderlichen Hilfe gedacht, welche die Bewohner des Oberelsasses und des Breisgaus der nachbarlichen Stadt bereitwillig zu teil werden liessen, um die Folgen des schweren Schicksalschlages nach Kräften zu mildern.

[3]) Dieselbe gibt u. a. ein anscheinend sehr genaues Verzeichnis aller der Burgen, Flecken und Dörfer, welche der erste Tag des Schwarmbebens — denn ein solches ist es nach unserem Anonymus gewesen — in Trümmer legte. Am meisten hat danach die Birstallinie gelitten, eine alte tektonische, wiewohl durch die Erosion erheblich verbreiterte und veränderte Kluft im nordwestlichen Jura.

Yverdun, Lausanne, Genf, Aarau — empfand man die Wirkungen des Baseler Erdbebens,[1]) nicht minder am Bodensee, im Elsass und in der Rheinpfalz; als äusserster Grenzposten des erschütterten Gebietes im Nordwesten erscheint Trier.

Aber auch ins diesseitige Bayern griffen die Schwingungen des Bodens hinüber. Dass insonderheit Rothenburg o. T. von ihnen berührt wurde, ist schon länger bekannt, obgleich über die nachhaltige Aktion dieses Bebens, welche für die fränkische Reichsstadt sehr segensreich gewesen sein soll, ganz verbürgte Nachrichten nicht vorliegen.[2]) Dagegen sind auch jetzt die Windberger und die von ihr beeinflusste Niederaltaicher Handschrift (s. o.) unverwerfliche Zeugen.[3]) Auch das Erdbeben von 1356 hat somit Bayern in Mitleidenschaft gezogen, nur jedoch in der gewohnten Form eines Relaisbebens.

II. Die Seismizität der Riesmulde.

Wie schon erwähnt, entbehrt das rechtsrheinische Bayern[4]) fast ganz solcher Bezirke, welche als selbständige Schüttergebiete anzusprechen wären. Aus den Alpen, aus dem Böhmer-

---

[1]) J. J. Scheuchzers Hauptwerk (Beschreibung der Naturgeschichten des Schweizerlandes, Zürich 1706—1718) enthält auch einen Erdbebenkatalog („Historische Beschreibung aller Erdbidmen, welche in dem Schweizerlande von Zeit zu Zeit gespürt worden“, 1. Band, S. 123 ff.). Für das vom Epizentrum wenig abliegende, heftig mitgenommene Solothurn ist Hafners Chronik dieser Stadt zu vergleichen.

[2]) v. Gümbel, a. a. O., S. 89; Volger, a. a. O., 1. Band, S. 53.

[3]) Die Windberger Handschrift besagt: „MCCCLVI to iterum factus est terremotus magnus in die sancti Luce Evangeliste in gallicantu noctis.“ Der Mönch von Niederaltaich übernahm diesen Passus mit ein paar grammatischen Schnitzern; sein Eintrag lautet: „Anno eodem factus est iterum terre motus in die sancti Luce evangeliste in gallicantus prima noctis.“ In Basel hatte das Erdbeben am Tage statt; die Wellen kamen an der oberen Donau erst in der darauf folgenden Nacht an.

[4]) Bayern links des Rheines gehört ganz und gar jenen Gebirgsländern an, deren Tektonik in erster Linie durch die grosse Grabensenkung des Rheins bestimmt ist. Seine seismischen Verhältnisse unterscheiden sich nicht von denen des Elsasses.

walde, aus dem Erzgebirge und aus den altvulkanischen Regionen der Hohen Rhön und des Vogelsberges ziehen nicht selten seismische Wellen über die Grenze, ohne zumeist irgendwelche tiefere Wirkung hervorzubringen. Der Fall des Neuburger Erdbebens vom Jahre 1889, welches v. Gümbel in der früher angeführten Abhandlung als Einsturzbeben definierte, stand isoliert da. Nur ein einziger Distrikt macht eine Ausnahme, indem dort ziemlich häufig Erdbeben von nicht ganz geringer Intensität verzeichnet wurden und noch werden, die mitunter über einen verhältnismässig beschränkten Raum nicht hinausgegriffen zu haben scheinen; folglich gehört das Epizentrum in diesen Bezirk selbst hinein. Dies ist die unter dem Namen Ries bekannte und neuerdings zu einem sehr dankbaren geologischen Untersuchungsobjekte gewordene Einsenkung an der bayerisch-württembergischen Grenze. Wir werden gewiss am besten tun, wenn wir zunächst den Tatbestand möglichst genau feststellen und sodann den Ursachen dieser in einem so erdbebenarmen Lande geradezu auffallenden Erscheinung nachzugehen suchen. Einen dankenswerten Anhaltspunkt für beide Aufgaben gewährt C. Grubers Ries-Monographie,[1]) welche auch kurz auf die Erdbebenfrage eingeht. Da sich diese Angaben jedoch nur auf die aus der grössten Stadt des Rieses, aus Nördlingen, überlieferten Meldungen stützen, so liessen sich die einschlägigen Daten, wenn man auch andere Zeitberichte hinzunahm, nicht unwesentlich vermehren. Nachstehend soll das gesamte Material in chronologischer Reihenfolge vorgeführt werden.

1471. Angeblich stürzte der Turm der Stadtpfarrkirche zu Nördlingen infolge eines Erdstosses ein.[2])

1511. In Nördlingen und an anderen Riesorten fand ein Erdbeben statt.[3])

---

[1]) C. Gruber, Das Ries, eine geographisch-volkswirtschaftliche Studie, Stuttgart 1899, S. 39.

[2]) v. Gümbel, a. a. O., S. 88.

[3]) Am selben Tage (27. März) bebte nach Hoefer (a. a. O., S. 10 ff.) die Erde heftig in Kärnten, Görz und Gradisca, im Friaul (Gemona) und

1517. Das heftige Erdbeben, unter welchem Nördlingen am 26. Juni 1517 litt, ist besser als die beiden früheren beglaubigt. Es soll abermals zum Einsturze des Turmes einer Kirche geführt haben. Diesmal handelt es sich aber nur um die kleine St. Emeramskirche, welche auf einem neben der südlichen Stadtmauer aufsteigenden Hügel lag und in den Stürmen des dreissigjährigen Krieges, der 1634 so furchtbares Unheil über die wehrhafte Stadt brachte, vom Angesichte der Erde verschwunden ist. Der Chronist Weng lässt den Vorgang mit einem entsetzlichen Orkane seinen Anfang nehmen; bei dem Chronisten Kissling gewinnt man sogar den Eindruck, als sei die Windsbraut das eigentlich entscheidende Moment gewesen.[1]) Auch nach der von Münster[2]) uns aufbehaltenen Darlegung eines Augenzeugen ist nicht vollständige Klarheit darüber zu erbringen, ob man es wirklich mit einem endogenen und nicht am Ende bloss mit einem atmosphärischen Ereignis zu tun hat. Wir behandeln deswegen das, was sich 1517 zugetragen hat, mit einiger Reserve.

---

im Triestiner Küstenlande (Muggia); in Tolmein brachen zwei befestigte Schlösser zusammen. Vielleicht lagen die Dinge ähnlich, wie 1348 in Basel; das Riesbeben wäre danach ursprünglich ein Übertragungsbeben gewesen, allein der hinreichend kräftige Impuls liess die schlummernden Kräfte zu allerdings vorübergehendem Leben erwachen.

[1]) Vgl. v. Gümbel, a. a. O., S. 89.

[2]) Seb. Münster, a. a. O., S. 86. Es wird dort von Nördlingen gesagt, es sei der Stadt „uff 16 Brachmonats" — es ist offenbar 26. zu lesen — „durch einen grausamen sturmwind und erdbidem für schaden zugestanden, der jne jr rechte pfarrkirchen zu S. Emeran allerdings auff der erden und im grund umbgeworffen, auch in der stadt und innerhalb zweier meilen wegs um Nördlingen 2000 gezelter heuser und stadel umgerissen, und darzu in jren wälden und gärten unzalbaren bäum mit wurtzen außgezogen, wie dann auch wenig thürm kirchen und andere gemeür unzerscholt, auch wenig gärten unbeschedigt bliben, aber wol in etlichen gärten kein baum aufrecht glasen ist." Auch das phantastische Bildchen, welches Münster seinem Werke einverleibt hat, und welches alle Greuel einer in sich selbst zusammenbrechenden Stadt zur Anschauung bringen möchte, liesse sich ebensowohl mit einem Tornado, wie mit Erdstössen vereinbaren.

1590. Das Septemberbeben dieses Jahres ist durch die Chronisten Weng[1]) und Lemp[2]) sicher gestellt; es war jedoch kein örtliches, sondern es nahm nur der Rieskessel an einem weit ausgedehnten Erzitterungsakte teil. Zumal aus Schlesien fehlt es nicht an einschlägigen Kundgebungen,[3]) und in Wien schien der Stephansturm in Gefahr zu sein.

1601. Kissling verlegt das Erdbeben dieses Jahres auf den 27. November, wogegen nach Lemp vielmehr der 7. September der kritische Tag gewesen wäre. Am 7. und 8. d. M. merkte man Erzitterungen des Bodens in München, Augsburg, Speyer, Frankfurt a. M.,[4]) am stärksten aber in Basel,[5]) das so oft sein Teil abbekam.

1670. Stärkeres Beben des 7. Juli. Zweifellos kein Lokalbeben, da es auch in Augsburg, Donauwörth und Nürnberg bemerkt ward.[6])

---

[1]) „Grosses Erdbeben zu Nördlingen im Monat September, welches sonderlich grossen Schaden getan haben soll.“

[2]) „Es hat auch im Monat Septembri zu Wien in Österreich umb den 12—13 hujus mensis, wie auch allhier zu Nördlingen und anderen Orten mehr gespürt worden, grosse Erdbeben geben, welche etlicher Orten sonderlich grossen Schaden getan haben.“

[3]) Vgl. H. F. Klein, Jahrbuch der Astronomie und Geophysik, 13. Jahrgang, Leipzig 1902, S. 192. Glatz und Lauban scheinen am stärksten betroffen worden sein, Breslau wurde nur schwächer berührt.

[4]) v. Gümbel, a. a. O., S. 91; Reindl, Die Erdbeben der geschichtlichen Zeit im Königreiche Bayern, Erdbebenwarte (von Belar), 2. Jahrgang, Nr. 11 und 12.

[5]) Merian, a. a. O., S. 7; Volger, a. a. O., 1. Teil, S. 81 ff. An diesem Orte wird mit gutem Rechte die unkritische Leichtgläubigkeit der Annalenschreiber und Derer getadelt, welche jenen vollauf Vertrauen schenken. Nur eine Redensart ist es, wenn behauptet wird, es habe „ganz Europa und Asien“ gebebt.

[6]) Als äusserster Punkt, der noch in der Erschütterungsarea lag, wird Venedig bezeichnet (v. Hoff-Berghaus, Geschichte der durch Überlieferung nachgewiesenen natürlichen Veränderungen der Oberfläche der Erde, 4. Band, Berlin 1840, S. 322 ff.). Von der Erschütterung Nürnbergs berichtet der ungenannte Verfasser einer Gelegenheitsschrift (Terra tremens, die zitternde oder bebende Erde, Nürnberg 1670), von derjenigen Regensburgs Gumpelzhaimer (Regensburgs Geschichte, Sagen und Merkwür-

1690. Weng schreibt, dass am 24. November, nachts zwischen 3 und 4 Uhr, ein Erdbeben von hunderten der Nördlinger Bürger konstatiert worden sei. Der Stadttürmer fürchtete, sein Turm, dessen Glocken von selbst anschlugen, werde mit ihm zusammenstürzen. In Hohentrüdingen, am Rande des Riesbeckens, waren die Stösse ziemlich kräftig, und in einem benachbarten Hügel sollen sich Risse und Klüfte gezeigt haben.[1]) Die im westlichen Ries gelegene Stadt Bopfingen will ein längeres Ausbleiben des Wassers der Brunnen konstatiert haben, welches hernach mit ganz unerhörter Wucht den Röhren entströmt sei.[2]) Städte des gegenwärtigen Königreiches, in denen man Zuckungen verspürte, waren München, Augsburg, Regensburg, Passau, Straubing, Ingolstadt, Nürnberg, Rothenburg o. T., Kulmbach und Bayreuth.

1728. Für das Erdbeben, welches sich am 3. August d. J. ereignete, sind bei v. Gümbel[3]) Anzeigen vom Oberrhein, von der Schweiz und von der Pfalz — u. a. fünf Stösse in Aschaffenburg —, nicht aber vom Ries zu finden. Es steht jedoch im Kirchenbuche von Lehmingen folgende Eintragung des damaligen Pfarrers J. P. Frank zu lesen:[4]) „Am 3tenn Augusti wurde auff vieler Observation sowohl in der nahe liegenden Residenzstadt[5]) Öttingen, als auch allhier zu Lehmingen ein Erdbeben verspüret, welches aus einer Windstille, da dennoch der Erdboden und die darauff stehende Gebäude erschüttert, wollen geschlossen werden. geschrieben Lehmingen 1728.“

---

digkeiten, Regensburg 1830). Vgl. auch die Zeitschrift „Der Sammler“ (1903, S. 44). In Norddeutschland reichten leichte Zuckungen bis Wildungen (Waldeck). Hoefer hat (a. a. O.) dieses Erdbeben, seit 1348 das räumlich umfassendste im zentralen Europa, einlässlich abgehandelt.

1) Bayerland, 1903, S. 408.

2) Hoefer, a. a. O., S. 13.

3) v. Gümbel, a. a. O., S. 93.

4) Mitteilung von Hrn. Präparandenlehrer E. Wieser in Wassertrüdingen.

5) Von 1781 ab Sitz der Fürsten der vereinigten Linien Öttingen-Öttingen und Öttingen-Spielberg, ging die Stadt nebst dem ganzen Fürstentum 1806 kraft der Rheinbundsakte an die Krone Bayern über.

1755. Am 1. November sank bekanntlich Portugals stolze Hauptstadt in Trümmer. Ob man an einen Zusammenhang des Riesbebens vom 8. Dezember mit jener in den seismischen Jahrbüchern Europas einzig dastehenden Episode zu denken habe,[1]) muss dahingestellt bleiben. Jedenfalls bedürfte diese „Flutverspätung" einer besonderen Erklärung. Im ganzen liegt doch die Annahme eines regionalen Riesbebens näher, da insonderheit auch am 19. gleichen Monates Harburg, Donauwörth und Nördlingen betroffen wurden.[2]) Die Erschütterung des 8. Dezember machte sich am stärksten geltend im nördlichen Ries.[3])

1756. Während am 18. und 19. Februar bei Aachen und in der Eifel, diesem durch und durch vulkanischen Gebirge, die Erde sich bewegte,[4]) erzitterte das ganze Ries unter energischen Stössen.[5]) Solche sind auch in Worms, Nürnberg und Erlangen wahrgenommen worden.

---

[1]) Betreffs der Verbreitung dieses gigantischen Erdbebens ist die oben zitierte Abhandlung von Woerle und ebenso eine solche aus neuester Zeit (Das grosse Erdbeben von Lissabon und die Thermalquellen von Teplitz (Mitteil. d. K. K. Geolog. Reichsanstalt, 1900, Nr. 2) nachzusehen.

[2]) Chronik des Klosters Kaisheim (an der südöstl. Riesumrandung).

[3]) Im fürstlichen Archive zu Wallerstein befindet sich eine Meldung des Oberamtmanns von Alerheim an den Grafen Philipp Karl von Öttingen-Wallerstein (10. Dezember 1755): „Letzt verwichenen Mondtag nachmittags zwischen 2 und 3 Uhren hat man hier sowohl im Amthauß und obern Schloß eine Ererschütterung gespühret, die denen gesessenen Personen wie mir selbst begegnet, samt dem Stuhl eine zimml. Bewegung gemachet, und ist diese Erschütterung in weniger als einer halben Minute zu zweyen mahlen geschehen, so jedoch, Gott lob! weiter kein Schaden erreget. Inzwischen vernehme, dass zu gleicher Zeit in Öttingen solche Erschütterung weit hefftiger wie dahier gespühret, so dass die Kirch-Türen gewackelt" (Mitteilung von Hrn. Stadtpfarrer Bachschmid in Wallerstein). Vgl. auch ein Schriftchen von Michel (Der Öttingischen Bibliothek zweyter Teil, Öttingen 1762).

[4]) Fuchs, a. a. O., S. 159; Chronik der Stadt Donauwörth (1796).

[5]) v. Gümbel, a. a. O., S. 94.

1769. Für das Beben vom Nachmittag des 4. August können wir uns auf eine authentische Berichterstattung[1]) von ersichtlich grösserer Genauigkeit berufen. „1769 ♀ den 4. August Nachmittag gleich nach 4. um ein Viertel auf 5. Uhr verspührte man in unsern Gegenden abermalen ein Erdbeben. Der Stoss erschütterte fast die ganze Stadt Öttingen, dass viele Leute taumelnd aus den Häusern gelaufen, das Geflügel in einigen Höfen in die Höhe geflogen, auf dem Rathhaus die Glocken angeschlagen u. s. w., wobey besonders auf dem Hauptthurm der Stadt, auf dem Thurm bei St. Jakob, nicht das mindeste davon bemerkt worden,[2]) da es doch rings umher das Fürstl. Schloss und übrige Häuser merklich erschütterte. — In Harburg[3]) war das Erdbeben noch fühlbar, und bemerkte man das Getöse sowohl vor als während der Erschütterung weit stärker, als in Öttingen, wie es auch gegen 9 Sekunden, fast ein paar Sekunden länger gedauert hat. Zu Donauwerth verspürte man mehrere Stösse, und eine Andauer von 10 Sekunden. Verschiedene Häuser bekamen Ritze, und 2 Häuser wurden gespalten, die Ziegel von vielen Dächern herabgeworfen, und 3 Kamine eingestürzt. Einen Augenblick vor der Erschütterung hörte man einen Donner, und während demselben war das unterirdische Getöse sehr deutlich zu vernehmen. Der ‚Patriot in Bayern‘ äussert St. 7 auf dies Jahr S. 67 seine Gedanken über dieses Erdbeben, welches auch in München und tief ins Land hinein verspüret worden, und weiter St. 8 S. 113. Die

---

1) Michel, Beiträge zur Öttingischen politischen, kirchlichen und gelehrten Geschichte, 1. Teil, Öttingen 1779, S. 75 ff.

2) Sollte dies ein Seitenstück sein zu der oft gemachten Erfahrung (Günther, Handbuch der Geophysik, 1. Band, Stuttgart 1899, S. 445), dass sich die Bergwerke gegen Erdstösse nicht selten ganz anders als die benachbarten Teile der Oberfläche verhalten, indem einmal die Bergleute erschreckt werden, während aussen Alles in Ruhe verharrte, und ein anderes mal wieder die Zuckungen des Bodens nicht bis in die Gruben hinabreichten?

3) Harburg ist am südöstlichen Riesrande gelegen, nicht sehr entfernt von der erdgeschichtlich bemerkenswerten Stelle des Durchbruches der Wörnitz durch das vorgelagerte Juragebirge.

‚Nördl. wochentl. Nachrichten' auf dies 1769. Jahr liefern auch N. 36, 38 . . . 41 in gel. eine Beschreibung davon." Diese Art und Weise, über eine doch sehr rasch verlaufene Naturerscheinung zu referieren, zeichnet sich in ihrem Streben nach Genauigkeit vorteilhaft vor anderen Gepflogenheiten früherer — und auch noch späterer — Zeit aus. Das Erdbeben wurde nach v. Gümbel[1]) im westlichen Bayern an vielen Orten, nirgends aber in sehr grosser Entfernung von der Gegend, wo es sich am entschiedensten betätigte, bemerkt, und es ist damit eine grosse Wahrscheinlichkeit dafür gewonnen, dass das Epizentrum dem Ries selbst angehört hat.

1771. Dieses Beben war ein allgemeineres. Korrespondenznachrichten liegen vor[2]) von Luzern nebst Umgegend, von Einsiedeln, von Zürich, aus dem Thurgau, von Memmingen, Schaffhausen, Stuttgart, Durlach und Augsburg. Im Ries trat es minder erschreckend auf;[3]) doch wohl eben, weil es sozusagen hier nicht heimatberechtigt war.

1774. Wiederum kein ausgeprägt regionales Beben;[4])

---

[1]) v. Gümbel, a. a. O., S. 95. „Am 4. August abends 4 Uhr heftige Stösse während 17 Minuten zu Augsburg, Günzburg, Ulm, Nürnberg. Das grosse Erdbeben zu Eichstätt und Berching vom Jahre 1769 dürfte damit zusammenfallen." Die Entfernung des im Altmühltale gelegenen Städtchens Berching von Nördlingen beträgt etwa 70, die Distanz zwischen Nördlingen und Ulm ungefähr 60 km. Der Schütterkreis des Rieses hätte sich also nur etwas erweitert gehabt.

[2]) Gesammelt wurden dieselben von Volger (a. a. O., 1. Teil, S. 204 ff.).

[3]) Michel, Beiträge u. s. w., 1. Teil, S. 78 ff. „Den 11. August, war Dom. II. post Trin., verspürte man wieder bey sehr geschwülem Himmel, vormittags um 9 Uhr, da man eben in der Kyrche hier bey uns" — in Öttingen — war, ein Erdbeben, welches manche in der Kirche mit Schrecken gefühlt. Es war nicht so stark, wie das letztere bey uns; desto stärker und empfindlicher aber in vielen andern benachbarten Ländern und Städten."

[4]) Michel, a. a. O., 2. Teil, S. 252 ff. „Den 10. September verspürte man zwischen 4 und 5 Uhr in Öttingen bei einer Stille und hellem Wetter abermalen ein Erdbeben. Der Stadtturm wankte, und die Glocken darauf bewegten sich bis zum Anschlagen. Im fürstlichen Schloss wurde der Stoss merklich verspühret, wie auch in vielen andern Gegenden und

von auswärts erfuhr man schon bald, dass auch an anderen Orten die Erde sich in lebhafter Unruhe befunden habe. Aus Volgers Zusammenstellung[1]) ist zu ersehen, dass die Erdbebenbewegung schon in den Morgenstunden des fraglichen Tages im Kanton Uri begann und nach 4 Uhr bereits den neunten Grad der Skale von De Rossi-Forel erreicht hatte. Um dieselbe Zeit fing dann auch die Nordschweiz zu erzittern an; zwischen 4 und 5 Uhr reagierte ferner bereits der Boden in Strassburg, Belfort, Ansbach, Regensburg. Altdorf und das Gelände am Vierwaldstätter See erreichte den Beharrungszustand noch mehrere Tage nicht, aber das Übertragungsbeben verlor die ihm übermittelte Energie noch am nämlichen Tage.

1778. Ein echtes Riesbeben; denn nur in Augsburg und Ulm fühlte man Stösse, die zweifellos Ausläufer einer Epizentralbewegung des Rieses war, und ausserdem in Orten, die diesem mehr oder weniger nahe angehören.[2]) Die sonst so

Häusern der Stadt. Innerhalb 50 Jahren ist dies schon das 5. Erdbeben in unseren Gegenden. Gedachtes Erdbeben verspührte man um eben diese Zeit an den mehresten Orten unseres Landes, besonders aber wurde es in der Schweitz mit Schrecken bemerkt. Der Stoss dauerte etliche Sekunden; die Richtung des Erdbebens war von Süden nach Norden." Michel spielt oben an auf die fünf Beben von 1755, 1756, 1769, 1771, 1774; er hätte auch 1728 hinzunehmen sollen.

[1]) Volger, a. a. O., 1. Teil, S. 207 ff. In Altdorf wurden fast alle Gebäude beschädigt, und einzelne Häuser fielen ein.

[2]) Wieder ist Michel (a. a. O., 3. Teil, S. 58) unser Gewährsmann. „1778 verspürte man am 22. May hier abermalen frühe um 3 Viertel auf 3 Uhr ein Erdbeben, welches von Mittag her gegen Morgen hingieng. Hier in der Stadt vermerkte man dasselbe nur an einigen Orten, zu Harburg aber und auf dem ganzen Hertsfeld, wurde davon, wie auch zu Wemdingen, Donauwörth, Augsburg, Ulm u. s. w. ein heftiger Stoss empfunden, worauf ein etwas minderer erfolgt. — Doch ging alles ohne Schaden ab. Man hatte vorher eine warme Luft und Windstille, hernach etwas kalte Witterung und nach etlichen Tagen Regenwetter. (S. unter diesem Abschnitt die Ött. Bibliothek samt diesen Beytr. nach.) Hr. Superint. Angerer zu Harburg gab mir eine nähere Nachricht von diesem Erdbeben, wie es daselbsten Einige, die auch dadurch teils aus dem Schlafe erweckt worden sind, bemerkt und empfunden haben, nämlich dass man bey dem ersten Stoss ein Geräusche in der Luft gehört,

lebendige Schweiz hatte damals eines ihrer seltenen Ruhejahre, und auch im übrigen Deutschland wurde nichts Auffälliges verzeichnet.

1787. Am 27. August d. J. — um den Peissenberg herum angeblich[1]) bereits am 26. — hatten Unterwalden, Luzern, Basel, Strassburg, Innsbruck, München, Kempten, Dillingen a. D., Pappenheim, Ansbach, Stuttgart einen Erdbebentag.[2]) Das Ries verblieb einstweilen noch indifferent. Dafür jedoch setzte die Aktion hier um einen Tag verspätet ein;[3]) wir wissen, dass Donauwörth, Harburg und Monheim berührt wurden.

1822. Nördlingen hatte am 26. November ein Erdbeben.[4]) Inwieweit man mit ihm dasjenige in Verbindung zu bringen hat, welches sich zwei Tage später in München und Tübingen, sowie im ganzen Rheintale zwischen Heidelberg und Basel meldete,[5]) bleibt eine offene Frage.

1855. Dieser Erschütterungsprozess zog ganz Südwestdeutschland und die Westalpen in Mitleidenschaft. Schon am 24. Juli spuckte es allenthalben in der Schweiz,[6]) und am 25. brach

---

wie wenn ein grosser Flug Staaren auf einer Haide aufsteht, — darauf ein starkes Schwanken erfolgte, so dass sich an allen denen Orten im Schlosse und Markt, wo dasselbe verspürt worden, alles aufgestellte Geräte in den Zimmern und Stuben bewegte, aber nirgend etwas beschädigte.“ Das hier genannte Härdtfeldt (Mittelpunkt Neresheim) stellt die westliche Riesumrandung ab, die sich nach Württemberg hineinzieht.

[1]) Volger, a. a. O., 1. Teil, S. 226.

[2]) Langenbeck, a. a. O., S. 42.

[3]) Die Monheimer Chronik (1802) notiert am 28. August Stösse in Donauwörth, Harburg und Monheim. Letzteres gehört dem sogenannten „Vorries“ im Osten der Riesmulde an und liegt bereits auf dem westlichen Abhange des Juraplateaus.

[4]) v. Gümbel, a. a. O., S. 97.

[5]) Langenbeck, a. a. O., S. 46 ff.; Volger, a. a. O., 1. Teil, S. 224 ff.

[6]) Volger, a. a. O., 3. Teil, S. 54 ff. Eben diese Kette verderblicher Vorfälle hatte den Frankfurter Geologen zur Abfassung seines hier mehrfach benützten Werkes veranlasst, dessen drei Teile folgeweise die schweizerischen Erdbeben überhaupt, den geologischen Bau des Kantons Wallis und endlich das Walliser Schwarmbeben von 1855 abhandeln.

über das Oberwallis jene verheerende Katastrophe herein, der für Europa im XIX. Jahrhundert kaum eine andere, selbst Nizza, Agram und Laibach nicht ausgenommen, an die Seite zu stellen sein möchte.[1]) Im übrigen Deutschland hatten Koburg, Stuttgart, Zweibrücken und Saarbrücken die Relaisstösse gefühlt; am 25. Juli erbebten Donauwörth, Harburg und Bissingen, drei südöstlich vom Riesrande gelegene Orte.[2]) Auch Ingolstadt wurde leicht betroffen.

1889. Im April d. J. erlebte das Vorries (Wemding, Bissingen, Donauwörth) ein ausgesprochenes Erdbeben. Gleichzeitig machte sich ein Erregungszustand im ganzen Donautale zwischen Ulm und Donauwörth bemerkbar.[3])

1903. Die zweite und dritte Augustpentade waren ausserordentlich erdbebenreich, und zwar nicht nur in unserem Erdteile.[4]) Da konnte auch das Ries sich der Mitwirkung nicht

---

[1]) Ausser der mustergültig eingehenden Schilderung Volgers hat man Erörterungen der Oberwalliser Ereignisse auch von Noeggerath (Die Erdbeben im Visptale, Köln a. Rh. 1855; separat aus der „Köln. Zeitung"), Favre (Mémoire sur les tremblements de terre ressentis en 1855, Arch. des sciences phys. et natur., XXXIII, S. 309 ff.) und Langenbeck (a. a. O., S. 58 ff.).

[2]) v. Gümbel, a. a. O, S. 99. Auch im Donauwörther Stadtarchive ist ein hierauf bezüglicher Vermerk zu finden.

[3]) Reindl, Beiträge u. s. w., S. 185.

[4]) Die nachstehend mitgeteilten Nachrichten entstammen teils politischen Blättern, die einzeln sämtlich anzuführen zu weitläufig wäre, teils auch den periodischen Berichten der in neuester Zeit trefflich funktionierenden seismischen Stationen (Strassburg i. E., Hamburg, Laibach). Am 11. August war stärker beunruhigt die ganze Insel Sizilien (Milazzo, Messina, Syrakus, Catania); ebenso gab es Erschütterungen in einem grossen Teile Unteritaliens (Bari, Lecce, Tarent, Umgebung von Neapel, wie denn auch eine Spaltung des Auswurfskegels am Vesuv eintrat). Aus dem nördlichen Italien (östliche Riviera) liefen gleichfalls derartige Nachrichten ein. In Griechenland empfand man am 11. August einen leichteren Choc in Athen, drei schwerere Stösse auf der Insel Cythera (Cerigo), wo drei Dörfer zerstört worden sein sollen. In Südtirol wurde der rechte Hang des Nonsberges betroffen. Ob man auch das Lissaboner Erdbeben vom 9. August beizählen soll, bleibt unentschieden; jedenfalls aber darf die gewaltige Erschütterung Südamerikas an den beiden nächst-

entziehen. Eine erste Zeitungsnachricht[1]) gab folgendes bekannt: „Am 11. August früh 5 Uhr wurden im Ries zwei leichte Erdstösse verspürt. Namentlich in Nördlingen und in den nahe gelegenen Ortschaften Kleinerdlingen, Nähermemmingen und Wallerstein wurden die Stösse so fest wahrgenommen, dass die Hausglocken von selbst läuteten. Auch in Wemding wollen einige Bewohner die Erzitterung verspürt haben.“ Persönliche Erkundigung brachte aus Wallerstein nur ein negatives Ergebnis ein; aus anderen Orten (zumal aus Nördlingen, briefliche Mitteilung von Herrn Geistl. Rat Wildegger) kamen dagegen Bestätigungen. Dieselben gestatteten die Herstellung folgender Übersicht:

Ort	Zeit	Stossrichtung	Dauer des Bebens	Zahl der Stösse
Nähermemmingen	5^h—6^h früh	—	4^s	2
Kleinerdlingen	5^h – 6^h	von unten nach oben	—	2
Herkheim	5^h—6^h	—	—	—
Hürnheim	5^h	—	—	2
Hohenaltheim	5^h 30^m	—	5^s	3
Amerdingen	6^h	von unten nach oben	—	—
Harburg	5^h—6^h	—	—	2

Das Beben würde danach, worauf noch zurückzukommen sein wird, mit Entschiedenheit in die Klasse der sukkussorischen eingeordnet werden müssen.

folgenden Tagen kausal mit den südeuropäischen Vorkommnissen verknüpft werden. Am 12. August erlitt die blühende Stadt Mendoza, am Ostabfalle der Anden nächst dem Uspallata-Passe gelegen und nur langsam aus den Ruinen entstanden, die eine 1861 eingetretene seismische Verheerung bewirkt hatte, einen harten Schlag durch ein erneutes Beben, dem zahlreiche Häuser, ein Kirchturm und fünf Menschenleben zum Opfer fielen. Auch sonst war Argentinien in der angegebenen Zeit der Schauplatz von Erderschütterungen. In diesem Falle erscheint somit unser Ries als ein zwar schwächeres, aber doch immer integrierendes Glied in einen die halbe Erde umspannenden Erdbebenkomplex eingeordnet.

[1]) Neues Münchener Tagblatt, 1903, Nr. 230/31.

Hiemit wäre denn unser augenblickliches Wissen von den Ries-Beben erschöpft, wobei freilich nicht vergessen werden darf, dass auch die eifrigste Spürtätigkeit ihre Abhängigkeit vom Zufalle nicht verleugnen kann. Die Auffindung neuer Dokumente wird manche Ergänzung, wohl auch Berichtigung zu liefern imstande sein, obwohl kaum daran zu denken ist, dass sich jemals ein in den Hauptzügen verändertes Bild werde zeichnen lassen. Zu allererst wäre es wünschenswert, das Ries hinfort unter dauernder seismischer Kontrolle zu halten. Zu dem Ende ist die Begründung einer Station II. Ordnung notwendig, aber auch hinreichend. Denn es kann sich nicht darum handeln, mikroseismische Fernbeben mittelst jener höchst exakten Pendelapparate zu registrieren, welche uns die Neuzeit zur Verfügung gestellt hat; es genügt vielmehr ein Instrument, welches in erster Linie die lokalen Nahbeben und in zweiter die makroseismischen Fernbeben festzuhalten geeignet ist. Von dem manometrischen Apparate des italienischen Seismologen Oddone[1]) ist es bekannt, dass er gegen Nahbeben sich sehr empfindlich verhält, und da es auch möglich ist, denselben mit automatischer Aufzeichnung auszurüsten, so würde man in Zukunft in die Lage versetzt sein, sich über die zwei verschiedenen Gattungen seismischer Kraftäusserung, welche dem Rieskessel eigentümlich sind, fortlaufend und mit einer gegen die bisherige Sammlung von Zeugenaussagen ganz beträchtlich vervollkommneten Präzision zu unterrichten.

Dass es nämlich zweierlei Gattungen gibt, ist durch unsere retrospektive Erörterung mindestens in hohem Grade wahrscheinlich geworden. Es kommen im Ries Erdstösse vor, die zwar auch in einem mehr oder minder ausgedehnten Umkreise empfunden werden, ihr Epizentrum und ihren Herd aber zweifellos innerhalb der Peripherie des Beckens haben. Auf

---

[1]) Oddone, Ricerche strumentali in sismometria con apparati non pendolari, Bullettino della Società Sismologica Italiana, 1900, S. 168 ff.; Recherches en séismométrie avec des appareils non pendulaires, Verhandl. d. 1. Internat. Seismol. Konferenz zu Strassburg, Leipzig 1902, S. 259 ff.

der anderen Seite finden Übertragungsbecken im Ries gewissermassen eine bereitwillige Resonanz; mögen nun erstere, wie es die Regel ist, aus dem Süden oder auch aus Osten und Westen [1]) herandringen, immer wird das uralte habituelle Stossgebiet rasch und entschieden in die Bewegung hineingezogen. Kein grösseres schweizerisches Beben, dem nicht auch eine Beunruhigung des Riesgeländes entspräche! Man muss zugestehen, dass diejenigen Teile der Erdkruste, in welche die Mulde eingesenkt erscheint, noch keine statische Permanenz erlangt haben, sondern sich noch immer im labilen Zustande befinden, dass also die Zeit der intrakrustalen Gleichgewichtsstörungen, welche für Bayern diesseits des Rheins sonst so gut wie abgeschlossen ist, an dieser Erdstelle ihr Ende noch nicht erreicht hat. Und das kann auch in keiner Weise wundernehmen, weil ja das Ries, wie man schon seit geraumer Zeit im allgemeinen weiss, in unseren Tagen aber erst näher zu erforschen Gelegenheit hatte, ein durch und durch vulkanisches Terrain darstellt. Darauf nun, dass im Bereiche anscheinend erloschener Vulkantätigkeit die seismischen Kräfte nur schlummern und sehr leicht zu erneuten, wenngleich nur kurzlebigen Betätigungen ihres Daseins erweckt werden können, wurde wiederholt aufmerksam gemacht, so u. a. von Ratzel[2]) mit Hinweis auf die Zustände im westlichen Nordamerika. Auch für Südamerika und für die Randgebiete des Toten Meeres, in denen sich, wie die Namen Sodom und Gomorrha bekunden, zum öfteren schwere Erdrevolutionen zutrugen, sind von Darwin[3]) und Diener[4]) ähnliche Gesichtspunkte geltend

---

[1]) Erdbebenwellen, die von Norden her in das Ries gekommen wären, lassen sich gemäss des Quellenbefundes nicht nachweisen. In der Tat befindet sich in dieser Richtung kein autonomer Erdbebenherd, der als Ausgangspunkt für Undulationen der bezeichneten Art gelten könnte.

[2]) Ratzel, Physikalische Geographie und Naturcharakter der Vereinigten Staaten von Nordamerika, München 1878, S. 145 ff.

[3]) Darwin, On the Connection of Vulcanic Phenomena, Transact. of the Geol. Society, 5. Band, S. 601 ff.

[4]) Diener, Die Katast[illegible]m und Gomorrha geologischer Forschung, Mi[illegible]llsch. zu Wien

gemacht worden. Es braucht ein derartiges Erdbeben deshalb durchaus noch kein vulkanisches im technischen Wortsinne zu sein, so dass also magmatischer Auftrieb die wahre Ursache der Erschütterung wäre; es genügt vielmehr vollkommen, anzunehmen, dass durch die vulkanischen Kraftäusserungen einer längst vergangenen Zeit ein Zustand der internen Lockerung geschaffen ward, der bis zum heutigen Tage nicht gehoben ist und zwar unter normalen Umständen nicht in die Erscheinung tritt, sich aber bei nur irgendwie günstiger Gelegenheit sofort zu erkennen gibt. Die Riesbeben sind also, wie sie bei früherem Anlasse genannt wurden, „vulkanisch-tektonische,“[1]) oder, um einen Ausdruck W. Brancos zu gebrauchen, „unreine tektonische“ Beben.[2]) Vielleicht würde es sich empfehlen, von gemischten Beben generell zu sprechen, da es sehr wahrscheinlich auch nicht an gelegentlichen unterirdischen Einstürzen fehlt, welche durch die mit der vulkanischen Aktion notwendig verbundenen Substanzverluste bedingt sind. Gerade der in einem Einzelfalle (s. o.) klar erkannte sukkussorische Typus, dessen Eigentümlichkeit es ist, dass das Erdbeben in einigen wenigen Vertikalstössen, ohne vibratorische Begleitphänomene, seine Kraft verzehrt, lässt sich mit subterranen Deckeneinbrüchen in ursächliche Beziehung setzen.

Die Lehre vom Riesvulkanismus begründet zu haben, ist das Verdienst v. Gümbels,[3]) nachdem die früheren Bestrebungen von Deffner, O. Fraas und Quenstedt, die ganz ungewöhnlichen Überschiebungsverhältnisse in den sedimentären

---

[1]) Günther, Handbuch a. a. O., 1. Band, S. 482.

[2]) W. Branco, Wirkungen und Ursachen der Erdbeben, Berlin 1902, S. 9 ff. Der Umstand, so wird hier ausgeführt, dass das Magma zwar mitunter, aber keineswegs immer aus Spalten aufsteige, bedinge „eine Verquickung von vulkanischen und tektonischen Beben“. Vor allem trifft dies zu für Japan (Kotô, The Scope of the Vulcanological Survey of Japan Publications of the Earthquake Investigation Committee (in foreign Languages), 1900, III, S. 89 ff.).

[3]) v. Gümbel, Der Riesvulkan, diese Sitzungsberichte, 1870, S. 153 ff.; Erläuterungen zu dem Blatte Nördlingen der geognostischen Karte von Bayern, München 1889.

Bildungen glazialgeologisch[1]) oder durch einfache Hebung zu erklären, zu keinem befriedigenden Ziele geführt hatten. Ein ganz neues Ferment wurde in die schwankenden Theorien hineingetragen durch Branco und E. Fraas,[2]) welche beide der anscheinend ganz von der Tagesordnung abgesetzten Hypothese L. v. Buchs über die sogenannten Erhebungskrater[3]) neues Leben einhauchten und als ihre Überzeugung die aussprachen, dass durch eine lakkolithische Pfropfenbildung eine namhafte Masse geschichteten Gesteines gehoben und über die angrenzenden Schichten hinweggepresst worden sei. In welchem Maasse durch einen solchen Hebungsprozess die Erdrinde weitum beeinflusst worden sein müsste, lässt sich ahnen, und es kommt noch dazu, dass während des Aktes der Aufpressung und sowohl vor seinem Beginne wie nach seiner Beendigung örtliche Explosionen statthatten, welche ihrerseits ebensosehr Gesteinszerschmetterung,[4]) wie auch hinwiederum die Bildung von Hohlräumen bewirkten. Wie wir uns auch

---

[1]) Die hier in Betracht kommenden Arbeiten von Deffner, Koken, Thürach u. s. w. brauchen wir nicht eingehender zu diskutieren, weil sie sich in der Erdbebenfrage der Natur des Gegenstandes entsprechend neutral verhalten.

[2]) W. Branco - E. Fraas, Das vulkanische Ries bei Nördlingen in seiner Bedeutung für Fragen der allgemeinen Geologie, Berlin 1901. (Aus den Abhandlungen der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

[3]) A. a. O., S. 15. „Diese alte, als veraltet verworfene Humboldt-Buchsche Lehre von den Erhebungskratern findet also in dem, was wesentlich an ihr ist, durch das Ries und für dasselbe ihre Bestätigung. Darin liegt zum einen Teile die grosse Bedeutung des Rieses für die allgemeine Geologie.“ Branco verwertet diese vulkanische Gegend für seine viel erörterte und in neuester Zeit immer mehr Anhänger werbende Anschauung, dass vulkanische Eruptionen sehr wohl auch ohne präexistierende Spalten denkbar seien (Zur Spaltenfrage der Vulkane, Sitzungsber. d. K. Preuss. Akad. d. Wissenschaften, 16. Juli 1903).

[4]) Dass es dazu kam, leitet Branco aus der manchenorts wahrzunehmenden Breccienbildung her (Die Griesbreccien des Vorrieses als von Spalten unabhängige, früheste Stadien embryonaler Vulkanbildung, Sitzungsber. d. K. Preuss. Akad., 16. Juli 1903). Gas- und Tuffmaare würden schon auf eine fortgeschrittenere Etappe hinweisen als diese einer ganz rudimentären Epoche angehörigen Ausblasungen.

die Einzelheiten der vulkanischen Katastrophe denken mögen, deren Endergebnis das rezente Ries gewesen ist — auf alle Fälle müssen wir es aussprechen: Sie hat den Boden bereitet, auf dem sich der gegenwärtige seismische Zustand herausbilden konnte und musste. Inwieweit es künftiger, mit den modernen Hilfsmitteln ausgestatteter Forschungsarbeit gelingen wird,[1]) die Seismizität dieser hochmerkwürdigen Erdstelle[2]) noch tiefer zu durchschauen, muss die Zukunft lehren.

III. Zur Physik der Bodenknalle.

Bei früherer Gelegenheit ist an diesem Orte[3]) der Versuch gemacht worden, unser Wissen von gewissen abrupten Geräuschen, die sich in den verschiedensten Gegenden vernehmen lassen und folglich auch unter den mannigfaltigsten Bezeichnungen bekannt sind, auf eine festere Grundlage zu stellen. Es wurde dortselbst der Nachweis — wo nicht geführt, so doch — zu führen gesucht, dass diese Schallerscheinungen wesentlich endogener Natur seien, und es wurde deshalb für dieselben auch eine passendere Benennung, Bodenknalle,[4]) in Vorschlag gebracht. Unsere Aufgabe soll es diesmal sein,

---

[1]) Ihr ist auch die magnetische Prüfung zuzurechnen, deren geologische Nutzbarkeit jetzt nirgends mehr unterschätzt wird. Bei seiner ausserordentlich gründlich durchgeführten Landesaufnahme hat K. Haussmann (Die erdmagnetischen Elemente von Württemberg und Hohenzollern, Stuttgart 1903, S. 156) namhafte Störungen dieser Art in der unmittelbaren westlichen Nachbarschaft von Nördlingen aufgedeckt. Es wird gestattet sein, anzunehmen, dass neben „vulkanischen Gesteinen und Erzvorkommen" auch die Lageverschiebungen (s. E. Naumann, Die Erscheinungen des Erdmagnetismus in ihrer Abhängigkeit vom Bau der Erdrinde, Stuttgart 1887) da eine gewisse Rolle spielen werden.

[2]) Diesen noch vagen Begriff will neuerdings Montessus de Ballore fester umgrenzen (Bernard-Laharner, Erdbebenstudien des Grafen Montessus de Ballore, Erdbebenwarte, 2. Jahrgang, Nr. 2).

[3]) Diese Sitzungsberichte, Math.-Phys. Kl., 1901, S. 237 ff.

[4]) Günther, Erdbebengeräusche und Bodenknalle, Erdbebenwarte, 2. Jahrgang, Nr. 5.

für die innere Berechtigung dieses Ausdruckes neues Beweismaterial herbeizuschaffen.

Diese Berechtigung wäre in Frage gestellt, wenn es nach der Meinung von Aug. Schmidt möglich wäre, sich die Detonationen als in der freien Atmosphäre entstanden vorzustellen. Die Frage, ob solches angängig sei, muss als sehr wichtig erscheinen, und es dürfte deshalb am Platze sein, den nur kurzen Lexikonartikel, der diese jedenfalls eigenartige Auffassung vorlegt, wörtlich hier wiederzugeben.[1]) „Knall, kurzer Schall, erzeugt durch eine einzige, etwa durch Stoss oder Explosion entstandene Luftwelle. Bei starker Verdichtung der Luft in der Welle ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit grösser als die des gewöhnlichen Schalles; das zeigen die Schiessversuche mit Photographierung der Schlieren von E. Mach.[2]) Nach Riemann nimmt die Wellenlänge einer Verdichtungswelle der Luft aus theoretischen Gründen fortschreitend ab. Dann muss ein Windstoss eine Verdichtungswelle erzeugen können, die in genügender Entfernung als Knall gehört wird. In der Tat sind an Meeresküsten und Seeufern solche Knallwahrnehmungen bekannt (Seeschiessen am Bodensee)."

Die Möglichkeit einer atmosphärischen Genese der ungewöhnlichen Klänge wäre hiernach durch ein von dem grossen Mathematiker Riemann aufgestelltes Theorem[3]) gewährleistet. Es wird sich empfehlen, dasselbe zuvörderst in seiner ursprünglichen Form kennen zu lernen: Riemann stellt den irgendwo herrschenden Druck als eine wie immer beschaffene Funktion

---

[1]) Artikel „Knall"; O. Luegers Lexikon der gesamten Technik, 5. Band, Stuttgart-Leipzig s. a., S. 563.

[2]) Mach-Salcher, Photographische Fixierung der durch Projektile in der Luft eingeleiteten Vorgänge, Sitzungsber. d. Akademie zu Wien, Math.-Naturw. Kl., 1887, S. 764 ff.; 1889, S. 41 ff.

[3]) Bernhard Riemanns Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, herausgeg. von H. Weber, Leipzig 1892, S. 164. Der Aufsatz „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" war zuerst 1860 in den „Abhandlungen" der Göttinger Gesellschaft erschienen.

der Dichte ϱ dar und nimmt die X-Achse des räumlichen Koordinatensystemes als der Bewegungsrichtung der Welle parallel an. Diese Achse soll zugleich die Abszissenachse für ein ebenes Achsensystem sein, auf welches eine Kurve bezogen ist, deren Ordinate dem jeweiligen ϱ gleich sei. Sobald die erstere eine zur X-Achse senkrechte Tangente hat, tritt eine Unstetigkeit ein, und aus dieser Tatsache wird (a. a. O.) weiter gefolgert: „Die Verdichtungswellen, d. h. die Teile der Welle, in welchen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung abnimmt, werden bei ihrem Fortschreiten immer schmäler und gehen schliesslich in Verdichtungsstösse über; die Breite der Verdünnungswellen aber wächst beständig der Zeit proportional." Dieser Satz ist es, von welchem die Betrachtung Schmidts ihren Ausgangspunkt nimmt. Dass jeder Verdichtungsstoss, der mit ausreichender Energie unser Trommelfell trifft, eine Klangempfindung auszulösen vermag, unterliegt an sich keinem Zweifel, aber in der grossen Mehrzahl der Fälle wird der Impuls zu schwach sein, um die Membran in Schwingungen von solcher Amplitude zu versetzen, dass sie einen akustischen Eindruck hervorbrächte. Aus diesem Grunde eben appelliert Schmidt an die Mitwirkung des Windes. Man pflegt ja auch als eine so gut wie selbstverständliche Sache es hinzunehmen,[1]) dass der Schall mit dem Winde weit kräftiger als gegen den Wind fortgeleitet werde.

Dass dem teilweise so ist, wurde durch die Experimente von Haldat,[2]) an welche sich diejenigen von De la Roche und Dunal anschlossen, vollkommen bekräftigt. Für geringere Entfernungen ist der Einfluss der Windrichtung fast unmerklich, aber für grössere Distanzen lässt sich ein solcher erkennen, freilich aber nicht in dem Sinne, dass etwa eine klare Beziehung zwischen Schallstärke und Windrichtung nachweisbar wäre. Ein senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Schalles wehender

---

[1]) Muncke, Artikel Schall in Gehlers „Physik. Lexikon" (2. Auflage, 8. Band, Leipzig 1836, S. 433 ff.).

[2]) Haldat, Sur la propagation du son dans l'air agité par le vent, Journal de Physique, 79. Band (1814), S. 235 ff.

Wind scheint zu bewirken, dass jener rascher fortschreitet, als wenn der Wind selbst die Schallwellen fortträgt. Schmidt will auch, wie die sehr kurze Andeutung wohl besagen will, nicht sowohl der in der Luft herrschenden Bewegung einen wesentlichen Anteil an der Hörbarmachung einer aus grosser Ferne herankommenden Schwingung zuschreiben, sondern wenn wir die von ihm gewählte Formulierung recht verstehen, wäre der springende Punkt seiner Erklärung der folgende. Ursachen, welche die Entstehung einer atmosphärischen Solitärwelle bewirken können, gibt es an der Erdoberfläche in grosser Menge. Schreitet eine solche mit einer gewissen Geschwindigkeit fort, so löst sie sich nach der Riemannschen Theorie in Verdichtungsstösse auf, die in der Mehrzahl der Fälle auf das Ohr keinen Eindruck machen, durch das plötzliche Hinzutreten rasch bewegter Luft jedoch einen derart erhöhten Energiezuwachs erhalten können, um als Klang hörbar zu werden. Dass qualitativ ein solcher Vorgang nicht ausgeschlossen ist, kann gerne eingeräumt werden; ob aber die Schallverstärkung quantitativ ausreicht, lässt sich a priori schwerlich entscheiden, und es würde messender Versuche bedürfen, um über diese Möglichkeit ein zutreffendes Urteil gewinnen zu können. Gegen die Schmidtsche Ansicht spricht anscheinend der Umstand, dass solche Knalle doch im allgemeinen nur selten gehört werden, während man theoretisch das Gegenteil erwarten sollte. Wie es sich aber damit auch verhalte, so ist es jedenfalls nur zu billigen, dass eine, wenn der Ausdruck gestattet ist, rein physikalische Interpretation eines Vorganges als möglich hingestellt wurde, der von anderer Seite als ein völlig geodynamischer aufgefasst wird. Ferner kann nicht in Abrede gestellt werden, dass auch dann, wenn die betreffende Einsiedlerwelle[1]) nach der früher verlautbarten Ansicht intra-

[1]) Diese Wellen haben die Eigenschaft, nicht Bestandteile eines grösseren Wellensystems zu sein, sondern ganz isoliert das die Fortpflanzung ermöglichende Medium zu durchziehen. Untersucht sind sie

krustalen Ursprunges sein sollte, immerhin durch das Hinzutreten des sonst wenig beachteten Windes die Übertragung auf das menschliche Ohr einigermassen modifiziert werden könnte.

Überhaupt bedarf die physikalische Seite unseres Problemes, selbst wenn man von dem eigentlich genetischen Vorgängen absieht, noch mancher Klärung. Auf einen nicht gleichgültigen Punkt lenkte bereits Volger[1]) unsere Aufmerksamkeit. Drei Momente kommen bezüglich der Fortleitung des durch Bewegungen unter dem Erdboden ausgelösten Schalles und der seismischen Bewegung selber in Betracht: die Fortpflanzung der Stosswelle innerhalb der Erdfeste (*a*), die Fortpflanzung der Tonwelle innerhalb des Felsgerüstes (*b*), die Fortpflanzung der Tonwelle in der Luft (*c*). Für gewöhnlich ist $c > a > b$, doch kann das Grössenverhältnis auch ein anderes werden. So kann, je nach diesen Umständen, die Tonwahrnehmung vor dem Eintreffen der Stosswelle oder gleichzeitig mit dieser oder auch nach ihrem Eintreffen gemacht werden.[2]) Damit hängt es zusammen, dass die Angaben über Art und Auftreten der seismischen Klänge in den Originalberichten oft so weit voneinander abweichen. Wenn eine fühlbare Erschütterung ohne akustische Begleiterscheinung vorkommt, so kann dies auch verschiedene Ursachen haben, deren eine vermutlich in der „Uebertiefe“ der Töne, d. h. in der geringen Zahl der auf eine bestimmte Zeit entfallenden Schwingungen zu suchen ist.[3]) Ganz gewiss lässt sich aus der Beschaffenheit des den Hörern zum Bewusstsein gekommenen Tones, Klanges oder Geräusches nicht der mindeste Einwurf gegen die Annahme ableiten, dass derselbe aus der Lithosphäre selbst stammt.

---

worden von R. Scott (The Wave of Translation and the Work it does, Proceedings of the Royal Society, 32. Band, S. 382 ff.).

[1]) Volger, a. a. O., 3. Teil, S. 474 ff.

[2]) Die Knalle könnten danach in nachläufige, synchrone und voreilende eingeteilt werden.

[3]) Wenn weniger als 16 Schwingungen auf die Sekunde treffen, wird der Ton nach H. v. Helmholtz unhörbar (Tyndall, Der Schall, deutsch von Helmholtz-Wiedemann, Braunschweig 1869, S. 85).

Geleitet von solchen Erwägungen, und speziell mit Anknüpfung an das Wetterschiessen im Gelände des Bieler Sees,[1]) welches als „tief tönende, mit einem schwachen Nachhall auslaufende Detonation" beschrieben wird,[2]) wirft Volger[3]) die Frage auf, „ob nicht das sogenannte ‚Wetterschiessen' in den Alpen ein Erdbeben-Schallphänomen ist, zusammenhängend mit den Bewegungen im Schichtenbau des Gebirges". Die ihrerzeit berühmten Eglisauer Erdbebenschwärme, mit denen sich späterhin nur diejenigen von Gross-Gerau (Hessen)[4]) in Parallele stellen lassen, entbehrten nach der Schilderung des erfahrenen Ingenieurs Denzler des richtigen Erdbebenkolorits meistenteils ganz und gar; nur selten war ein wirkliches Zittern der Erde zu konstatieren, und die Regel bildeten mit Pausen von ungleicher Länge „knallähnliche Erschütterungen, Knallputsche."[5]) Auch das Vorhandensein oder Fehlen des einen der beiden Faktoren, die wir bei Erderschütterungen ineinandergreifen zu sehen gewohnt sind, gibt uns sonach kein sicheres Kriterium an die Hand: Es kommen Erdbeben ohne jedwede Detonation und echt-seismische Geräusche ohne terrestrische Gleichgewichtsstörung vor. Wenn wir uns dies gegenwärtig halten, werden wir desto eher geneigt sein, die Bildung der Bodenknalle als eine Folge intrakrustaler Ortsveränderungen anzuerkennen. Mit Davison, der sich die freilich nicht durchweg lohnende Mühe gegeben hat, die seismischen Geräusche nach bestimmten Klassen zu ordnen,[6]) betrachten wir die Bodenknalle als Repräsentanten eines

---

1) Diese Sitzungsberichte, 1901, S. 239.

2) Volger, a. a. O., 1. Teil, S. 306.

3) Ebenda, 3. Teil, S. 476.

4) K. Fuchs, Statistik der Erdbeben von 1865 bis 1882, Sitzungsber. d. Akad. zu Wien, Math.-Naturw. Kl.. 92. Band, S. 280.

5) Volger, a. a. O., 1. Teil, S. 27.

6) Davison, On Earthquake Sounds, Philos. Magazine, 1900, S. 71 ff. Diese Abhandlung kann als eine Weiterführung jener gelten, welche bereits früher (diese Sitzungsberichte, 1901, S. 250) zitiert worden ist. Diesmal werden sieben Rubriken unterschieden, in welche man die unterirdischen Detonationen einreihen soll; es sind dies Wagenrasseln, Donner-

schwachen, nicht zu voller Entfaltung durchgedrungenen Erdbebens. Wenn wir dies tun, so können wir auch am besten verstehen, warum ein Beben von längerer Dauer sich durch Detonationen ankündigt und schliesslich wieder, nachdem die Bewegung selbst beendet ist, in Detonationen ausklingt.[1]) In dieser Weise kennzeichnet die vogtländisch-nordwestböhmischen Schwarmbeben H. Credner, der von dieser Erdbebenform eine

---

rollen, Heulen des Windes, Zusammenbruch eines Steinhaufens, Fall schwerer Körper, Explosion, Tierische Laute und endlich diffuse Geräusche von nicht näher bestimmbarem Wesen. Die eigentlichen Bodenknalle dürften am besten Davisons fünfter Klasse entsprechen. Dahin gehören die oben besprochenen Knallputsche von Eglisau, dahin auch die im November und Dezember 1851 bei Feltre in Oberitalien gehörten dumpfen Schläge, welche dazumal viel Aufsehen erregten (Senoner, Relazione sul fenomeno di detonazione del Monte Tonatico di Feltre, Verona 1854; v. Haidinger, Das Schallphänomen des Monte Tonatico Feltre, Jahrb. d. K. K. Geol. Reichsanstalt, 4. Band, S. 559 ff.). Bodenschwankungen wurden nur ganz schwach, und intermittierend, wahrgenommen. So war es auch am 22. Juli 1902, als man (v. Mojsisovics, Mitteilungen der Erdbebenkommission der kaiserl. Akad. der Wissensch., (2) Nr. XIX) in dem steiermärkischen Flecken St. Lambrecht schussartige Knalle hörte und vermeinte, in einer Fabrik sei eine Explosion geschehen. Ganz stimmt damit überein ein von Volger (a. a. O., 1. Teil, S. 358 ff.) mitgeteiltes Erlebnis der Bürger Solothurns (11. August 1853), dessen man sich dort lange erinnerte. Aus früheren Jahren sei noch ein südafrikanisches Ereignis herangezogen. Nach Fr. Hoffmann (Geschichte der Geognosie und Schilderung der vulkanischen Erscheinungen, Berlin 1848, S. 31 ff.) wusste der Reisende Burchell davon zu berichten, dass man in Capetown einmal durch zwei heftige Lufterschütterungen erschreckt wurde, die man für Kanonenschläge oder für eine Pulverexplosion hielt, und die allmählich, obwohl kein Beben des Bodens nebenher ging, für „unterirdisch" erklärt werden mussten. Von der Örtlichkeit ist ähnliches auch sonst bekannt (diese Sitzungsberichte, 1901, S. 212).

[1]) Dieser Anschauung pflichtet auch Ratzel bei (Die Erde und das Leben, eine vergleichende Erdkunde, 1. Band, Leipzig-Wien 1901, S. 192): „Vielleicht gehören zu den Ausläufern der Erderschütterungen auch die Nebel- oder Seepuffe, die in verschiedenen Teilen der Erde als dumpfes Dröhnen empfunden werden und vielleicht manchmal mit leisen Erschütterungen verbunden sind."

sehr treffende Charakteristik entwarf. Seine Schilderung[1]) steht im besten Einklange mit der hier gegebenen Darlegung: „... Von nun an nimmt die seismische Tätigkeit an Energie stetig ab und gibt sich im Laufe des 26. Juli nur noch durch lokales unterirdisches Donnerrollen kund. . . . Am 6. August hebt in Graslitz und Markneukirchen das unterirdische Donnerrollen von neuem an und wächst am letztgenannten Orte nachmittags 1^h 10^m zu leichten Erschütterungen des Bodens an". Ebenso Knett:[2]) „Das erzgebirgische Schwarmbeben, welches vom 13. Februar bis zum 25. März 1903 anhielt, wies zahlreiche Schallerscheinungen (‚unheimliches Rollen') auf, ohne dass zugleich Stösse gefühlt wurden". In allen diesen Fällen war mithin die seismische Energie gross genug[3]), um eine akustische, nicht aber ausreichend, um auch eine mechanisch bemerkbare Wellenbewegung hervorzurufen.

Zu der schon früher erwähnten Abhandlung Cancanis, eines der erfolgreichsten italienischen Erdbebenforschers, ist inzwischen eine neue hinzugetreten,[4]) welche sich mit der Beschaffung neuer Beweisgründe für den endogenen Ursprung der mysteriösen Knalle beschäftigt. Es wurden hierher gehörige Beobachtungen angestellt in einigen Bezirken von Latium, die sich den viel älteren Berichten von Bassanelli[5]) ganz gut

---

1) H. Credner, Die vogtländischen Erdbebenschwärme während des Juli und August 1900, Ber. d. math.-phys. Kl. d. k. sächsischen Gesellsch. d. Wissenschaften zu Leipzig, 1900, S. 169 ff.

2) Knett, Mitteilungen u. s. w., (2) Nr. XVI.

3) Vortrefflich wird diese Schlussfolgerung auch gestützt durch einen Erfahrungssatz Omoris (On the After-Shoks of Earthquakes, Journal of the College of Science of the Imperial University of Tokyo, VII, 2, 1894). Derselbe lautet: Durchschnittlich stehen in Japan Heftigkeit der Stosswirkung und Intensität des Schalles im umgekehrten Verhältnis.

4) Cancani, Barisal Guns, Mistpoeffers, Marina, Boll. della Soc. Sismol. Ital., 1897, S. 222 ff. (diese Sitzungsberichte, 1901, S. 239); Rombi sismici, ebenda, 1901, S. 23 ff.

5) Bassanelli, Sopra i tremuoto, che ha sofferto la città di Albano con le sue vicinanze dal giorno 21 di maggio a tutto il dì 6 dicembre 1829, Giornale Arcadico, 1829 (Brief an Folchi). Jenes alba-

anpassten. Vor allem aber war bemerkenswert ein Zwischenfall, der sich in Rom selbst ereignete. Auf dem im Osten der Stadt befindlichen Hochplateau von Panisperna hörten mehrere Angehörige des dort gelegenen physikalischen Institutes der Universität dieselben dröhnenden Laute, die sich auch in der Campagna und — als vermeintliche Kanonenschläge — im Albanergebirge vernehmbar gemacht hatten, und als man sofort telephonisch bei der staatlichen Erdbebenstation in dem zwei bis drei Kilometer entfernten Collegio Romano anfragte, stellte sich heraus, dass die dortigen Seismographen absolute Ruhe bewahrt hatten. Einzig und allein in Frascati wollte man ein leises Erzittern des Bodens bemerkt haben. Dass diesmal nicht wirkliche Schüsse zu einer Täuschung geführt haben konnten, ergab sich aus den Erkundigungen, welche man unverweilt bei dem Artilleriekommando der Hauptstadt eingezogen hatte. Auch aus Cosenza und Spoleto liefen analoge Nachrichten ein. Und dabei war die Luft absolut ruhig; der Barograph zeigte ebensowenig eine Störung an, wie es die Pendelseismometer taten.

Die von Cancani gegebene Zusammenstellung[1]) der wichtigsten italienischen Schallvorkommnisse, deren subterrane Herkunft als verbürgt zu erachten ist, muss als sehr belehrend anerkannt werden. Von 1570 bis 1901 kennt man nicht weniger als 119 distinkte Einzelfälle, die in einer Tabelle bequem zu übersehen sind. Aus dieser kann man die nachstehenden Schlüsse ziehen: Mitunter, aber durchaus nicht regelmässig, sind die Bodenknalle Vorboten wirklicher Erdbeben; in erdbebenreichen Gegenden werden sie am häufigsten gehört, und ihr Vorkommen weist auch ein relatives Frequenzmaximum in solchen Zeiten auf, in denen ohnehin der Boden lebhafter bewegt ist; Knalle ohne gleichzeitige Erderschütterung sind keine

---

nische Schwarmbeben war reich an Detonationen ohne Stoss; gerade so wie das zentraljapanische Dauerbeben vom Oktober 1891 gegenüber 3365 Einzelnotierungen nicht weniger als 409 rein akustische Phänomene in sich schloss.

[1]) Cancani, a. a. O., S. 214 ff.

Seltenheit; die Luftstösse sind nichts als Wirkungen von Impulsen, die aus der Erdrinde sich nach aussen mitteilen.

Mit Cancani kommt in der Hauptsache völlig überein der verdienstvolle Bearbeiter der italienischen Seismologie, M. Baratta in Voghera, der im ersten Teile seines grossen Werkes[1]) die erreichbaren Materialien möglichst vollständig gesammelt und auch die wahrscheinlich geschichtlich früheste Erwähnung unseres Phänomens[2]) aufgefunden hat. In seiner neuesten Veröffentlichung[3]) geht er aus von der Tatsache, dass durch Cancani (s. o.), Botti[4]) und Simonelli[5]) die Wesensgleichheit der „Mistpoeffers" und der „Marina" erwiesen sei, und wendet die so erzielte Erkenntnis an auf eine in Norditalien heimische, unter dem Namen „Balza" bekannte Schallerscheinung, die insbesondere südlich und südwestlich von den Städten Faenza und Forlì den Nordabhang der Apenninenkette beherrscht. Nur ein einziger Lokalberichterstatter wusste von einem Zusammenhange zwischen diesen „brüllenden" Lauten und einer leichten Form von Erdbeben etwas auszusagen. Es ist bei den Umwohnern, welche mit der — in einigen Dörfern auch „Trabusso" genannten — „Balza" vertraut sind, so gut wie Einhelligkeit darüber vorhanden, dass der Monte Falterona, der folglich mit dem obengenannten Monte Tonatico ver-

---

[1]) Baratta, I terremoti d' Italia, Saggio di storia, geografia e bibliografia sismica italiana, Turin 1901. Hauptsächlich auf diese mustergültige Vorlage stützt sich der entsprechende Abschnitt bei Th. Fischer (La Penisola Italiana, Turin 1902, S. 77 ff.).

[2]) M. Melli, Tractatus medico-physicus de terrae motu, Forlì 1708, S. 76. „Effectus quidam terrae motus adinstar in aliquibus montibus et rivulis estivo tempore persentitur a rusticis nostris vulgo nuncupatus la Balza . . ."

[3]) Baratta, A proposito dei „Mistpoeffers" italiani, il fenomeno del „tuono o mugghio della Balza" e del „trabusso", Bull. della Soc. Geogr. Ital., (4) 2. Band, S. 882 ff.

[4]) Botti, Osservazioni del fenomeno dei Mistpoeffers in Italia, Boll. della Soc. Geolog. Ital., 21. Band, S. 436 ff.

[5]) Simonelli, Il Rugio della Marina nel Senese e i Mistpoeffers del Mare del Nord, La Cultura Geografica, 1. Band (1899), S. 52 ff., S. 67 ff.

glichen werden könnte, den Sitz und Herd der dumpfen Knalltöne darstelle. Mag diese Ortsbestimmung auch fehlgreifen, soweit ist sie gleichwohl begründet, dass die Detonationen nicht aus der Luft oder aus dem Meere, sondern aus dem nahen Gebirge, aus dem Inneren der Erdkruste ins Flachland gelangen. Ueberall, wo man die „Balza" kennt, haben sich zum öfteren schon wirkliche Erdbeben ereignet;[1]) der Umstand, dass das Land viele warme Quellen besitzt, mag wohl auch kein zufälliger und gleichgültiger sein. Auch Bergrutsche werden von jener Flanke der Apenninenkette wiederholt in den Geschichtsbüchern berichtet. Mit einem Worte: Der Bezirk, um den es sich handelt, gehört zu den morphologisch unruhigen Teilen der Erdoberfläche, und um so weniger darf man sich darüber wundern, dass neben echten Erdbeben auch jene unfertigen Formen derselben, die sich nur dem Gehöre verraten, zu den gewöhnlichen Dingen gezählt werden.

In allerneuester Zeit ist zu den Gebieten, die man, im nahe liegenden Gegensatze zu den ständigen Schüttergebieten, als habituelle Detonationsbezirke bezeichnen könnte, auch das dalmatische Festland hinzugetreten, nachdem von der vorgelagerten Inselkette schon längst diese Eigenschaft ermittelt war.[2]) Die hiefür den Beweis antretende Studie von Dainelli[3]) führt uns in eine sumpfige Küstenebene bei den „Brücken von Bribir", wo die Dinarischen Alpen nahe an das Adriatische Meer herantreten. Zahlreiche Quellen bewirken die Versumpfung des aus nahe liegender Ursache in schlimmem sanitären Rufe stehenden Litorales; am meisten trägt hiezu bei die am Berge Ostrovica entspringende Quelle von Otres.

---

[1]) Alle hier in Frage kommenden Gegenden hat Baratta kartographisch fixiert, Carta sismica d'Italia, Aree di scuotimento, Voghera 1891.

[2]) Vgl. diese Sitzungsberichte, 1901, S. 257 ff. Es wurde dort angeregt, den „Typus von Meleda", bei dessen Zustandekommen auch das Wasser mitwirkt, als eine Unterart dem allgemeinen Begriffe der Bodenknalle einzuordnen.

[3]) Dainelli, Di alcuni rumori naturali che si odono presso Otres (Bribir) in Dalmazia, Boll. della Soc. Geogr. Ital., (4) 4. Band, S. 303 ff.

Der mit geognostischen Aufnahmen beschäftigte Verfasser hörte am Abend eines Maitages zwar schwache, aber doch ganz bestimmt zu unterscheidende Töne, die aus der Mitte der Ebene herüberzukommen schienen. Es war eine Art Gebrüll („mugghio" bei den Italienern, „bukalj" bei den hier angesessenen Dalmatinern kroatischer Abkunft). Gegen Beginn der Nacht steigerte sich die Stärke der Klänge und wurde immer stärker, um allmählich wieder abzuflauen und gegen Sonnenaufgang gänzlich aufzuhören. Es waren nicht abrupte Luftstösse, sondern man konnte eine Zusammenfassung der dröhnenden Laute in zeitlich zusammengehörige Abteilungen wahrnehmen, so dass sich jede Serie aus drei bis fünf Brülltönen zusammensetzte. Nur im Frühling lässt sich diese sonderbare Musik vernehmen, vor März und nach Ende Juni ist sie nach Aussage der umwohnenden Morlaken erstorben. Dass sich die Volkssage der Erscheinung bemächtigt hat, ist leicht zu denken.

Die Regelmässigkeit, welche in dem Auftreten dieser Varietät der Schallphänomene zutage tritt, verhindert uns, so urteilt Dainelli,[1]) die Veranlassung dazu in geotektonischen Umsetzungen oder in internen Explosionen zu suchen. Er erläutert seinerseits eingehend die auf der Insel Meleda zur Beobachtung gekommenen Vorfälle und sucht aus ihnen Anhaltspunkte für eine Deutung der rhythmischen Klänge von Bribir zu gewinnen. Die Berechtigung der Behauptung, dass von einer selbständigen Akustik des Karstes gesprochen werden dürfe, lässt er unbedingt gelten; er erwähnt verwandter Vorkommnisse bei Imoschi und am Vranasee, wie denn auch Waagen (in einer Besprechung der „Akust.-Geogr. Probleme" in den Mitteil. d. K. K. Geogr. Gesellschaft zu Wien, 1902) von Reminiszenzen aus seinen Arbeiten auf der Insel Veglia zu erzählen weiss. Eine direkte Verbindung des Meeres mit dem Schalldistrikte von Bribir hält Dainelli nicht für wahrscheinlich; die Entfernung sei doch zu gross, und mit einem Ein-

[1]) Ebenda, S. 315 ff.

bruche der Meereswogen lasse sich auch die jahreszeitliche Beschränkung kaum vereinbaren. Wohl aber sprächen manche Argumente zu Gunsten der Annahme, dass in einem unterirdischen Röhrensysteme zirkulierendes Wasser die Klänge verursache.[1]) Es sei bekannt genug, dass in Höhlen und Grotten sich oft die auffallendsten Schallphänomene zeigten.[2]) So lange das Wasser gleichmässig, ohne Hindernisse überwinden zu müssen, in einer Röhre dahinströmt, geht höchstens ein unbestimmtes, aber gleichförmiges Geräusch von ihm aus; sowie es jedoch seinen Weg sich erst gewaltsam zu erkämpfen genötigt ist, geben abrupte Luftstösse von dieser Durchbrechung des normalen Verlaufes Kenntnis. Dass nun ein Katavothrennetz, wie es hier anzunehmen wäre, nicht arm an Engstellen und Unregelmässigkeiten sein könnte, versteht sich nach allem, was uns von der Karstnatur bekannt ist, ganz von selbst. Tagsüber jedoch seien die aus der Hemmung des Wassers entspringenden Brummtöne zu schwach, um das Gehörorgan zu affizieren, und erst die Ruhe der Nacht verschaffe ihnen Geltung. Dalmatien hat bekanntlich subtropisches Klima und Winterregen, so dass in der kalten Jahreszeit genug meteorisches Wasser in den Felsgrund einsickern kann, um dessen Adern und Spalten gleichmässig zu durchdringen, während das Frühjahr ungleiche Wasserzufuhr und damit zugleich Störungen im Durchflusse mit sich bringt. Der Sommer endlich ist so wasserarm, dass die Strömungsbewegung samt ihren akustischen Begleiterscheinungen überhaupt aufhört. Allerdings ist die Ostravicaquelle keine intermittierende, sondern eine perennierende, was auch nach des Autors eigener Ansicht[3]) der Erklärung nicht zur Unter-

[1]) Ebenda, S. 323 ff.

[2]) Wenn hier auch das Beispiel der syrakusanischen Latomien angeführt wird, die dem Gehöre wahre Rätsel („Ohr des Dionysius") aufgeben, so möchten wir solche Fälle, in denen sich die schöpferische Tätigkeit des menschlichen Geistes offenbart, bei der Diskussion reiner Naturbetätigungen doch lieber aus dem Spiele gelassen wissen.

[3]) Die Gründe, mit denen der selbst gemachte Einwand zurückgewiesen wird, dünken uns keine durchschlagenden zu sein. Jedenfalls

stützung gereicht. Wir möchten die Art der Auffassung des italienischen Geologen trotzdem, und obwohl wir den Wirkungsbereich des Meeres für weit ausgedehnter als er fassen zu müssen glauben,[1]) als eine unter allen Umständen der Beachtung vollauf würdige den Karstforschern zu sorgfältiger Überprüfung anempfehlen.

Als Schlussergebnis dieser zweiten Untersuchung der Streitfrage der abrupten und spontanen Detonationen stellt sich uns eine durchgängige Bestätigung des dereinst gewonnenen Resultates dar, dass man die Ursache jener unter der Erde zu suchen habe.[2]) Ohne im geringsten leugnen zu wollen, dass Klangerscheinungen von wesentlich gleichem Charakter gelegentlich auch durch irgendwelche andere Anlässe hervorgebracht werden können,[3]) ist doch der

---

müssten ein Jahr hindurch Messungen der Ergiebigkeit angestellt werden. Denn als Signatur der Karstwasserläufe ist nun einmal, wie die interessanten Aufsätze von Putick (Die Lindwurmquelle bei Oberlaibach, Erdbebenwarte, 3. Jahrgang, S. 18 ff.) und A. v. Sch. (Intermittierende Quellen in Krain, ebenda, 3. Jahrgang, S. 24 ff.) recht klar ersehen lassen, deren nicht nur durch die zeitliche Verteilung der Niederschläge, sondern auch durch die innere Struktur des Kalkgebirges bedingte Unbeständigkeit.

[1]) Zahlreiche Belege dafür gibt F. Fischer (Meer- und Binnengewässer in Wechselwirkung, ein Beitrag zur subterranen Hydrographie der Karstländer, Abhandl. d. K. K. Geogr. Gesellsch. zu Wien, IV. Band (Nr. 3), S. 23 ff.

[2]) Diese Sitzungsberichte, 1901, S. 256.

[3]) Ein merkwürdiger, teilweise allerdings nicht blos auf das Wirken der Natur zurückzuführender Fall wird erörtert von Lagally (Die Schallphaenomene auf der Treppe zur Walhalla, Berichte des Naturwissenschaftlichen Vereines in Regensburg, 1900, 8. Heft). Eine gewisse Unklarheit, die zu heben hier nicht versucht werden kann, besteht nach Tietzes sehr eindringenden Untersuchungen hinsichtlich gewisser in Mähren seit Jahren konstatierter Luft- oder Bodengeräusche (Die geognostischen Verhältnisse der Gegend von Landskron und Gewitsch, Jahrb. d. k. k. Geol. Reichsanstalt, 51. Band, S. 624 ff.). Jedenfalls hat man es nicht mit Explosionen eines „Gasvulkanes" zu tun, wie Glocker (Über

Ursprung der sehr grossen Mehrzahl dieser Lufterschütterungen, die deshalb den Namen „Bodenknalle“ verdienen, ein endogener, und man hat ein Recht, diese letzteren mit embryonalen, für die Gefühlssphäre des normalen menschlichen Organismus zu schwachen Erdbeben zu identifizieren.

---

eine sogenannten Gasvulkanen ähnliche Erscheinung in Mähren, Ann. d. Phys. u. Chem., 54. Band, S. 170 ff.; Über die Detonationen des Reichenbacher Berges, ebenda, 64. Band, S. 560 ff.) glauben machen wollte.

Der Cauchy-Goursat'sche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Die wichtige Verallgemeinerung, welche der Cauchy'sche Satz über das Verschwinden eines geschlossenen Integrals von der Form $\int f(z) \cdot dz$ durch Herrn Goursat[1]) erfahren hat, ist neuerdings von Herrn Heffter[2]) auf reelle Kurven-Integrale von der Form $\int (P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy)$ übertragen worden. An die Stelle der Goursat'schen Voraussetzung eines lediglich endlichen (aber an keinerlei Stetigkeits-Bedingungen gebundenen) $f'(z)$ tritt hierbei die folgende: P und Q müssen für jede Stelle des in Frage kommenden Bereiches ein vollständiges Differential besitzen[3]) und ausserdem der bekannten Integrabilitäts-Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ genügen. Ich habe bei früherer Gelegenheit[4]) ausführlich gezeigt, dass jedes über eine abteilungsweise monotone Kurve erstreckte Integral durch ein solches über einen „Treppenweg" (d. h. eine aus Parallelen zu den Koordinaten-Axen zusammengesetzte gebrochene Linie) beliebig approximiert werden kann, und Herr Heffter hat die hierzu erforderlichen Definitionen auch auf den Fall einer lediglich rektifizierbaren Integrations-Kurve ausge-

---

1) Transact. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 14.

2) Gött. Nachr. 1902, p. 137; 1903 (Sitzung vom 31. Oktober).

3) S. weiter unten Nr. 1.

4) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 56 ff.

dehnt, sofern nur diese letztere im Innern desjenigen Bereiches verläuft, für welchen die zu integrierende Funktion gewissen Bedingungen genügt. Darnach reicht es also in der Hauptsache vollständig hin, Sätze über geschlossene Integrale für den Fall eines zu den Koordinaten-Axen parallel gestellten Rechtecks zu beweisen. Dies gilt sogar auch noch, wenn man die von Herrn Heffter bezüglich der nur rektifizierbaren Integrations-Kurven gemachte Einschränkung fallen lässt und für die über letztere zu erstreckenden Integrale die (jene Einschränkung nicht erforderde) Definition des Herrn Camille Jordan[1]) zu Grunde legt. Alsdann kommt es nämlich in letzter Linie nur darauf an, Integralsätze der fraglichen Art für den Fall eines beliebigen Dreiecks zu beweisen.[2]) Da man ja aber diesen Fall nach dem oben gesagten durch Approximation vermittelst eines „Treppenweges" erledigen kann, so ist schliesslich auch jener allgemeinste Fall auf den „Rechtecks"-Beweis zurückgeführt. Man kann hiernach sagen, dass dieser letztere dem praktischen Bedürfnisse im weitesten Umfange Genüge leistet; freilich wohl nicht ganz so vollständig dem logischen. Denn, wenn wir auch bei der Analyse krummer Linien gezwungen sind, zu Grenz-Vorstellungen zu greifen und sie durch passend gewählte gebrochene Linien zu approximieren, so muss es doch andererseits wohl als eine logische Anomalie gelten, wenn man nun auch die einfache Vorstellung der geraden Linie wiederum durch die Grenz-Vorstellung eines „Treppenweges" ersetzt. Infolge dessen will es mir aus logischen Gründen wünschenswert erscheinen, die Eigenschaften des geradlinigen Integrals direkt aus der Definition, ohne Benützung eines durch das Wesen der Sache in keiner Weise gebotenen Grenz-Prozesses herzuleiten:[3]) was

[1]) Cours d'Analyse, 2me éd. T. I (1893), p. 181.

[2]) A. a. O. p. 188.

[3]) Damit steht nicht im Widerspruch, dass auch die Erkenntnis der Möglichkeit, ein geradliniges Integral durch ein Treppen-Integral beliebig zu approximieren, an sich wertvoll erscheint, weil sie deutlich zeigt, dass für den Wert solcher Integrale die Länge des Integrations-

dann offenbar schliesslich darauf hinausläuft, dass man den für geschlossene Integrale erforderlichen Hauptbeweis nicht auf den Fall eines speziell gelagerten Rechtecks beschränkt, sondern von vornherein für ein beliebiges Dreieck zu führen sucht.[1]) Dies für den oben erwähnten, von Herrn Heffter für den Rechtecks-Fall bewiesenen Satz über reelle Linien-Integrale zu leisten und daran einige weitere Bemerkungen zu knüpfen, ist der Zweck der folgenden Mitteilung.

---

1. Es sei $f(x, y)$ eine in einem gewissen Bereiche T eindeutige und stetige Funktion der beiden reellen Veränderlichen (x, y). Wir setzen zur Abkürzung, wie üblich:

$$(1) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv f_1(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv f_2(x,y),$$

und ausserdem:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_1(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - f_2(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \\ \equiv f(x,y\,|\,x_0,y_0). \end{aligned}$$

Man sagt alsdann, $f(x, y)$ habe im Punkte (x_0, y_0) ein vollständiges Differential[2]) oder, wie ich etwas kürzer es bezeichnen will, $f(x, y)$ sei bei (x_0, y_0) differenzierbar,[3]) wenn $f_1(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0)$ bestimmte Werte besitzen und zugleich:

$$(3) \qquad |f(x,y\,|\,x_0,y_0)| < \varepsilon(|x-x_0| + |y-y_0|) \text{ für } \left\{\begin{matrix} |x-x_0| \\ |y-y_0| \end{matrix}\right\} < \delta$$

($\varepsilon > 0$ von beliebig vorgeschriebener, $\delta > 0$ von entsprechend zu bestimmender Kleinheit).

---

weges nicht als ausschlaggebend erscheint. (Vgl. die p. 1, Fussn. 3 zitierte Mitteilung p. 55, 60).

[1]) Vgl. im übrigen meine Bemerkungen: Transact. of the Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 418.

[2]) S. z. B. Stolz, Grundzüge der Diff.- und Integral-Rechnung, I (1893), p. 133.

[3]) Also „differenzierbar" (schlechthin) im Sinne von „total differenzierbar".

Ist $f(x, y)$ für jede einzelne Stelle (x_0, y_0) des Bereiches T differenzierbar, so braucht deshalb $f(x, y)$ noch nicht in T gleichmässig differenzierbar zu sein. Hierzu müssen nämlich noch die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sein, deren Bestehen durch die blosse Differenzierbarkeit für jedes einzelne (x_0, y_0) noch keineswegs gewährleistet wird:

1) $|f_1(x_0, y_0)|$, $|f_2(x_0, y_0)|$ bleiben für alle (x_0, y_0) des Bereiches T unter einer festen Schranke.
2) Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein bestimmtes $\delta > 0$, welches für alle (x_0, y_0) die Existenz der Ungleichungen (3) nach sich zieht.

2. Bezeichnet man mit Δ irgend ein dem Bereiche T angehöriges Dreieck und mit $\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx$, $\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dy$ Integrale, welche (etwa in positiver Richtung) über die Begrenzung dieses Dreiecks zu erstrecken sind, versteht man ferner unter (x_0, y_0) einen ganz beliebigen Punkt des Bereiches T, so ergibt sich mit Benützung der Identität (2) unmittelbar die folgende identische Umformung:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx = & \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx \\ & + (f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_2(x_0, y_0) \cdot y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} dx \\ & + f_1(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dx + f_2(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} y \cdot dx.\end{aligned}$$

Da aber offenbar:

$$\int\limits_{(\Delta)} dx = 0, \quad \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dx = 0,$$

so reduziert sich diese Gleichung auf die folgende:

$$(4^a) \quad \int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + f_2(x_0, y_0) \int\limits_{(\Delta)} y \cdot dx.$$

Analog ergibt sich:

$$(4^b) \quad \int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dy = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy + f_1(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dy.$$

3. Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden Satz (Übertragung der Goursat'schen Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integral-Satzes auf reelle Kurven-Integrale):

Sind $P(x,y)$, $Q(x,y)$ eindeutig definiert und differenzierbar[1]) *im Innern und auf der Begrenzung*[2]) *eines Dreiecks $\varDelta$ und besteht daselbst die Beziehung:*

$$P_2(x,y) = Q_1(x,y), \tag{5}$$

so hat man:

$$\int_{(\varDelta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0. \tag{6}$$

Beweis. Halbiert man die drei Seiten von $\varDelta$ und zerlegt $\varDelta$ durch geradlinige Verbindung der Halbierungspunkte in 4 kongruente, dem ursprünglichen ähnliche Dreiecke $\varDelta_1^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, 4)$, so hat man:

$$\int_{(\varDelta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \sum_1^4{}^{\varkappa} \int_{(\varDelta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy),$$

und daher:

$$\left| \int_{(\varDelta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy \right| \leqq \sum_1^4{}^{\varkappa} \left| \int_{(\varDelta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right|.$$

Unter den 4 Dreiecken $\varDelta_1^{(\varkappa)}$ muss dann offenbar mindestens eins vorhanden sein, für welches:

$$\left| \int_{(\varDelta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right| \geqq \tfrac{1}{4} \left| \int_{(\varDelta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right|$$

ausfällt. Es werde dieses Dreieck oder, wenn mehrere dieser Art vorhanden sein sollten, ein beliebig aus diesen herausge-

---

[1]) Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x,y)$ in dem oben definierten Sinne schliesst offenbar allemal schon die Stetigkeit von $f(x,y)$ mit ein.

[2]) Das Verhalten bezw. die Existenz von $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ausserhalb $\varDelta$ kommt überhaupt nicht in Betracht. Insbesondere brauchen also $P(x,y)$, $Q(x,y)$ für die Punkte der Begrenzung nach aussen hin weder differenzierbar, noch stetig zu sein.

griffenes, aber nunmehr bestimmtes mit Δ_1 bezeichnet. Alsdann wird also:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leq 4\cdot\left|\int_{(\Delta_1)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|.$$

Wendet man jetzt die analoge Vierteilung auf das Dreieck Δ_1 an, so ergibt sich mit Benützung der nämlichen Schlussweise:

$$\left|\int_{(\Delta_1)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leq 4\cdot\left|\int_{(\Delta_2)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|,$$

und daher:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leq 4^2\cdot\left|\int_{(\Delta_2)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|,$$

wo jetzt Δ_2 ein bestimmtes Viertel-Dreieck von Δ_1 bedeutet.

Durch n malige Anwendung dieser Schlussweise gelangt man zu einer Beziehung von der Form:

$$(7)\qquad \left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leq 4^n\cdot\left|\int_{(\Delta_n)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|.$$

Dabei bilden

$$\Delta,\quad \Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \ldots .\, \Delta_n$$

eine (offenbar unbegrenzt fortsetzbare) Dreiecksfolge von folgender Beschaffenheit: jedes Dreieck Δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ bildet einen Bestandteil (nämlich ein Viertel) des unmittelbar vorangehenden und besitzt halb so grosse Seiten, wie jenes. Bezeichnet man also mit

$$s,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots .\, s_n$$

die Umfänge der betreffenden Dreiecke, so hat man: $s_1 = \frac{s}{2}$, $s_2 = \frac{s}{2^2}$ und allgemein:

$$(8)\qquad s_n = \frac{s}{2^n}.$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung des angedeuteten Prozesses konvergieren die Dreiecke Δ_n gegen einen bestimmten, dem Innern oder der Begrenzung von Δ angehörigen Punkt (x_0, y_0). Wird dann $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so muss sich

auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ein $\delta > 0$ so fixieren lassen, dass:

$$(9) \qquad \left.\begin{array}{l} |P(x, y \,|\, x_0, y_0)| \\ |Q(x, y \,|\, x_0, y_0)| \end{array}\right\} < \varepsilon \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)$$

für alle dem Bereiche $\varDelta$ angehörigen (x, y), welche den Ungleichungen genügen:

$$(9^a) \qquad \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array}\right\} < \delta.$$

Andererseits ergibt sich mit Benützung der Transformation (4^a), (4^b) zunächst:

$$\int_{(\varDelta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \int_{(\varDelta_n)} (P(x, y \,|\, x_0, y_0) \cdot dx + Q(x, y \,|\, x_0, y_0) \cdot dy)$$
$$+ P_2(x_0, y_0) \int_{(\varDelta_n)} y \cdot dx + Q_1(x_0, y_0) \int_{(\varDelta_n)} x \cdot dy.$$

Da aber nach Voraussetzung (Gl. (5)):

$$P_2(x_0, y_0) = Q_1(x_0, y_0)$$

und sodann:

$$\int_{(\varDelta_n)} y \cdot dx + \int_{(\varDelta_n)} x \cdot dy = \int_{(\varDelta_n)} d(xy) = 0,$$

so reduziert sich die obige Gleichung auf die folgende:

$$(10) \quad \int_{(\varDelta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \int_{(\varDelta_n)} (P(x, y|x_0, y_0) \cdot dx + Q(x, y|x_0, y_0) \cdot dy).$$

Wird jetzt n gross genug angenommen, dass $\varDelta_n$ vollständig in die durch Ungl. (9^a) charakterisierte Umgebung des Punktes (x_0, y_0) hineinfällt, so folgt aus Gl. (10) mit Benützung der Ungleichungen (9):

$$\left| \int_{(\varDelta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right| < \varepsilon \cdot \int_{(\varDelta_n)} (|x - x_0| + |y - y_0|) \cdot (|dx| + |dy|).$$

Wegen:

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array}\right\} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \frac{s_n}{2}$$

wird sodann:

$$\left|\int\limits_{(\Delta_n)}(P\,dx+Q\cdot dy)\right|<\varepsilon\cdot s_n\cdot\int\limits_{(\Delta_n)}(|\,dx\,|+|\,dy\,|)$$

$$<\varepsilon\cdot s_n\cdot 2\,s_n=\varepsilon\cdot 2\,s_n^2=\varepsilon\cdot 2\cdot\frac{s^2}{4^n}\ (\text{s. Gl. (8)}),$$

sodass also die Ungleichung (7) in die folgende übergeht:

$$(11)\qquad \left|\int\limits_{(\Delta)}(P\,dx+Q\cdot dy)\right|<\varepsilon\cdot 2\,s,$$

d. h., da ε unbegrenzt verkleinert werden kann, schliesslich, wie behauptet:

$$\int\limits_{(\Delta)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)=0.$$

4. Man bemerke, dass die bei dem obigen Beweise als grundlegend vorausgesetzte Bedingung der Differenzierbarkeit von $P(x,y)$, $Q(x,y)$ (immer in dem oben näher definierten Sinne) einen wesentlich anderen Charakter besitzt, wie diejenigen Bedingungen, welche zum Beweise des betreffenden Integralsatzes mit Hilfe des Green'schen Satzes:

$$\int\int(Q_1-P_2)\,dx\cdot dy=\int(P\cdot dx+Q\cdot dy)$$

erforderlich sind. Diese letzteren sind Stetigkeits-Bedingungen für $Q_1(x,y)$, $P_2(x,y)$, welche die Existenz der Doppel-Integrale $\int\int Q_1\cdot dx\,dy$, $\int\int P_2\cdot dx\,dy$ nach sich ziehen sollen, welche also, allgemein zu reden, in gewissem Umfange die Existenz von Stetigkeitspunkten für $Q_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ als Funktionen der beiden Veränderlichen (x,y) verlangen.[1]) Dagegen hat die Differenzierbarkeit von $Q(x,y)$, $P(x,y)$ zunächst mit der Stetigkeit von $Q_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ überhaupt nichts zu tun (wenn auch umgekehrt nach einem bekannten Satze[2]) die Stetigkeit von $Q_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ als Funktionen von (x,y) für die Differenzierbarkeit von $Q(x,y)$, $P(x,y)$ sich als hinreichend erweist). Hierin liegt aber eine neue Bestätigung der von mir bei früherer Gelegenheit[3]) gemachten Bemerkung,

---

[1]) Genaueres s. dieser Berichte Bd. 29 [1899], p. 59.

[2]) Stolz, a. a. O. p. 134.

[3]) A. a. O. p. 60.

dass der Green'sche Satz keineswegs als allgemeinste Grundlage der Relation $\int (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0$ angesehen werden kann.

5. Aus dem in Nr. 3 bewiesenen Satze für reelle Integrale gewinnt man unmittelbar den Cauchy-Goursat'schen Satz für komplexe Integrale: $\int_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0$, wenn man $\int f(z) \cdot dz$ in seinen reellen und imaginären Teil zerlegt. Dagegen lässt sich nicht umgekehrt der Satz von Nr. 3 aus dem entsprechenden Satze für $\int f(z) \cdot dz$ herleiten. Man würde auf diesem Wege immer nur das Resultat gewinnen, dass:

$$\int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

wenn $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ausser den früher angegebenen Bedingungen auch noch der Beziehung:

$$P_1(x, y) = - Q_2(x, y)$$

genügen. Der Satz von Nr. 3 ist also der allgemeinere und schon aus diesem Grunde dürfte es zweckmässig erscheinen, ihn als den eigentlichen Fundamentalsatz zum Ausgangspunkt zu nehmen, zumal ja überhaupt die prinzipielle Zurückführung der komplexen Integrale auf reelle Kurven-Integrale in logischer und praktischer Hinsicht erhebliche Vorzüge besitzt.

Will man freilich nur die Beziehung $\int_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0$ (unter der Voraussetzung eines eindeutigen, differenzierbaren $f(z)$) auf dem denkbar kürzesten Wege herleiten, so braucht man nur das in Nr. 3 angewendete Beweisverfahren mutatis mutandis direkt auf $\int f(z) \cdot dz$ zu übertragen. Man findet zunächst, analog wie dort:

(12) $$\left| \int_{(\Delta)} f(z) \cdot dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{(\Delta_n)} f(z) \cdot dz \right|.$$

Bezeichnet man sodann mit z_0 den Grenzpunkt der Δ_n, so besteht auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $f(z)$ eine Beziehung von der Form:

(13) $$|f(z|z_0)| \equiv |f(z) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot (z - z_0)| < \varepsilon \cdot |z - z_0| \quad \text{für } |z - z_0| < \delta.$$

Durch identische Umformung ergibt sich aber:

$$(14)\quad \begin{aligned}\int\limits_{(\Delta_n)} f(z)\cdot dz &= \int\limits_{(\Delta_n)} f(z, z_0)\cdot dz + (f(z_0) - f'(z_0)\cdot z_0)\int\limits_{(\Delta_n)} dz + f'(z_0)\int\limits_{(\Delta_n)} z\cdot dz \\ &= \int\limits_{(\Delta_n)} f(z|z_0)\cdot dz\end{aligned}$$

(wegen: $\int\limits_{(\Delta_n)} dz = 0$, $\int\limits_{(\Delta_n)} z\cdot dz = 0$, wie unmittelbar aus der Definition des komplexen Integrals als Summen-Grenzwert hergeleitet werden kann.[1]))

Wird also wiederum n so gross angenommen, dass Δ_n in die Umgebung $|z - z_0| < \delta$ hineinfällt, so ergibt sich mit Benützung von Ungl. (13):

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{(\Delta_n)} f(z)\cdot dz\Big| &< \varepsilon\cdot\int\limits_{(\Delta_n)} |z - z_0|\cdot|dz| \\ &< \varepsilon\cdot\frac{s_n}{2}\cdot\int\limits_{(\Delta_n)} |dz| \\ &= \varepsilon\cdot\frac{s_n}{2}\cdot s_n = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{s^2}{4^n},\end{aligned}$$

und daher schliesslich:

$$\Big|\int\limits_{(\Delta)} f(z)\cdot dz\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot s^2 \quad \text{d. h.} \quad \int\limits_{(\Delta)} f(z)\cdot dz = 0.^{2})$$

---

1) Vgl. Transact. of the Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 417.

2) Dieser Beweis unterscheidet sich von dem indirekt gefassten, welchen Herr Moore in den Transact. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 505 bezw. 502 mitgeteilt hat, ausser durch die direkte Fassung (vgl. a. a. O. p. 503, Fussn. 1) nur noch durch die im vorliegenden Falle offenbar zweckmässigere Einführung von Teil-Dreiecken an Stelle der dort benützten quadratischen Teilung. Er ist noch merklich kürzer als der a. a. O. Bd. 2, p. 420 von mir angegebene Beweis, da er nicht erst die Herleitung des Goursat'schen Lemmas erfordert.

Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und solchen der Statik.

Von **Sebastian Finsterwalder.**

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Bei photogrammetrischen Untersuchungen[1]) traten einige Aufgaben der Ausgleichungsrechnung auf, deren Lösung in der Sprache der Statik starrer Systeme einen anschaulichen Ausdruck fand. Ich erwähne die drei folgenden:

1. Zwei Haufen von je n, einander zugeordneten Punkten ohne Änderung ihrer Form und Grösse durch Verschiebung und Drehung so gegeneinander zu legen, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen entsprechender Punkte ein Minimum wird.

2. Einen Haufen von n Punkten und ein Bündel von n, den Punkten zugeordneten Strahlen ohne Änderung ihrer Form und Grösse durch Verschiebung und Drehung so gegeneinander zu legen, dass die Summe der Quadrate der kürzesten Abstände der Punkte von den entsprechenden Strahlen ein Minimum wird.

3. Zwei Bündel von je n, einander zugeordneten Strahlen, deren Mittelpunkte eine gegebene Entfernung haben, ohne Änderung ihrer Form durch Drehung so gegeneinander zu legen, dass die Summe der Quadrate der kürzesten Abstände entsprechender Strahlen ein Minimum wird.

---

[1]) S. Finsterwalder: Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abhdlgn. der K. B. Akad. der Wiss., II. Kl., Bd. XXII, Abt. II, S. 240 und 247.

S. Finsterwalder und W. Scheufele: Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Diese Ber. Bd. XXXIII, 1903, S. 602, Anmerkung.

In allen drei Fällen bilden die Strecken, deren Quadratsumme ein Minimum gibt, als Kräfte aufgefasst, ein Gleichgewichtssystem.

Als gemeinsamer Grund hiefür lässt sich der bekannte nach Castigliano benannte Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit beim Gleichgewicht elastischer Systeme anführen. Wir denken uns nämlich die beiden Gebilde (Punkthaufen oder Strahlenbündel), welche zusammengekoppelt werden sollen, als starre Systeme, die durch elastische Fäden an entsprechenden Elementen (Punkte oder Strahlen) mit einander verknüpft sind. Dabei schreiben wir den Fäden folgende Eigenschaften zu: 1. Ihre Länge ist im ungespannten Zustande verschwindend. 2. Wirkt eine Kraft P dehnend auf sie ein, so wächst ihre Länge proportional jener Kraft und zwar bei jedem Faden im gleichen Verhältnis. 3. An den Punkten der Haufen seien die Fäden mit dem einen Ende einfach befestigt. 4. Die Enden der Fäden jedoch, welche an einem Strahl angreifen, tragen einen Ring von verschwindenden Abmessungen, der auf dem (als dünnen starren Stab gedachten) Strahl reibungslos gleitet. Bei der dritten Aufgabe sollen ausserdem die beiden Bündel an ihren Mittelpunkten durch eine starre Stange gelenkig verbunden sein. Auf diese Weise werden die zwischen den Elementen der zusammengekoppelten Gebilde gespannten Fäden jene Strecken bilden, deren Quadratsumme beim Ausgleichungsproblem ein Minimum wird. Die Formänderungsarbeit eines Fadens von der Länge l, d. h. jene Arbeit, die nötig ist um den Faden von der anfänglichen Länge Null bis zur Länge l zu dehnen, ist $\frac{1}{2} k l^2$, wenn $k l$ die Kraft bezeichnet, die den Faden auf die Länge l spannt. Die genannte Formänderungsarbeit, die in irgend einer Lage der beiden elastisch gekoppelten Gebilde aufgespeichert ist, wird daher durch den Ausdruck $\frac{1}{2} k \Sigma l^2$ gegeben. In der Gleichgewichtslage der gekoppelten Gebilde ist nach dem Castiglianoschen Satze die Formänderungsarbeit ein Minimum und daher auch die Ausgleichsbedingung: $\Sigma l^2 =$ Minimo erfüllt. Dabei sind die an jedem der beiden gekoppelten starren Gebilde wirkenden Kräfte nach

Länge und Richtung durch die Verbindungsfäden dargestellt und es müssen demnach diese Verbindungsstrecken, so wie die Kräfte selbst, ein Gleichgewichtssystem bilden.

Die mechanische Analogie zu den Ausgleichungsaufgaben hat natürlich für die Praxis nur den Wert eines Orientierungs- und Kontrolmittels und vereinfacht die Rechenarbeit der Ausgleichung keineswegs. Dagegen zeigt sie uns, dass die Giltigkeit der Sätze nicht wie jene der Ausgleichungsrechnung auf solche Gebilde beschränkt ist, die sich bis auf kleine Grössen zusammenpassen lassen.

Im Anschluss an die betrachtete mechanische Analogie soll noch eine Ergänzung und Berichtigung der Formeln, die früher bei der Ausgleichung der 3. Aufgabe gegeben wurden, Erwähnung finden. Damals war vorausgesetzt, dass die beiden Strahlenbündel sich bereits in solcher Stellung zu einander befinden, bei welcher die kürzesten Abstände entsprechender Strahlen sehr klein sind. Die für die günstigste Zusammenstellung entwickelten Formeln beabsichtigten die Quadratsumme der kürzesten Abstände zu einem Minimum zu machen. Dabei wurde aber auf die Wanderung der Fusspunkte der kürzesten Abstände längs der Strahlen bei Veränderung der gegenseitigen Lage des Bündels keine Rücksicht genommen. Die Formeln geben demnach, um bei der mechanischen Analogie zu bleiben, diejenige Gleichgewichtslage der beiden Bündel, bei welcher entsprechende Strahlen an den Endpunkten ihrer kürzesten Abstände in der Ausgangslage durch elastische Fäden verknüpft sind. Sie verringern natürlich die Quadratsumme der kürzesten Abstände, aber diese Abstände hören dann auf, kürzeste zu sein. Die Quadratsumme der wahren kürzesten Abstände in der so bestimmten Gleichgewichtslage ist sicherlich noch geringer, erreicht aber im allgemeinen nicht das mögliche Minimum, welcher der Koppelung beider Bündel durch Fäden, deren Enden auf den Strahlen gleiten, entspricht. Indessen gestatten die früher angewandten Methoden auch die Erledigung dieses etwas verwickelten Falles der Ausgleichung, wie noch kurz gezeigt werden soll.

Die Entfernung der beiden Bündelmittelpunkte, vom ersten zum zweiten gerechnet, sei durch den Vektor $\mathfrak{E}$ gegeben. Zwei entsprechende Strahlen seien durch die in ihnen liegenden Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ festgelegt. Die Länge $|\mathfrak{K}|$ ihres kürzesten Abstandes erhält man, indem man den Vektor $\mathfrak{E}$ auf die Richtung des kürzesten Abstandes orthogonal projiziert. Die Richtung des kürzesten Abstandes ist aber jene des Vektorproduktes von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, das wir mit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ bezeichnen. Die Projektion von $\mathfrak{E}$ auf die Richtung von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist durch das skalare Produkt $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, welches wir noch durch die Länge $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ des Vektors $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ zu dividieren haben, bestimmt. Es ist somit die Länge $|\mathfrak{K}|$ des kürzesten Abstandes der Strahlen durch folgende Formel ausgedrückt:[1])

$$|\mathfrak{K}| = \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}. \qquad 1)$$

Erteilen wir den Vektoren $\mathfrak{a}$, bezw. $\mathfrak{b}$ kleine Drehungen, welche der Grösse und Axenrichtung nach durch die Vektoren $\mathfrak{U}$, bezw. $\mathfrak{V}$ bestimmt sind, so gehen sie in $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{U}$, bezw. $\mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{V}$ über und für die Länge $|\mathfrak{K}^*|$ ihres kürzesten Abstandes nach der Drehung folgt:

$$|\mathfrak{K}^*| = \frac{\mathfrak{E} \cdot [\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times [\mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{V}]}{|[\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times [\mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{V}]|}. \qquad 2)$$

Mit Rücksicht auf die Kleinheit der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ gelten genähert folgende Entwickelungen, bei welchen die Glieder 2. Ordnung in $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ vernachlässigt sind.

$$[\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times [\mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{V}] = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + [\mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times [\mathfrak{b} \times \mathfrak{V}]$$

$$|[\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times [\mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{V}]|^{-1} = ((\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + [\mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times [\mathfrak{b} \times \mathfrak{V}])^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}\left(1 - \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot ([\mathfrak{a} \times \mathfrak{U}] \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times [\mathfrak{b} \times \mathfrak{V}])}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2}\right).$$

---

[1]) Auch die Längen A bezw. B der Strahlen vom Büschelmittelpunkte bis zum Fusspunkte des kürzesten Abstandes lassen sich einfach durch Vektoren ausdrücken:

$$A = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{E})}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2}, \quad B = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{E})}{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2}.$$

Der Einheitsvektor in Richtung des kürzesten Abstandes nach erfolgter Drehung wird daher:

$$\frac{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|}+\frac{[\mathfrak{a}\times\mathfrak{U}]\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times[\mathfrak{b}\times\mathfrak{V}]}{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|}-\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\frac{(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot([\mathfrak{a}\times\mathfrak{U}]\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times[\mathfrak{b}\times\mathfrak{V}])}{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|^2}.$$

Wird derselbe mit $\mathfrak{C}$ skalar multipliziert, so fällt der dritte Summand fort, da er ausser den kleinen Grössen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ auch noch das Produkt $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ als Faktor enthält, welches infolge des Umstandes, dass $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nahezu in einer Ebene liegen, selbst klein ist. Somit ergibt sich:

$$|\mathfrak{K}^*|=|\mathfrak{K}|+\frac{\mathfrak{C}\cdot([\mathfrak{a}\times\mathfrak{U}]\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times[\mathfrak{b}\times\mathfrak{V}])}{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|}. \qquad 3)$$

Verwandelt man die Vektorprodukte in skalare, so erhält man:

$$|\mathfrak{K}^*|=|\mathfrak{K}|+\frac{\mathfrak{C}\cdot(\mathfrak{U}-\mathfrak{V})\;\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{V}\;\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{C}-\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{U}\;\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{C}}{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|}. \qquad 4)$$

Geht man zu den Koordinaten über und setzt man:

$$\mathfrak{U}=U_1\,\mathfrak{i}+U_2\,\mathfrak{j}+U_3\,\mathfrak{k},\quad \mathfrak{V}=V_1\,\mathfrak{i}+V_2\,\mathfrak{j}+V_3\,\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{a}=\alpha\,\mathfrak{i}+\beta\,\mathfrak{j}+\gamma\,\mathfrak{k},\quad \mathfrak{b}=\lambda\,\mathfrak{i}+\mu\,\mathfrak{j}+\nu\,\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{C}=\mathfrak{j}\ \text{und}\ |\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|=\sin\varphi,$$

wo φ den Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bedeutet, so lautet die Formel 4):

$$|\mathfrak{K}^*|=\frac{\lambda\gamma-\alpha\nu}{\sin\varphi}+$$
$$+\frac{-\beta\lambda U_1-\beta\nu U_3+\alpha\mu V_1+\gamma\mu V_3+(\alpha\lambda+\gamma\nu)(U_2-V_2)}{\sin\varphi} \qquad 5)$$

Sie stellt eine Fehlergleichung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate dar.

Man erhält ebensoviele Fehlergleichungen, als entsprechende Strahlenpaare in beiden Büscheln vorhanden sind und aus ihnen wird man im Falle der Praxis in der üblichen Weise

die Normalgleichungen für die fünf unbekannten Drehungen U_1, V_1, $U_2 - V_2$, U_3, V_3 bilden.

Hier soll noch gezeigt werden, wie aus den Bedingungen der Ausgleichung rein rechnerisch der Satz vom Gleichgewicht der kürzesten Abstände der Strahlen nach der Ausgleichung folgt. Die Ausgleichung fordert, dass $\sum_i |\mathfrak{K}_i^*|^2$ ein Minimum werde. Um die notwendigen Bedingungen hiefür zu finden, lässt man $\mathfrak{U}$ um $d\,\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ um $d\,\mathfrak{V}$ wachsen und setzt die zugehörigen Änderungen der Summe gleich Null. Gehen wir von der Gleichung 3) aus, so erhalten wir:

$$\sum_i |\mathfrak{K}_i^*| \frac{\mathfrak{C}\cdot[\mathfrak{a}_i \times d\,\mathfrak{U}]\times\mathfrak{b}_i}{|\mathfrak{a}_i\times\mathfrak{b}_i|} = 0, \quad \sum_i |\mathfrak{K}_i^*| \frac{\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{a}_i\times[\mathfrak{b}_i\times d\,\mathfrak{V}]}{|\mathfrak{a}_i\times\mathfrak{b}_i|} = 0. \quad 6)$$

Daraus ergibt sich durch Umstellung der Produkte:

$$d\,\mathfrak{U}\cdot\sum_i |\mathfrak{K}_i^*| \frac{[\mathfrak{b}_i\times\mathfrak{C}]\times\mathfrak{a}_i}{|\mathfrak{a}_i\times\mathfrak{b}_i|} = 0, \quad d\,\mathfrak{V}\cdot\sum_i |\mathfrak{K}_i^*| \frac{\mathfrak{b}_i\times[\mathfrak{a}_i\times\mathfrak{C}]}{|\mathfrak{a}_i\times\mathfrak{b}_i|} = 0. \quad 7)$$

Da diese Gleichungen für alle $d\,\mathfrak{U}$ und $d\,\mathfrak{V}$ gelten müssen, ziehen sie das Verschwinden der Summen, mit welchen $d\,\mathfrak{U}$ und $d\,\mathfrak{V}$ skalar multipliziert sind, nach sich. In diesen Summen stellt der Bruch bis auf Grössen höherer Ordnung einen Vektor dar, dessen Länge gleich jener des Strahles vom Büschelmittelpunkt bis zum Fusspunkt des kürzesten Abstandes ist, während seine Richtung senkrecht auf dem Strahl in der durch ihn und den Vektor $\mathfrak{C}$ gehenden Ebene steht. Dieser Vektor steht somit auch senkrecht auf der Ebene durch den Strahl und den kürzesten Abstand und gibt in Verbindung mit dem Faktor $|\mathfrak{K}_i^*|$ das vektorielle Drehmoment des kürzesten Abstandes in Bezug auf den Büschelmittelpunkt. Das Verschwinden der beiden Summen sagt somit aus, dass die Summe der vektoriellen Drehmomente der kürzesten Abstände in Bezug auf beide Büschelmittelpunkte verschwindet und dass somit diese Abstände, als Kräfte aufgefasst, ein Gleichgewichtssystem bilden.

Die Gleichungen 7) treten an Stelle der Gleichungen 10) auf Seite 238 in der Abhandlung über eine Grundaufgabe der

Photogrammetrie.[1]) Geht man von den Vektoren wieder zu den Koordinaten über, indem man die gleichen Einführungen wie in Gleichung 4) macht, so erhält man aus jeder der beiden Vektorgleichungen drei skalare, von welchen jedoch die beiden auf die j-Richtung bezüglichen dieselben sind. Sie vertreten die aus den Bedingungsgleichungen 5) abzuleitenden Normalgleichungen. Von ihrer ausführlichen Wiedergabe sei der Kürze halber abgesehen.

Anhangsweise erwähne ich noch, dass der erste Teil der von W. Scheufele und mir behandelten Aufgabe über das Rückwärtseinschneiden im Raum[1]) bereits von J. A. Grunert im 1. Bande (1841) seines Archivs unter dem Titel „Das Pothenotsche Problem in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie" S. 238 eine Bearbeitung mit Zurückführung auf eine Gleichung 4. Grades erfahren hat. Vom gleichen Autor rührt auch die erste Bearbeitung des Pothenotschen Problems auf der Kugel (Archiv für Math. u. Phys., 7. Bd., S. 104) her, welches Problem ich in der Abhandlung über eine Grundaufgabe der Photogrammetrie somit irrtümlich als bislang ungelöst bezeichnet habe. Den Hinweis auf beide Arbeiten Grunerts verdanke ich Herrn Kollegen S. Günther.

[1]) Zitiert S. 683 Anmerkung.



Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 7. November 1903. Seite

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 25. November 1903.

Sitzung vom 5. Dezember 1903.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1903. Heft V.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

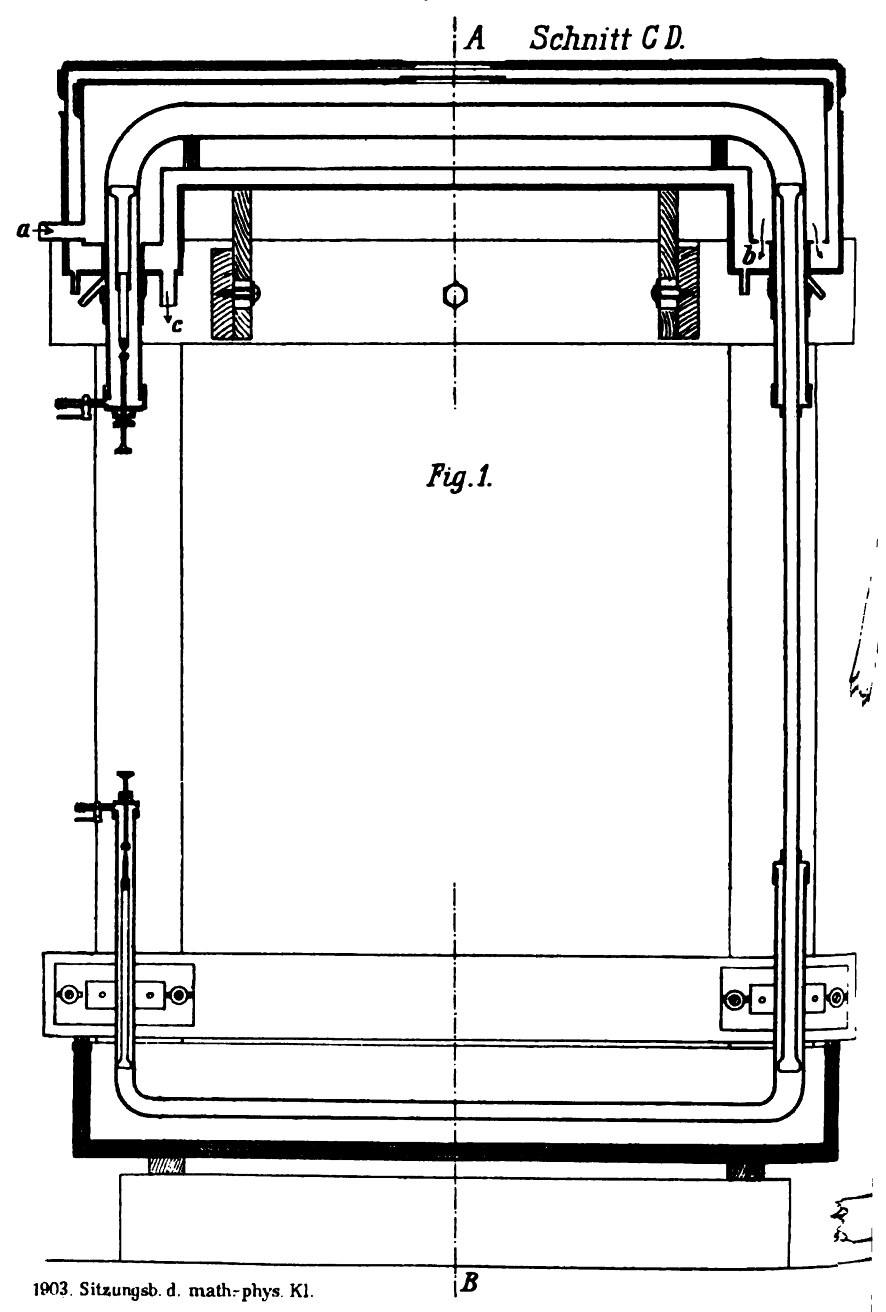
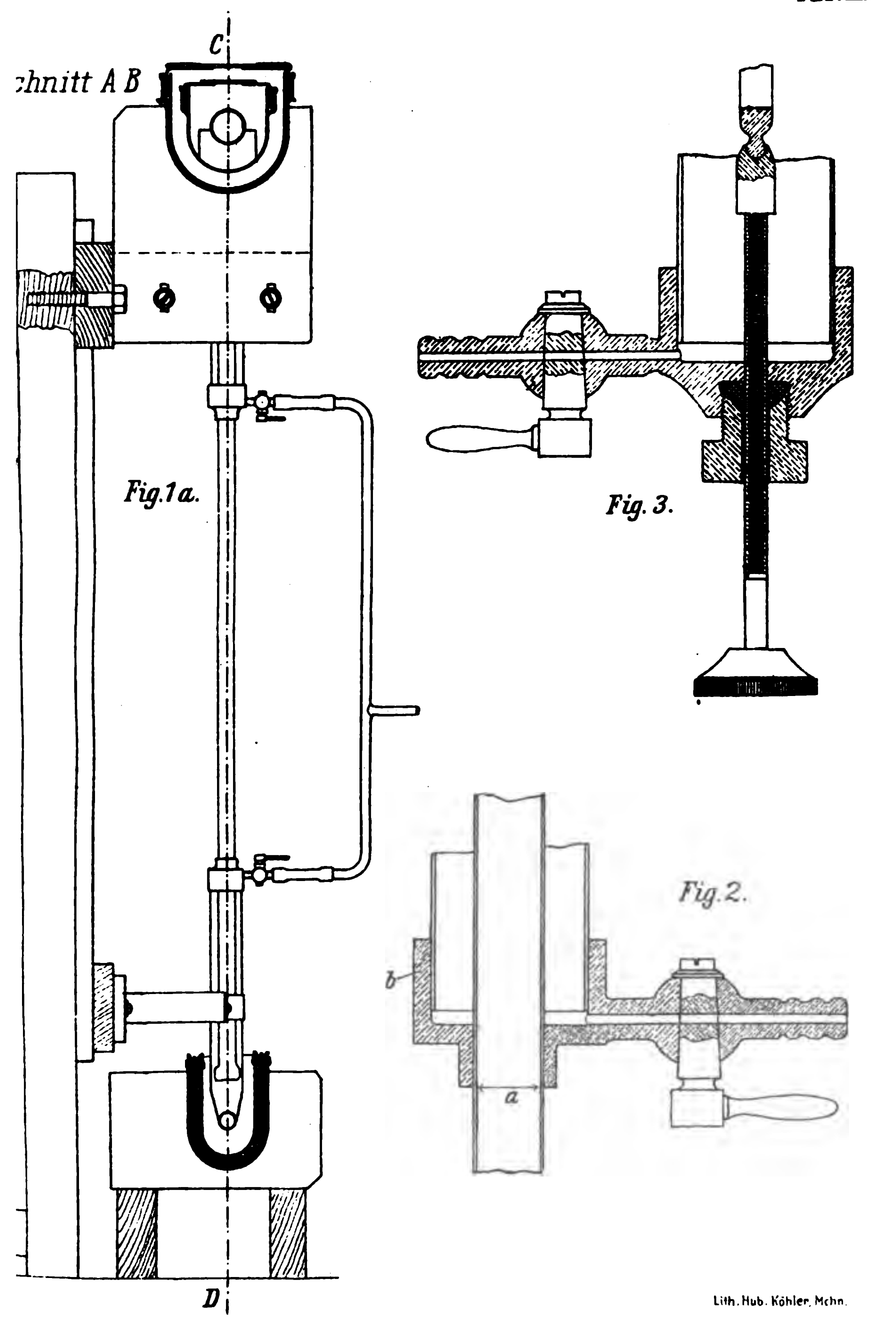


Fig. 1.



Lith. Hub. Köhler, Mchn.

Über die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{c_p}{c_v}$ der spezifischen Wärmen des Stickstoffs vom Druck bei der Temperatur der flüssigen Luft.

Von **Siegfried Valentiner.**

(Mit Taf. III.)

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Einleitung.

Abgesehen davon, dass es wünschenswert ist, die spezifischen Wärmen der Gase bei konstantem Druck c_p und bei konstantem Volumen c_v als physikalisch wichtige Grössen an sich kennen zu lernen und ihr Verhalten bei Druck- und Temperaturänderungen genau zu bestimmen, — wodurch auch die mit der Bestimmung dieser Grössen eng verbundene praktische Frage nach der Grösse der Schallgeschwindigkeit in Gasen Erledigung finden würde, — wird der Untersuchung der Grössen c_p, c_v und $k = \frac{c_p}{c_v}$ unter verschiedenen Drucken und Temperaturen vor allem in Hinsicht auf die nahe Beziehung dieser Grössen zu zwei grossen Klassen physikalischer Erscheinungen allseitiges Interesse entgegengebracht. Die vollkommene Übereinstimmung, die man bei einatomigen Gasen zwischen dem beobachteten und von der kinetischen Gastheorie geforderten Wert des Verhältnisses der spezifischen Wärmen bisher erhalten

hat,[1]) bietet ein erfreuliches Kriterium für die Richtigkeit der Vorstellung, die man sich über Atom- und Molekular-Energie gemacht hat, und ermutigt zu dem Versuch, diese Vorstellungen, die bezüglich der mehratomigen Gase noch weniger scharf präzisiert werden konnten, mit Benutzung der aus der Erfahrung zu gewinnenden Kenntnis der Grössen c_p, c_v und $\frac{c_p}{c_v}$ mit Erfolg weiterzubilden. Andrerseits werden in der Thermodynamik Gleichungen abgeleitet, welche Beziehungen herstellen zwischen den genannten Grössen und ihren Veränderungen mit Druck und Temperatur und den verschiedenen Zustandsgrössen des Gases, so dass man durch experimentelle Bestimmung aller dieser Grössen eine Prüfung der Theorie an der Erfahrung vornehmen kann, oder auch mit Voraussetzung der Richtigkeit der Theorie aus der Bestimmung eines Teiles dieser Grössen, die anderen durch Rechnung abzuleiten vermag. Infolge des Interesses, welches daher die genauere Kenntnis des Verhaltens von c_p, c_v und $\frac{c_p}{c_v}$ auch in der Tat verdient, liegen über den Gegenstand eine sehr grosse Reihe von Arbeiten vor, die indessen noch lange nicht genügen, um ein vollständiges Bild über das Verhalten dieser Grössen geben zu können. Die grundlegenden Versuche verdanken wir Regnault, der für Luft, Wasserstoff, Kohlensäure und mehrere andere Gase und Dämpfe zunächst die spezifische Wärme bei konstantem Druck in Temperaturgrenzen bis zu 200°, dann auch unter Anwendung von Drucken bis zu 12 Atmosphären bestimmte. Er schloss aus seinen Beobachtungen, dass die spezifische Wärme bei konstantem Druck der sog. permanenten Gase merklich unabhängig von Druck and Temperatur sei, während die leichter kompressibeln Gase einen Unterschied in dieser Beziehung bemerken liessen. Diese Resultate sind in guter Übereinstimmung mit den aus der Thermodynamik folgenden für alle homogenen Körper geltenden Gleichungen:

---

[1]) Für Quecksilber: Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. Bd. 157, p. 368 1876. — Für Argon: Ramsay, Philos. Trans. (1895), Bd. 186 A, p. 186, Proc. Roy. Soc., Bd. 59 (1896) und 67 (1900); Niemeyer, Diss., Halle 1902.

$$1)\qquad c_p - c_v = \vartheta \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p$$

und

$$2)\qquad \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_\vartheta = -\vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}\right)_p$$

— worin ϑ die absolute Temperatur, p den Druck, v das spezifische Volumen und die Indices die bei der Differentiation konstant gehaltenen Grössen bedeuten. — Für ideale Gase fordert die Thermodynamik c_p und c_v als konstante Grössen, andrerseits sagen diese Gleichungen aus, dass eine Abhängigkeit der Grössen c_p und c_v von Druck und Temperatur hervortreten wird bei solchen Gasen, deren Zustandsgleichung nicht mehr die einfache Form des Boyle-Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes, sondern etwa die der van der Waals'schen Gleichung hat. Die Tatsachen lehren, dass im allgemeinen sehr stark veränderte Bedingungen zu Grunde gelegt werden müssen, um mit Sicherheit Abhängigkeiten der Grössen c_p und c_v von Druck und Temperatur bei permanenten Gasen konstatieren zu können. Die damit verknüpften Schwierigkeiten sind der Grund, dass auch erst in dem letzten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts wesentliche Fortschritte in der Bestimmung der Abhängigkeit der genannten Grössen von Druck und Temperatur gemacht wurden. Linde[1]) bestätigte 1896 zunächst das Thomson-Joule'sche Gesetz, dass $\Delta \vartheta = \frac{a}{\vartheta^2} \Delta p$ sei, worin a eine dem betreffenden Gas zukommende Konstante ist, in weiten Grenzen von Temperatur und Druck, und wies nach, dass c_p mit wachsendem p zunehmen müsse. Wenig früher war J. Joly[2]) schon durch beachtenswerte Versuche zu dem Resultat gekommen, dass c_v für Luft und Kohlensäure (besonders für letztere) mit der Dichte zunimmt, für Wasserstoff dagegen abnimmt. Amagat[3])

1) Linde, Wied. Ann., Bd. 57, p. 328 (1896).

2) Joly, Proc. Roy. Soc., Bd. 41, p. 352 (1886); Philos. Trans. 182 A, p. 73 (1892); 185, p. 943 (1894).

3) Amagat. C. R. 121, p. 863—866, 122, p. 66—70, Journ. d. Phys. (3) 5, p. 114 - 123 (1896).

stellte fest durch Versuche mit Drucken bis zu 1000 Atmosphären zwischen den Temperaturen 0° und 260°, dass c_p bei Kohlensäure mit wachsendem Druck um so schneller wächst, je tiefer die Temperatur ist, bis zu einem Maximum bei einem Druck, der um so höher ist, je höher die Temperatur. Gleiche Gesetze gelten sowohl nach Amagats wie nach Lussanas[1]) Bestimmungen für Luft und andere Gase.

Zum grossen Teil sind diese Resultate gewonnen aus direkter Beobachtung der Grösse c_p, teils, wie von Amagat, auch aus Berechnung mit Hilfe der genannten Gleichungen der Thermodynamik und Zugrundelegung der beobachteten Spannungs- und Ausdehnungskoeffizienten. Auf die zuletzt genannte Weise verfuhr auch Witkowski[2]) bei seiner Bestimmung der Abhängigkeit der Grösse c_p und c_v von Druck und Temperatur in den Grenzen bis etwa 70 Atmosphären und — 140° für atmosphärische Luft. Später bestimmte er[3]) experimentell mit Benutzung der Kundt'schen Methode der Staubfiguren die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{c_p}{c_v}$ vom Druck bei den Temperaturen 0° und — 78°.

Um einen Beitrag zu dieser in praktischer wie theoretischer Beziehung so hochwichtigen Frage zu liefern, wurden im Wintersemester 1900 von Herrn Geheimrat Röntgen Arbeiten zur Bestimmung der Abhängigkeit der Grössen c_p und $\frac{c_p}{c_v}$ von Druck und Temperatur angeregt, und zunächst auf seine Veranlassung die Bestimmung der Grösse $\frac{c_p}{c_v}$ des Stickstoffs bei 0° und 100° sowie bei der Temperatur der flüssigen Luft unter Atmosphärendruck durch Herrn Charl. M. Smith in Angriff genommen,[4]) und im vergangenen Jahre die vorliegende Arbeit „Über die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{c_p}{c_v}$ der spezifischen

[1]) Lussana, Il Nuovo Cimento (3) Bd. 36, (4) Bd. 1, 3, 6, 7 (1894—1898).

[2]) Witkowski, Journ. d. Phys. (3) 5, p. 123—132, 1896.

[3]) Witkowski, Anz. d. Akad. in Krakau, 1899, p. 138.

[4]) Über diese Versuche soll anderwärts berichtet werden.

Wärmen des Stickstoffs vom Druck bei der Temperatur der flüssigen Luft“ von mir ausgeführt.

Methode der Untersuchung.

Die Methode, welche in dieser Arbeit zur Bestimmung des Verhältnisses $k = \frac{c_p}{c_v}$ diente, ist die Ableitung dieser Grösse aus der Schallgeschwindigkeit mit Benutzung der Zustandsgleichung des Gases für die bei der Untersuchung in Betracht kommenden verschiedenen Drucke und der Temperatur der flüssigen Luft. Die Schallgeschwindigkeit wurde in Röhren bestimmt durch Vergleichung der Wellenlängen eines und desselben Tones unter gewöhnlichen und unter dem Ziel der Arbeit entsprechend veränderten Bedingungen. Zu dem Ende wurde nach Kundts Vorgang ein im 2. Knotenpunkt eingeklemmter Stab durch Anreiben in Longitudinalschwingungen versetzt, welche durch die Enden des Stabes an das Gas übertragen werden, das sich in weiten über die Enden des tönenden Stabes geschobenen Glasröhren befand. In dem einen Glasrohr befand sich das Gas unter Atmosphärendruck und Zimmertemperatur, in dem anderen, welches ich zum Unterschied von dem ersteren, dem Kontrollrohr, das Untersuchungsrohr nennen will, unter verschiedenen Drucken und der Temperatur der flüssigen Luft.

Die Schallgeschwindigkeit u in irgend einem homogenen Medium ist gegeben durch die Gleichung $u^2 = -v^2 \frac{dp}{dv}$; im Falle eines idealen Gases haben wir zur Bestimmung von $\frac{dp}{dv}$ die Beziehung $p v^k =$ const. zu benutzen, sodass $u^2 = k \cdot p \cdot v$ wird, ein Wert, der zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Kontrollrohr dienen wird. Zur Bestimmung derselben im Untersuchungsrohr müssen wir dagegen $\frac{dp}{dv}$ berechnen aus der für die vorliegende Bedingung geltenden Beziehung zwischen Temperatur, Druck und Dichte, welche sich zufolge der mit Bestelmeyer gemeinsam ausgeführten Untersuchung: „Über die

Dichte und die Abhängigkeit derselben vom Druck des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft" in Form der empirischen Gleichung darstellen lässt:

$$3) \qquad p\,v = h_1\,\vartheta + (h_2 + h_3\,\vartheta)\,p$$

(worin h_1, h_2, h_3 konstante Grössen sind).

Unabhängig von jeder Zustandsgleichung gilt nun die Beziehung:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q = k \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta.$$

Wir haben also aus (3) $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta$ zu bilden und dies in $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q$ einzusetzen, woraus sich die Schallgeschwindigkeit ergibt:

$$4) \qquad u^2 = k\,\frac{p^2\,v^2}{h_1\,\vartheta} = k\,p\,v\,\frac{v}{v-(h_2+h_3\,\vartheta)}.$$

Ausserdem ist aber $u = 2\,\lambda\,n$, wenn λ die halbe Wellenlänge im Gase, n die Schwingungszahl des benutzten Tones bedeutet. Für das Kontrollrohr gilt daher:

$$5) \qquad n_1^2 = \frac{k_1\,p_1\,v_1}{4\,\lambda_1^2}$$

und für das Untersuchungsrohr:

$$6) \qquad n^2 = \frac{k^2\,p^2\,v^2}{4\,\lambda^2\,h_1\,\vartheta}.$$

Nun ist $p_1\,v_1 = 76\,(1 + a\,t)$, indem wir den Druck auf cm Quecksilber, das Volumen auf das des Stickstoffs bei 0° und 76 cm Quecksilber beziehen, da die in der genannten Arbeit berechneten Konstanten h_1 h_2 h_3 der Gleichung (3) ebenfalls auf diese Einheiten bezogen sind; a bedeutet den Ausdehnungskoeffizienten des Stickstoffs zwischen 0° und 100° und t die von 0° an gezählte Temperatur des Gases im Kontrollrohr. Da die Schallwellen im Kontroll- und Untersuchungsrohr von einem und demselben Ton herrühren, d. h. $n = n_1$ ist, so folgt:

7) $$\frac{k}{k_1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 76 \cdot (1 + a\,t)\,\frac{h_1}{p^2}\,\frac{\vartheta}{v^2}.$$

Diese Formel ist der Berechnung der Beobachtungen zu Grunde gelegt.

Beschreibung des Apparates.

Für die vorliegende Untersuchung konnte ich mich eines im Institut zum grössten Teil schon vorhandenen Apparates bedienen; derselbe war nach den Angaben von Herrn Geheimrat Röntgen für Messungen der Grösse $\frac{c_p}{c_v}$ in Gasen bei verschiedenen Temperaturen und Drucken hergestellt worden und folgendermassen eingerichtet.

Der tongebende Stab — ein Glasrohr von ca. 1 m Länge und 16 mm Durchmesser, an dessen beiden Enden zur besseren Übertragung der Schwingungen an das Gas pufferähnliche, aus der Figur 1 ersichtliche Erweiterungen von ca. 25 mm Durchmesser angeblasen waren — war in den beiden seinen zweiten Oberton bestimmenden Knotenpunkten auf der rechten vertikalen Planke eines vertikal aufgehängten Holzrahmens befestigt, dessen Dimensionen 100 cm : 90 cm mit einer Plankenbreite von 12 cm waren. Zum Zwecke der Befestigung dienten Messinghülsen von der aus Figur 2 ersichtlichen Form; der Durchmesser der Öffnung *a* war wenig grösser als der Durchmesser des tönenden Rohres, sodass die Hülsen vor dem Anblasen der Erweiterungen an den Enden des Rohres darüber geschoben und später an den Knotenpunkten mit Siegellack angekittet werden konnten. Der Teil *b* hatte eine solche Weite, dass das Ende des Schallrohres, welches über das tönende Rohr geschoben wurde, mit geringem Spielraum hineinpasste und entweder ebenfalls mit Siegellack eingekittet werden konnte, wie es bei dem Untersuchungsrohr geschah, oder durch Gummiverschluss mit der Hülse luftdicht verbunden war, wie es bei dem Kontrollrohr angewandt wurde, um einen für die Untersuchung unter Umständen sehr nachteiligen Bruch

eines Glasteiles eher vermeiden zu können. Es war darauf geachtet worden, dass die Messinghülsen möglichst genau in den Knotenpunkten des tönenden Rohres festgekittet wurden,[1]) sodass eine Übertragung der schwingenden Bewegung an das festgekittete Untersuchungsrohr nicht stattfand. Kundt selbst wies schon auf den darin begründeten Nachteil einer starren Verbindung zwischen tönendem und Untersuchungsrohr hin und benutzte daher stets Gummiverbindungen. Um eine Verunreinigung des Stickstoffs durch dauernde Berührung mit Gummi zu vermeiden, wurde soviel wie möglich von Gummiverbindungen in vorliegender Untersuchung Abstand genommen, auch war es für die Versuche, bei denen im Untersuchungsrohr nicht Atmosphärendruck herrschte, von vornherein geraten, dieselben bei der Verbindung von tönendem Rohr und Untersuchungsrohr auszuschliessen. Zum Einleiten des Stickstoffs in die Schallröhren waren die Messinghülsen mit konisch gut geschliffenen, nur mit dampffreiem Fett gedichteten Hähnen versehen. Die Messinghülsen wurden an wagerecht aus dem Rahmen heraustretenden kräftigen Holzstützen mit Schraubzwingen festgeklemmt (in der Figur 1 fortgelassen).

Von dem oberen Querstück des Rahmens wurde das den Dimensionen desselben entsprechend zweimal rechtwinklig gebogene Kontrollrohr getragen, dessen beide von der Biegung etwa 30 cm lange Enden an den vertikalen Planken des Rahmens herunterhingen, sodass das rechte über den tönenden Stab bis in die Messinghülse an dem einen Knotenpunkt desselben geschoben war. Es hatte von Biegung zu Biegung eine Länge von 79 cm und eine innere Weite von 3.3 cm. Den Verschluss des linken Rohrendes bildete eine mit wenig Spielraum über dasselbe passende, auf dieses mit Siegellack festgekittete Messingkappe, durch deren Mitte der die Reflexion des Schalles bewirkende Puffer eingeführt war mittels einer

[1]) Die Knotenpunkte waren in der Weise gut zu bestimmen, dass eine erheblich grössere Belastung der als Knotenpunkte erkannten Stellen die Intensität des Tones nicht veränderte.

Stahlschraube, die es ermöglichte, denselben in einen Knotenpunkt der Schallbewegung einzustellen. Der Puffer war gebildet aus einer Glasröhre von etwa 10 cm Länge, die am Ende eine von einer angeschliffenen Ebene begrenzte Erweiterung hatte; die Glasröhre war in eine Messingröhre von ungefähr gleicher Länge gekittet, und diese über das Ende der durch die Messingkappe führenden Stahlschraube mit 5 cm langem Gewinde von geringer Ganghöhe. Um den Durchgang der Schraube durch die Messingkappe gegen aussen hin luftdicht zu verschliessen, war die Schraube durch eine in Figur 3 ersichtliche Verschraubung geführt, welche in die Messingkappe eingeschraubt wurde und durch die dazwischenliegende Lederdichtung einen vollkommenen Abschluss bewirkte. Auch dieser Verschluss war mit einem gut eingeschliffenen Hahn versehen. — An dem entsprechenden Ende des Untersuchungsrohres war eine ebenso eingerichtete Messingkappe angebracht. — Um das Kontrollrohr längere Zeit auf konstanter Temperatur erhalten und auch Siedetemperatur des Wassers anwenden zu können, war dasselbe nicht direkt auf dem Holz des Rahmens befestigt, sondern sass in einem doppelwandigen mit Filz umwickelten Gefäss aus verzinntem Kupfer, deren obere Wandungen durch gut schliessende Deckel aus gleichem Material mit Glimmerfenster für Thermometerbeobachtungen ersetzt waren (vergl. Figur 1). Durch die Öffnung *a* war es möglich, den Dampf von kochendem Wasser aus einem daneben stehenden Kessel in den innersten Raum des Gefässes, durch welchen sich das Kontrollrohr zog, einzuleiten; derselbe trat aus dem entgegengesetzten Ende des Gefässes bei *b* in den von der Doppelwandung umschlossenen Raum und nahe bei dem Zuleitungsrohr des Dampfes in den Aussenraum bei *c* zurück. Der innerste Raum des Gefässes war an den Durchführungsstellen des Kontrollrohres, welches von oben eingesetzt werden konnte, durch Gummi luftdicht gegen aussen abgeschlossen. Durch zwei hölzerne in der Höhe regulierbare Halter wurde das Gefäss von dem Rahmen getragen. Bei den im folgenden beschriebenen Versuchen, bei denen sich das Untersuchungsrohr in

flüssiger Luft befand, wurde das Kontrollrohr auf Zimmertemperatur gehalten. Zur Bestimmung der Temperatur wurde auf das Rohr mehrere Stunden vor Ausführung des Versuches, nachdem am Apparat selbst alle Vorbereitungen zu einem solchen getroffen waren, ein in fünftel Grade geteiltes Thermometer in horizontaler Lage festgebunden und Kontrollrohr und Thermometer mit Putzwolle bis auf einen kleinen zur Ablesung des Thermometers freibleibenden Teil bedeckt.

Das ebenfalls zweimal rechtwinklig gebogene Untersuchungsrohr wurde von unten über das tönende Rohr geschoben und dadurch gehalten, dass es am einen Ende in die Messinghülse eingekittet und mit der anderen an eine auf der linken vertikalen Planke des Holzrahmens sitzende Holzstütze festgeklemmt war. Zur Sicherheit wurde das Rohr etwa 10 cm unterhalb der Kittung in die Messinghülse noch von einer zweiten Holzstütze gefasst. Zu Untersuchungsröhren dienten nacheinander drei verschiedene Röhren von ähnlichen Dimensionen, indem das erste mit einer inneren Weite von 1.83 cm nach wenigen Versuchen in flüssiger Luft zersprang; das zweite Rohr mit einer inneren Weite von 1.75 cm diente zu den meisten der im folgenden beschriebenen Versuche, ein drittes Rohr mit einer inneren Weite von 1.98 cm wurde noch zur Untersuchung herangezogen, da zwischen den aus den Vorversuchen mittels des Rohres 1 gewonnenen Resultaten und den aus Rohr 2 abgeleiteten eine nicht ganz aufgeklärte Differenz bestand, worüber im Anhang berichtet wird; die mit Rohr 3 erhaltenen Resultate stimmen indessen mit den unter Verwendung des zweiten Rohres gewonnenen gut überein. Der horizontale Teil des Untersuchungsrohres von Biegung zu Biegung war ca. 75 cm lang. Auf der rechten Seite erweiterte sich das Rohr von der Biegungsstelle an zu einer inneren Weite von ca. 3 cm, um bequem über die Erweiterung am Ende des tönenden Rohres geschoben werden zu können. Es war darauf geachtet worden, dass der Übergang zu der Erweiterung ein möglichst gleichmässiger war, wie auch die Biegungen beider Röhren möglichst regelmässige Krümmung besassen, um nicht

durch eventuelle schärfere Ecken und Kanten Anlass zu unerwünschten Reflexionen des Schalles zu geben.[1])

Zur Herstellung der tiefen Temperatur, bei welcher die Wellen im Untersuchungsrohr hervorgerufen werden sollten, konnte von unten her gegen dasselbe ein Blechgefäss, in welchem sich die flüssige Luft befand, herangebracht werden, sodass der horizontale Teil des Untersuchungsrohres sich ganz in flüssiger Luft befand und etwa 2 cm von derselben überdeckt wurde. Das Gefäss bestand, wie in dem Vertikalschnitt in Figur 1a zu sehen ist, aus drei ineinander gesetzten Wannen von verzinntem Eisenblech, von denen die innerste 89 cm lang, ca. 10 cm hoch, 5.3 cm breit war; die drei Wannen waren von einander durch Flanelllagen vollkommen getrennt. Während des Versuches wurde, um das Verdampfen der flüssigen Luft nach Möglichkeit zu verringern, das Gefäss mit dicken Lagen von Putzwolle zugedeckt. Das Gefäss bewährte sich für diese Zwecke befriedigend; nach beendetem Eingiessen der Luft verdampfte bei ruhigem Stehen in $^1/_2$ Stunde eine Schicht von etwa 2 bis $2^1/_2$ cm flüssige Luft. Beim Eingiessen der flüssigen Luft in das Gefäss und vor allem beim Eintauchen des Untersuchungsrohres und des noch näher zu beschreibenden Widerstandsthermometers, welches um nicht Gefahr laufen zu müssen, die letzteren durch die plötzlich angelegte Kälte zu zertrümmern, sehr langsam geschehen musste, ging dagegen sehr viel flüssige Luft durch Verdampfen verloren. Um einen Versuch ausführen zu können, bedurfte es eines Vorrates von 5 bis 6 Liter flüssiger Luft, von denen ich allerdings durch Zurückgiessen der am Ende eines Versuches noch vorhandenen flüssigen Luft in ein Weinhold'sches Gefäss ungefähr 1 bis $1^1/_2$ Liter für den nächsten Versuch retten konnte. Das Untersuchungsrohr befand sich 25—30 Minuten lang in flüssiger Luft, bevor

[1]) Es scheinen derartige Reflexionen die Veranlassung gewesen zu sein, dass es bei einem Untersuchungsrohr von ähnlichen Dimensionen als die später von mir verwandten, aber unregelmässiger Übergangsstelle, welches ich bei den Vorversuchen verwenden wollte, nicht möglich war, gleichmässige Figuren zu erzielen.

die Schallwellen erregt wurden. Die Temperatur derselben wurde mit Hilfe eines neben dem Schallrohr in der flüssigen Luft liegenden Platinwiderstandsthermometers gemessen (s. u.).

Die Röhren wurden vor der Verwendung zunächst mechanisch gereinigt und mit Salzsäure und Messingfeilspänen geschüttelt, um die zum Teil sehr fest an der Glaswand haftenden Kieselsäurereste von den Vorversuchen loszureissen, dann mit Ätzkali, Salpetersäure, gewöhnlichem Wasser, destilliertem Wasser durchgespült, danach mittels Durchsaugen trockener Luft unter Erwärmen der Wandung getrocknet; nachdem jede sichtbare Feuchtigkeit verschwunden war, wurde noch mehrere Stunden lang trockene warme Luft durchgesaugt, da es eine Vorbedingung zum Gelingen der Versuche ist, jede Spur von Feuchtigkeit aus den Schallröhren entfernt zu haben.

Die zur Bildung der Staubfiguren verwandte amorphe Kieselsäure — die allerdings gegen das häufig gebrauchte Lycopodium den Nachteil hat, dass sie viel schwerer ist, und wie schon Kundt nachwies, einen stärkeren Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit in Röhren zeigt, dagegen aber den grossen Vorteil aufweist, durch Ausglühen von fremden Gasen und Stoffen befreit werden zu können, — wurde mehrere Stunden lang in einem kleinen Tongefäss mittels Bunsenflamme ausgeglüht und in noch ziemlich heissem Zustand durch ein feinmaschiges, vorher durch die Flamme gezogenes Drahtnetz in die getrockneten Röhren hineingesiebt. Im Kontrollrohr und im ersten Untersuchungsrohr wurde die Menge nicht bestimmt, im zweiten und dritten Untersuchungsrohr ungefähr 0.1 g Kieselsäure verwendet. Nach dem darauf erfolgten Verkitten des Apparates wurden die Röhren noch mehrmals unter Erwärmen luftleer gepumpt und mit trockener Luft resp. mit dem zur Untersuchung dienenden Stickstoff gefüllt.

Um die horizontalen Teile der Röhren behufs gleichmässiger Verteilung des Pulvers trotz ihrer festen Verbindung mit dem Rahmen gegen die Horizontale neigen zu können, war der ganze Rahmen auf der Tischplatte eines grossen Tisches um einen unter dem Kontrollrohr gelegenen Punkt drehbar befestigt;

der Tisch war mit zwei Füssen gegen die Wand gelehnt, sodass seine Platte vertikal auf dem Zimmerboden stand. Um den Drehpunkt konnte der Rahmen weit genug gedreht werden, um das Pulver in den Röhren durch Klopfen mit einem Holzstöckchen verteilen zu können; während des Versuches selbst war der Rahmen mit einer Schraubzwinge an die Tischplatte festgeklemmt. Um die Tischkante wurde der Tisch mit dem ganzen Apparat geneigt, um das in gleichmässig enger Linie an der tiefsten Stelle der Röhre liegende Pulver durch Klopfen heben zu können. Beim Anstreichen des tönenden Rohres blieb das Pulver nur an den Knotenpunkten der Schallwellen liegen, die zur Messung der halben Wellenlänge dienten.

Für die Ablesung der Wellenlängen war folgende Einrichtung getroffen. Nach Beendigung des Versuches wurde ein Messingmassstab mit Silberteilung mittels zweier Messingklammern an den Schallröhren befestigt; der Massstab lief merklich parallel in etwa 0.2 cm Abstand von der Wandfläche des Rohres, welches keine merklichen Abweichungen von einer geraden Linie zeigte. Ein 6 cm breites Messingblech, welches der Krümmung des Rohres entsprechend gebogen war, konnte längs der unteren Seite des Rohres verschoben werden, sodass es mit einem Index auf dem Massstab ruhte. Dieses Messingblech war geschwärzt und in der Mitte mit einem weissen Strich versehen, welcher auf die Knotenpunkte der Wellen eingestellt wurde, während am Index abgelesen wurde. Durch Spiegelung des weissen Striches an der Glaswand konnte vollkommen parallaxenfrei eingestellt werden.

Bevor ich zur Beschreibung der Hilfsapparate übergehe, ist noch ein Wort über die Einstellung der die Reflexion des Schalles bewirkenden Puffer in den Schallröhren auf gute Resonanz zu sagen. Sowohl die Enden des tönenden Rohres, wie auch die Enden der reflektierenden Puffer waren von der Mittellinie des horizontalen Teiles der Schallröhren 4—5 cm entfernt und wurden während der Versuche mit einem und demselben Untersuchungsrohr, von Vorversuchen natürlich abgesehen, nicht verändert. Es mag auf den ersten Blick ver-

wundern, dass dieselbe Einstellung trotz der verschiedenen Bedingungen, die sehr verschieden lange Wellen entstehen liessen, immer beibehalten werden konnte, während man gewöhnlich durch Wiederholung der Versuche unter Veränderung der Lage der reflektierenden Ebene die günstigste Einstellung aufsucht. Dem ist folgendes zu erwidern. Die Wiederholung eines Versuches unter vollständig gleichen Bedingungen war höchstens durch Zufall zu erreichen, indem die Temperatur der benutzten flüssigen Luft sehr verschieden sein konnte und vor allem das Stück, welches sich zwischen dem auf die Temperatur der flüssigen Luft abgekühlten Teil des Stickstoffs und den erregenden resp. reflektierenden Ebenen befand, je nach der nie ganz genau abmessbaren, verschiedenen Höhe der flüssigen Luft in dem Blechgefäss eine unkontrollierbar verschiedene Temperatur haben konnte. Eine möglichst gute Einstellung der reflektierenden Ebenen durch Wiederholung des Versuches aufsuchen zu wollen, war daher schlechterdings unmöglich. Da ich nun bei der einmal gewählten Einstellung gleichmässig ausgebildete Wellen längs des ganzen Schallrohres bekommen hatte, ein Zeichen, dass eine eventuell noch vorhandene Bewegungsübertragung des tönenden Rohres nicht störenden Einfluss hatte, so liess ich bei allen Versuchen die gleiche Einstellung. Die Unmöglichkeit, die Einstellung mit Hoffnung auf Erfolg für jeden einzelnen Versuch verändern zu können, brachte natürlich den Nachteil mit sich, nicht bei allen Versuchen gleich gut ausgebildete Wellen zu erhalten. Die Kostspieligkeit und Umständlichkeit eines jeden Versuches machte es indessen notwendig, auch noch Wellen von geringerer Schärfe abzulesen und auch solche Versuche mit zur Berechnung des Gesamtresultates heranzuziehen. Im allgemeinen entstehen die Wellen bei tiefen Temperaturen glücklicherweise wegen der grösseren Dichte, wie zu erwarten ist, leichter und besser als bei gewöhnlicher Temperatur.

Der bei der Untersuchung verwandte chemische Stickstoff wurde dargestellt durch gelindes Erwärmen einer Lösung von 10 Gewichtsteilen Natriumnitrit, 10 Gewichtsteilen Ammonium-

nitrat, 10 Gewichtsteilen Kaliumdichromat in 90 Gewichtsteilen Wasser. Er wurde gereinigt, indem er durch Waschflaschen mit 1) 6% Kaliumpermanganatlösung, 2) 33% Eisensulfatlösung, 3) Kalilauge und 4) konzentrierter Schwefelsäure hindurchgeleitet wurde. Um die verbrauchte Lösung im Entwicklungsapparat durch neue ersetzen zu können, ohne Luft von aussen in das Gefäss eintreten zu lassen, war in dasselbe ein fast bis auf den Boden reichendes, mit Hahn versehenes Rohr eingeführt; durch den Druck des Gases nach Abschliessen des zwischen den Waschflaschen und dem Entwicklungsgefäss befindlichen Hahnes wurde die Lösung herausgedrückt. Die Waschflaschen waren untereinander und mit dem Untersuchungsapparat durch Siegellackkittungen und Verblasungsstellen verbunden, Gummi war von der Waschflasche mit Kaliumpermanganatlösung an vermieden mit Ausnahme eines kleinen gleich zu erwähnenden Stückes. Die Zuleitung des gereinigten Stickstoffs in die Schallröhren geschah durch eine Kundt'sche Glasfeder, die in ein T-Stück endete, dessen symmetrische Enden zu den Hähnen in den auf dem tönenden Rohr aufsitzenden Messinghülsen führten. Hier war eine starre Verbindung nicht gut zu machen, da sie beim Anstreichen zu leicht einen Bruch zur Folge gehabt hätte; es wurden daher die beiden Hähne mit den bis dicht an sie anliegenden Glasrohrenden mit Druckschlauchstücken verbunden und diese mit Wachs-Kolophoniumkitt überstrichen. Vor jedem neuen Versuch musste, um das Pulver durch Neigen des Apparates gleichmässig verteilen zu können, die Verbindung mit dem Stickstoffapparat gelöst werden; es geschah dies an einer Kittungsstelle zwischen dem T-Stück und der Kundt'schen Feder; um dabei ein Eindringen von atmosphärischer Luft zu vermeiden, wurden die Hähne an den Schallrohren geschlossen gehalten und nach Beendigung der Operation durch einen zwischen Kundt'scher Feder und Schwefelsäure angebrachten Dreiweghahn, dessen eine Öffnung mit einer Pumpe in Verbindung stand, das ganze Verbindungsstück mindestens zweimal ausgepumpt und mit reinem Stickstoff gefüllt. Zum Schutz gegen Feuchtigkeit war zwischen

der jedesmal zu öffnenden Kittungsstelle und dem T-Stück an letzteres ein Chlorcalciumrohr angeblasen. Zum Messen des Druckes im Untersuchungsrohr diente ein U-förmig gebogenes Quecksilbermanometer, dessen einer Schenkel unter Atmosphärendruck stand; es war mittels Dreiweghahnes in die Kundt'sche Feder eingeschlossen. Zur Herstellung des bei der Untersuchung verwendeten Überdruckes wurde die lebhafte Gasentwicklung selbst benutzt, indem das nach aussen führende Rohr des Entwicklungsgefässes abgeschlossen wurde. Der ganze Apparat war zu dem Ende vorher auf zwei Atmosphären Überdruck geprüft worden. Zur Kontrolle über den normalen Gang der Gasentwicklung war direkt hinter dem Entwicklungsgefäss ein zweites Quecksilbermanometer eingeschaltet.

Vor Beginn der Untersuchung wurden die Schallröhren mehrmals luftleer gepumpt und mit reinem Stickstoff gefüllt, und danach noch eine reichliche Menge Stickstoff durchgeleitet.

Die Temperaturmessung mittels Platinwiderstandsthermometers wurde in folgender Weise vorgenommen. Das Thermometer bestand aus zwei gleichen hintereinander geschalteten Widerständen, die gebildet waren aus je einem etwa 2 m langen, 0.05 mm dicken Platindraht,[1]) der auf ein etwa 10 cm langes, 0.6 cm dickes Glasrohr mit eingeätztem Gewinde gewickelt war und mit den Enden an etwa 2 cm lange, auf die Enden des Glasrohres gekittete Messinghülsen gelötet. Die Widerstände wurden untereinander durch ein ungefähr 1.5 cm langes Messingstück, welches in die in der Längsrichtung ein Gewinde tragenden Messinghülsen eingeschraubt wurde und mit den 1.45 mm^2 starken Zuleitungsdrähten durch Verschraubung an den entgegengesetzten Enden der Messinghülsen verbunden. Das Widerstandsthermometer stützte sich mittels der Zuleitungsdrähte auf die Befestigungen des Untersuchungsrohres am Rahmen und hatte bei den Versuchen in der flüssigen Luft eine zu dem Schallrohr parallele Lage. Da es aus zwei hintereinander geschalteten Teilen bestand, wurde durch die Widerstandsänderung

[1]) Von Heräus (Hanau) als „chemisch rein“ bezogen.

die mittlere Temperatur von zwei entfernt gelegenen Strecken des Bades gemessen, wie ja auch für die Berechnung der Wellenlängen die mittlere Temperatur des ganzen Schallrohres in Betracht kommt. Die von Holborn angegebene Vorsichtsmassregel des Ausglühens vor und nach der Wickelung des Platindrahtes kam in Anwendung.

Zur Bestimmung des Widerstandes wurde die Wheatstone'sche Brückenmethode benutzt. Als Brücke diente ein ungefähr 12 m langer, 0.75 mm dicker Manganindraht, dessen mittlerer Meter über eine gewöhnliche mit Millimeterskala versehene Wheatstone'sche Brücke gespannt war; die beiderseits übrigbleibenden Stücke waren aufgewickelt und unter der Brücke befestigt. In den vierten Zweig der Brückenschaltung wurde ein Rheostat von Edelmann eingeschaltet. Als Galvanometer diente ein von Siemens und Halske bezogenes Deprez d'Arsonvalgalvanometer mit magnetischem Nebenschluss, mit Vertikalaufstellung und objektiver Ablesung unter Benutzung eines Vorschaltwiderstandes von 10000 Ω, wobei dasselbe eine Empfindlichkeit von $1^{sc} = 0.6 \cdot 10^{-9}\, A$ hatte. Die Stromquelle bildete ein Akkumulator.

Hilfsuntersuchungen und Korrektionen.

Die Vergleichung des für die Messung der Wellenlängen dienenden Massstabes mit dem Normalmassstab des Institutes ergab bei 14°.0 C. eine genügende Übereinstimmung, indem die Abweichungen auf Strecken von je 10 cm in den Ablesungsfehlern ($\pm$ 0.01 mm) lagen, abgesehen von der Strecke 0 – 10 cm, welche um 0.08 mm länger ist als 10 cm des Normalmassstabes und von dem zwischen 46.7 und 46.8 cm liegenden Millimeter, welcher durch einen bewussten Teilungsfehler bei der Anfertigung um 0.1 mm zu lang ist. Wegen des letzteren Fehlers wurde von den an dem Massstab über 46.7 abgelesenen Werten 0.1 mm abgezogen (die Zahlen, bei welchen diese Korrektion angebracht wurde, sind in den unten folgenden Tabellen mit * gekennzeichnet). Von Anbringen der erstgenannten Korrektion

wurde Abstand genommen, da es zweifelhaft erscheinen kann, ob man berechtigt ist, den Fehler gleichmässig auf die 10 cm zu verteilen; in diesem Fall käme die Korrektion nur in ganz seltenen Fällen in Betracht, indem nur ausnahmsweise unter der Zahl 4 des Massstabes noch eine Ablesung gemacht wurde. Muss man aber annehmen, dass bei einer ganz bestimmten nicht aufgefundenen Stelle ein Fehler vorliegt, so ist eine Korrektion wegen der Unsicherheit der Lage anzubringen nicht möglich.

Die bei der Temperatur ($14{,}^{\circ}0 + t$) abgelesene mittlere Wellenlänge λ[1]) wurde wegen der Massstabausdehnung um $0.000019 \cdot t \cdot \lambda$ vergrössert.

Ausserdem wurde die abgelesene mittlere Wellenlänge λ wegen der erfolgten Glasrohrausdehnung, wenn der Unterschied zwischen der Temperatur beim Entstehen und der beim Ablesen der Wellen t^0 betrug, um $0.0000085 \cdot t \cdot \lambda$ verkleinert.[2])

Der schon von Kundt beobachtete Einfluss der Wärmeleitung und Reibung des Gases im Rohr auf die Schallgeschwindigkeit, den teilweise Helmholtz[3]) und vollständig Kirchhoff[4]) mit Hilfe theoretischer Erwägungen zu bestimmen suchte, wurde so gut als möglich bei Berechnung des Resultates berücksichtigt. Wenn man für sehr enge Röhren auch einige durch die Erfahrung begründete Zweifel bezüglich der Richtigkeit der Kirchhoff'schen Formel für diesen Einfluss hegen

---

[1]) Dieselbe ist aus den Mittelwerten dreimaliger Ablesung der Wellen mit Ausnahme der ersten und letzten im Rohr mit Hilfe der Methode kleinster Quadrate berechnet.

[2]) Bei tiefen Temperaturen ist (vergl. Travers, Senter, Jaquerod: Proc. Roy. Soc., Bd. 70, p. 484, 1902) der Ausdehnungskoeffizient des Glases etwas kleiner; doch haben 15% Abweichung von obigem Wert auf das Endresultat noch keinen merklichen Einfluss; wegen der Unsicherheit des Koeffizienten und der Verschiedenheit desselben bei verschiedenen Glassorten wurde daher davon Abstand genommen, bei den tieferen Temperaturen einen anderen Ausdehnungskoeffizienten in Rechnung zu ziehen.

[3]) Helmholtz, Wiss. Abh., I, p. 383. [4]) Kirchhoff, Pogg. Ann., Bd. 134, p. 177.

muss, so scheint sie sich bisher für weitere Röhren und hohe Töne recht gut bewährt zu haben. Bei Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit Hilfe der Kundt'schen Methode der Staubfiguren muss man nun noch aus dem Grunde darauf bedacht sein, dieselbe an möglichst weiten Röhren vorzunehmen, da nach Kundts Beobachtungen[1]) — auch die von Müller[2]) weisen darauf hin, — der Einfluss des Pulvers, der ebenfalls verkürzend auf die Wellenlänge einwirkt, bei engeren Röhren wesentlich grösser ist, als bei weiteren. Diese Erfahrungen beachtend wandte ich für die vorliegende Untersuchung möglichst weite Schallröhren an. Eine gewisse praktische Grenze in dieser Beziehung ist durch die Tatsache gegeben, dass regelmässige Figuren bei Anwendung hoher Töne (d. h. im Verhältnis zur Rohrweite kurzer Wellen) in weiten Röhren nur schwer zu erzeugen sind. Es wurde daher als Kontrollrohr ein Rohr von 3.3 cm innerer Weite benutzt, als Untersuchungsrohr Röhren zwischen 1.75 und 2.0 cm, den halben Wellenlängen von ca. 3.4 resp. 1.8 cm entsprechend. Mit Berücksichtigung des Umstandes, dass die Reibung und Wärmeleitung bei der für die Wellen im Untersuchungsrohr angewandten tiefen Temperaturen etwa den dritten Teil ihres Wertes bei Zimmertemperatur annehmen, durfte ich auch von vornherein das Untersuchungsrohr enger wählen als das Kontrollrohr, um beiderseits eine Korrektion von gleicher Grössenordnung zu erhalten. Bezüglich der angewandten Menge Kieselsäure liess ich wenigstens die Vorsicht walten, dieselbe während der Untersuchung an einem und demselben Rohr nicht mit Willen zu verändern. Ob allerdings das bei den Versuchen immer stärkere Verstreutwerden des Pulvers im Glasrohr nicht eine Verminderung der die Wellenlänge beeinflussenden Pulvermenge bedeutete, war kaum zu sagen; denn andrerseits wird dadurch die Glaswand wesentlich rauher, und wie nachgewiesen[3]) wirkt

---

1) Kundt, Berl. Ak. Ber., 1867 und Pogg. Ann. 135.
2) Müller, Ann. d. Physik (4), 11, 1903.
3) Vergl. Kundt, l. c. und Müller, l. c.

auch dieser Umstand verzögernd auf die Schallgeschwindigkeit. In jedem Fall darf man indessen nach den Beobachtungen von Kundt annehmen, dass ein durch die Kieselsäure entstehender Fehler, zumal er sich im Kontroll- und Untersuchungsrohr bemerkbar machen muss, in Anbetracht der grossen Rohrweite auf das Resultat nur geringen Einfluss hat.

Die Kirchhoff'sche Korrektionsformel lautet:

$$\Lambda = \lambda\left(1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}}\right),$$

8)

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{\varrho}}\left\{\sqrt{\eta} + \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{1}{k}}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{c_v}}\right\},$$

worin Λ die Wellenlänge des benutzten Tones mit der Schwingungszahl n im freien Raum, λ die im Schallrohr mit dem Radius r cm, ϱ die Dichte, η der Reibungs-, ε der Wärmeleitungskoeffizient des Gases bedeuten. ε ersetzen wir durch $1.60 \cdot \eta \cdot c_v$ [1]) und schreiben:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}\left\{1 + \left(\sqrt{k} - \sqrt{\frac{1}{k}}\right)\sqrt{1.6}\right\} = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}\,1.43$$

mit Benutzung des Wertes $k = 1.405$. (Die Verwendung des von Schwarze[2]) in naher Übereinstimmung mit Winkelmann und Müller für die Wärmeleitung der Luft gefundenen Wertes $\varepsilon = 0.00005690\,(1 + 0.00253\,t)$ würde in: $\varepsilon = \text{const} \cdot \eta \cdot c_v$ statt des gewählten const $= 1.60$ einen etwas höheren Wert ergeben, sodass $\gamma = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}\,1.47$ würde; diese Differenz hat natürlich auf das Resultat keinen Einfluss). Als Reibungskoeffizienten des Stickstoffs verwende ich den Wert von Meyer:[3])

$$\eta_0 = 167.10^{-6}$$

und zur Berechnung von η_ϑ daraus die Sutherland'sche Formel:

---

[1]) O. E. Meyer, Theorie der Gase, 2. Aufl., p. 283.

[2]) Diss., Halle, 1902. [3]) O. E. Meyer, l. c. p. 192.

$$\frac{\eta_\vartheta}{\eta_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{1/2} \frac{1 + \frac{C}{\vartheta_0}}{1 + \frac{C}{\vartheta}}$$

(worin ϑ_0 die absolute Temperatur des schmelzenden Eises bedeutet), mit der von Bestelmeyer[1]) bestimmten Konstante $C = 110.6$. Bezüglich der Dichte des Stickstoffs wurde gesetzt:

$$\varrho = 0.0012508\,^{2)} \left(\frac{1}{1 + a\,t}\right) \frac{p}{76}, \quad a = 0.003675\,^{3)}$$

bei Zimmertemperaturen. Die Dichte bei der Temperatur der flüssigen Luft wurde aus der von Bestelmeyer und mir abgeleiteten Gleichung:

$$\frac{p}{\varrho} \cdot 0.0012508 = 0.27774\,\vartheta - (0.03202 - 0.000253\,\vartheta) \cdot p$$

bestimmt. Für die Schwingungszahl des benutzten Longitudinaltones wurde angenommen:

$$n = 5080.$$

Aus diesen Angaben berechnet sich:

$\frac{\gamma}{2\,r\sqrt{\pi\,n}}$ bei der mittleren Versuchstemperatur von 20° und dem mittleren Barometerstand 72 cm für das Kontrollrohr ($2\,r = 3.3$ cm)

$$= 0.00137,$$

bei der mittleren Versuchstemperatur von — 191° bei einem Druck von 15 cm für das Untersuchungsrohr II ($2\,r = 1.75$ cm) resp. III ($2\,r = 1.98$ cm)

$$= 0.00166 \qquad \text{resp.} = 0.00147,$$

bei einem Druck von 107 cm

$$= 0.00061 \qquad \text{resp.} = 0.00054.$$

---

1) Diss., München, 1903.

2) Kohlrausch, Lehrb. d. pr. Physik, p. 572.

3) „ „ „ „ p. 151.

Diese Zahlen zeigen den geringen Einfluss der Rohrweite in vorliegender Untersuchung. Die Korrektion wurde nachträglich an dem Resultat angebracht, indem der ohne die Korrektion nach Formel (7) berechnete Wert des Verhältnisses $\frac{k}{k_1}$, wie aus Formel (7) und (8) zu ersehen ist, mit $\left(\frac{1+a_1}{1+a_2}\right)^2$ zu multiplizieren war, wenn a_1 die Korrektion $\frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}}$ für das benutzte Untersuchungsrohr, a_2 die für das Kontrollrohr unter den angewandten Drucken und Temperaturen bedeutet. Auf den in der Weise korrigierten Wert $\frac{k}{k_1}$ bezieht sich die Spalte „$\frac{k}{k_1}$ korr." in der Tabelle II.

Das die Temperatur des Kontrollrohres bestimmende Thermometer wurde mit einem von der Reichsanstalt geprüften verglichen, es war in dem in Betracht kommenden Intervall von 15° bis 22° zu der abgelesenen Temperatur + 0°.05 zu addieren. Als Ausdehnungskoeffizient des Stickstoffs bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck wurde angenommen

$$a = 0.003675 \text{ (abs. Nullp. } 272^\circ.1).$$

Bezüglich der elektrischen Temperaturbestimmung ist folgendes zu sagen.

Der zur Abgleichung dienende Edelmann'sche Rheostat im vierten Brückenzweig wurde mit einem von der Reichsanstalt geprüften, von Siemens und Halske bezogenen Rheostaten, verglichen; er befand sich mit diesem in guter Übereinstimmung, sodass eine Korrektion nicht angebracht werden musste; ausserdem wurden bei sämtlichen im folgenden beschriebenen Messungen stets dieselben Rheostatenspulen benutzt, sodass eine derartige Korrektion gar keinen Einfluss gehabt hätte. Der Widerstand der Zuleitung im Rheostatenzweig betrug 0.012 Ω, der der Zuleitung zum Platinthermometer 0.078 Ω, sodass für den Widerstand des Platins gilt

$$x = \frac{(r + 0.012) \cdot a}{b} - 0.078,$$

wenn *r* den Nennwert des Rheostaten, *a* und *b* die Abschnitte der Brücke bezeichnen.

Die Brücke wurde mit dem von der Reichsanstalt geprüften Rheostaten geeicht, der Mittelpunkt der Brücke lag bei 45.17 cm, die Eichung ergab:

$\frac{a}{b}$	Brückenabl. (Mittel)	$\frac{a}{b}$	Brückenabl.
0.900	76.350	1.010	42.210
910	73.060	020	39.255
920	69.805	030	36.425
930	66.695	040	33.615
940	63.485	050	30.835
950	60.280	060	28.045
960	57.135	070	25.270
970	54.160	080	22.565
980	51.065	090	19.925
990	48.115	100	17.285
1.000	45.170	110	14.610

Zur Bestimmung der Temperatur aus dem gemessenen Widerstand hatte ich das Thermometer mit dem von Bestelmeyer in der genannten Arbeit über die innere Reibung des Stickstoffs beschriebenen Thermometer II in einem Bad von flüssiger Luft verglichen, und zwar vor und nach Ausführung meiner Versuche über $\frac{c_p}{c_v}$. Zum Zweck der Vergleichung nahm ich das Mittelstück aus Messing zwischen den beiden Teilen meines Thermometers heraus und verband sie leitend durch einen mit Klemmschrauben befestigten dicken Kupferbügel, sodass die beiden Teile parallel und dicht nebeneinander zu liegen kamen. Zusammen mit dem Thermometer II wurden sie in gleicher Höhe und möglichst nahe bei diesem in ein Weinhold'sches Gefäss mit flüssiger Luft gebracht, die Zuleitungen waren mit Watte umwickelt, das Gefäss mit Watte zugestopft. Sowohl in der Schaltung meines Thermometers wie in der von Bestelmeyer beschriebenen seines Thermometers war nichts geändert worden. Die Beobachtung des Widerstandes wurde abwechselnd vorgenommen und für die Berechnung Mittelwerte benutzt aus den Ablesungen, die gemacht wurden, nachdem

sich ein übereinstimmender Gang beider Thermometer eingestellt hatte. Die in folgender Tabelle angegebenen Temperaturen sind aus dem Widerstand von Thermometer II berechnet. Aus den Messungen am 11. 7. 03 ergab sich:

Für die Temp.	beob. Widerst.	ber. Widerst.	Diff. in der letzten Stelle
	Ω	Ω	
— 188°.00	—	23.051	—
— 188.35	22.886	22.896	+ 10
— 190.09	22.124	22.123	+ 19
— 190.40	21.976	21.985	+ 9
— 191.07	21.753	21.688	— 65
— 191.50	21.460	21.497	+ 36
— 192.56	21.015	21.026	+ 11

Die in Spalte „ber.“ eingetragenen Werte sind aus den Beobachtungen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt worden. Es entspricht hiernach 0.001 Ω : 0°.00225, der grössten Differenz — 0.065 Ω entspricht ein Fehler von — 0°.15; man darf also annehmen, dass die berechneten Werte die Temperatur auf ± 0°.03 genau angeben. Eine Vergleichung am 2. 9. 03, zu welcher auch das in der genannten Untersuchung von Bestelmeyer mit I bezeichnete Thermometer, auf welches Thermometer II bezogen war, mit herangezogen wurde, ergab für die Temperatur der benutzten flüssigen Luft — die drei Thermometer befanden sich in gleicher mittlerer Höhe und sehr nahe bei einander in derselben — nach:

Thermometer I: — 190°.43
Thermometer II: — 190°.45
Thermometer d. Verf.: — 190°.42

in vollkommen befriedigender Übereinstimmung.

Zur Bestimmung der Dichte des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft und verschiedenen Drucken, wurde die schon oben genannte empirisch gefundene Gleichung benutzt:

$$p\,v = 0.27774\,\vartheta - (0.03202 - 0.000253\,\vartheta)\,p,$$

worin ϑ die von — 273°.04 als absoluten Nullpunkt gezählte Temperatur bedeutet, der Druck p in cm Quecksilber angegeben ist und das spezifische Volumen v auf das des Stickstoffs bei

0° und 76 cm Quecksilberdruck als Einheit zu beziehen ist. Zur Bestimmung des Wertes $\frac{k}{k_1}$ ist die Kenntnis der Temperatur nicht notwendig, wenn die Dichte des Gases im Augenblick des Versuches bekannt ist. Da nun die Dichte des Stickstoffs in der genannten Arbeit unter Beziehung auf Thermometer I bestimmt wurde, und mein Thermometer auf die Angaben des Thermometers I bezogen ist, so ist die vorliegende Untersuchung frei von den möglichen Fehlern in der absoluten Temperaturbestimmung, unabhängig von den speziellen Angaben meines Thermometers.

Beobachtungen zur Bestimmung der Grösse $\frac{k}{k_1}$.

Nach gleichmässiger Verteilung des Pulvers in den Schallröhren und dem darauf erfolgten, oben geschilderten Ausspülen des Apparates mit Stickstoff, wurde das zur Temperaturbestimmung des Kontrollrohres dienende Thermometer auf demselben befestigt, und der Apparat zur Temperaturausgleichung mehrere Stunden sich selbst überlassen. Dann wurde unter gleichzeitigem Stickstoffentwickeln das Untersuchungsrohr und das daneben befestigte Platinthermometer langsam mit flüssiger Luft umgeben, es wurde stets noch soviel Luft in die Wanne gegossen, dass 25 Minuten nach Beendigung der Stickstoffentwicklung in das Untersuchungsrohr, die je nach den Versuchsbedingungen bezw. des Druckes weniger oder mehr Zeit in Anspruch nahm, jedenfalls noch eine etwa 0.5 cm hohe Schicht das Untersuchungsrohr bedeckte. Etwa 20 Minuten nach Beendigung der Stickstoffentwicklung wurde eine vorläufige Einstellung auf der Brücke zur Widerstandsbestimmung gemacht, inzwischen auch Druck am Manometer und Barometer abgelesen. Dann wurde 5 bis 7 Minuten lang von Minute zu Minute Brückeneinstellungen vorgenommen, um aus dem Gang die Temperatur zur Zeit der Erzeugung der Schallwellen zu bestimmen; dieselbe wurde innerhalb der Zeit dieser 5 bis 7 Minuten vorgenommen unter eventueller Auslassung der Brückeneinstellung; gleich nach dem Anreiben des tönenden

Rohres wurde das Manometer und das Thermometer des Kontrollrohres abgelesen. Einige Zeit nach Entfernen der flüssigen Luft vom Untersuchungsrohr wurden die Wellenlängen dreimal in abwechselnder Richtung abgelesen und die Temperatur, die von einem gewöhnlichen in Grade geteilten Thermometer angegeben wurde, dessen Quecksilbergefäss Massstab und Glasrohr berührte, vorher und nachher bestimmt und der Mittelwert zur Bestimmung der Korrektion wegen Glas- und Massstabausdehnung notiert.

In der Tabelle I sind die mit Hilfe der Methode kleinster Quadrate aus den abgelesenen Wellenlängen abgeleiteten Werte, nach Berücksichtigung der Korrektion wegen Glas- und Massstabausdehnung eingetragen, zugleich mit den benutzten Drucken und Temperaturen in chronologischer Ordnung der Versuche. Die Tabellen III geben die Beobachtungen selbst wieder.

Tabelle I.

Nr.	Barometer	½ Wellenlänge	Druck (inkl. Bar.)	Temp. abs.[1]	½ Wellenlänge	Temp. in Celsius
		im Untersuchungsrohr			im Kontrollrohr	
	cm	mm	cm		mm	
1	71.52	17.620	28.20	81°64	33.901	21°25
2	71.93	17.538	71.93	82.68	33.772	19.55
3	71.73	17.441	70.22	81.78	33.750	20.35
4	71.67	17.504	31.67	80.77	33.728	21.26
5	71.68	17.844	21.38	83.32	33.773	21.05
6	71.77	17.765	44.77	83.59	33.818	20.45
7	71.24	17.349	95.74	82.25	33.526	17.45
8	71.80	17.317	98.00	82.15	33.434	16.15
9	71.53	17.177	104.08	81.30	33.562	17.45
10	71.45	17.164	107.95	81.25	33.662	18.45
11	71.56	17.294	111.66	82.49	33.761	18.65
12	71.76	17.626	18.66	81.18	33.673	18.45
13	71.73	17.353	84.33	82.00	33.746	19.45
14	71.75	17.709	16.25	82.88	33.705	19.35
15	71.98	17.673	56.58	83.31	33.812	19.35
16	72.35	17.682	33.95	82.43	33.646	18.55
17	72.17	17.339	121.37	83.41	33.697	18.35

Nr. 1—15 wurde mit Untersuchungsrohr II, 16 und 17 mit Untersuchungsrohr III ausgeführt.

[1]) Gezählt von — 273°04 C.

Genauigkeit der Messungen.

Versuche, bei denen die abgelesenen Wellenlängen sich um mehr als 1 mm unterschieden, wurden ausgeschlossen, abgesehen von solchen, bei welchen nur ein etwas zu grosser Wert zwischen zwei verhältnismässig zu kleinen oder umgekehrt vorkam. Der wahrscheinliche Fehler des mit Hilfe der Methode kleinster Quadrate abgeleiteten Mittelwertes ist je nach der Güte der Uebereinstimmung der abgelesenen Wellenlänge etwas verschieden; indessen ist die Verschiedenheit nur gering im vorliegenden Falle wegen Ausschlusses solcher Versuche mit grösseren Abweichungen, und da sowohl im Kontrollrohr wie auch im Untersuchungsrohr bei allen Versuchen nahezu die gleiche Anzahl von Wellenlängen abgelesen wurde. Bezeichnet n die Anzahl der Messungen, ε den mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung, so wurde der mittlere Fehler des Resultates bestimmt zu $E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P}}$, wo $P = \frac{n(n^2-1)}{12}$ das Gewicht des Resultates bedeutet. Als wahrscheinlichen Fehler $= \pm \frac{2}{3} E$ ergab sich sowohl für das Kontrollrohr, wie auch für das Untersuchungsrohr eine Grösse bis zu $\pm$ 0.7 $^0/_{00}$ des Wertes der Wellenlänge. Der Einfluss dieses Fehlers auf das Resultat $\frac{k}{k_1}$ der Untersuchung kann im ungünstigen Fall bis zu 2.8 $^0/_{00}$ betragen.

Eine weitere Fehlerquelle bildet die Temperaturmessung, besonders die für das Kontrollrohr. Davon, für das Kontrollrohr Siedetemperatur des Wassers zu benutzen, eine Massregel, die eine recht bedeutende Verbesserung der angewandten Methode bedeutet hätte, musste Abstand genommen werden wegen dadurch eintretender zu grosser Kompliziertheit der Versuchsanordnung. Ohne diese Vorsichtsmassregel eines konstanten Temperaturbades für Kontrollrohr und Thermometer, war zu erwarten, dass das Thermometer nur sehr angenähert richtig die Temperatur des Kontrollrohres angeben würde, indem viel eher das Thermometer den Temperatureinflüssen der umgeben-

den Luft folgen muss als die im Kontrollrohr befindliche Gasmasse. So habe ich mehrere Male bemerkt, dass trotz des angewandten Wärmeschutzes durch meine Nähe und die Notwendigkeit der Beleuchtung beim Eingiessen der flüssigen Luft in das Temperaturbad des Untersuchungsrohres und bei den anderen für den Versuch notwendigen Manipulationen am Apparat in der halben Stunde vor Erregung der Tonwellen, die Temperatur des Thermometers um mehr als 0°,5 stieg. Trotz der Massregel des mehrere Stunden langen unberührten Stehens des Apparates zum Temperaturausgleich zwischen Kontrollrohr, Thermometer und äusserer Luft darf man ferner doch kaum annehmen, dass ein völliger Ausgleich stattgefunden hat, da die Zimmertemperatur eines viel betretenen Raumes nicht konstant ist. Ich nehme aus diesen Gründen eine mögliche Differenz von 1°,0 zwischen beobachteter und wahrer Temperatur des Gases im Kontrollrohr an, der ein wahrscheinlicher Fehler von $\pm$ 0°,7 entspricht. Die Temperatur beeinflusst nun das Resultat proportional ihrem absoluten Wert, danach kann diese Fehlerquelle das Resultat um $\pm$ 2.3 °/₀₀ fehlerhaft machen.

Bezüglich der Temperaturmessung des Untersuchungsrohres ist folgendes zu sagen. Würde die Temperatur der flüssigen Luft während der Dauer des Versuches konstant bleiben, so dürfte man annehmen, dass in 25 Minuten das Gas im Untersuchungsrohr die Temperatur der flüssigen Luft merklich angenommen habe. Infolge der Sauerstoffanreicherung steigt aber die Temperatur, und in dem vorliegenden Fall, wie die Beobachtung zeigt, pro Minute um 0°,03. Hinter dieser Temperaturzunahme wird die der Gasmasse im Untersuchungsrohr zurückbleiben. Indessen wird sich in allen Versuchen nach Ablauf von 25 Minuten die gleiche Differenz zwischen wahrer und beobachteter Temperatur eingestellt haben. Wie eine leicht auszuführende Rechnung unter Zugrundelegung der Wärmeleitungsgleichung zeigt, beträgt diese Differenz weniger als 0°,01, darf also unberücksichtigt bleiben. Da ferner darauf geachtet wurde, dass das Platinthermometer und das Untersuchungsrohr in gleicher Höhe in flüssiger Luft sich befanden, so darf angenommen werden,

dass in der Temperaturbestimmung des Gases im Untersuchungsrohr nur kleine Fehler vorliegen. Um übersehen zu können, in welcher Weise ein Fehler in dieser Temperaturbestimmung das Resultat beeinflusst, schreiben wir Gleichung (7) mit Benutzung von Gleichung (3) in der Form:

$$\frac{k}{k_1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 \cdot 76 \cdot (1 + a t) \frac{h_1 \vartheta}{(h_1 \vartheta + (h_2 + h_3 \vartheta) p)^2}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 \cdot 76 \cdot (1 + a t) \frac{1}{h_1 \vartheta + 2 (h_2 + h_3 \vartheta) p + \frac{(h_2 + h_3 \vartheta)^2 p^2}{h_1 \vartheta}}$$

d. h. $\frac{k}{k_1}$ ist in erster Annäherung der absoluten Temperatur umgekehrt proportional. Nehmen wir als möglichen Fehler der Temperaturbestimmung 0°,1 an, so entspricht demselben im Resultat + 0.8 °/oo wahrscheinlicher Fehler.

Endlich sind die benutzten Mittelwerte für die Dichte nach den Angaben der genannten Arbeit auf etwa 1 °/oo ungenau, diese Unsicherheit geht natürlich auch in die absoluten Werte des Resultates ein, während sie die relativen Werte der einzelnen Beobachtungen nicht beeinflussen kann.

Aus dem Gesagten ergibt sich ein möglicher Fehler von $\pm$ 5.9 °/oo in den beobachteten Grössen $\frac{k}{k_1}$ unter den verschiedenen Bedingungen gegen die aus ihnen folgenden Mittelwerte.

Tatsächlich wird von 3 beobachteten Werten die mögliche Fehlergrenze $\pm$ 5.9 °/oo nahezu oder vollständig erreicht. Das lässt vermuten, dass noch eine andere, nicht berücksichtigte Fehlerquelle besteht. Diese liegt ohne Zweifel in dem schwer in Rechnung zu setzenden Einfluss der Intensität des Tones. Experimentell hat sich bisher ein solcher nicht feststellen lassen, welches in der Schwierigkeit der Untersuchung begründet liegt. Wüllner glaubte durch messbare Intensitätsveränderungen der Schallquelle der Antwort auf die Frage näher zu kommen und leitete aus seinen Versuchen das Resultat ab, dass ein Einfluss nicht bestehe, so lange es sich wenigstens nicht um explosionsartige

Erregung handle, auf welche sich allerdings der von Regnault beobachtete Intensitätseinfluss bezieht. Indessen erscheint es fraglich, ob auf diese einfache Weise die Entscheidung herbeigeführt werden kann, indem mit einem möglichen Einfluss der Intensität aufs engste der Einfluss mehr oder weniger guter Resonanz im Schallrohr verknüpft ist. Es ist also wohl möglich, dass ein wenn auch kleiner Teil der Abweichung der beobachteten Grösse von dem Mittelwert darauf zurückzuführen ist, dass, wie oben bemerkt wurde, man nicht in der Lage war, systematisch für jeden Versuch eine besonders gute Einstellung zu suchen.[1])

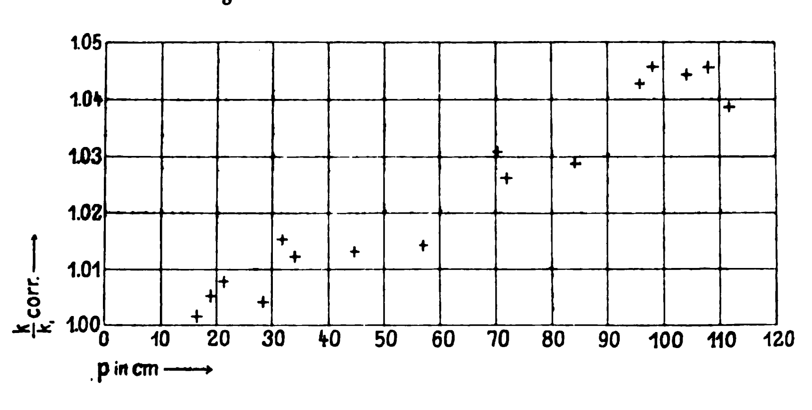
Resultat.

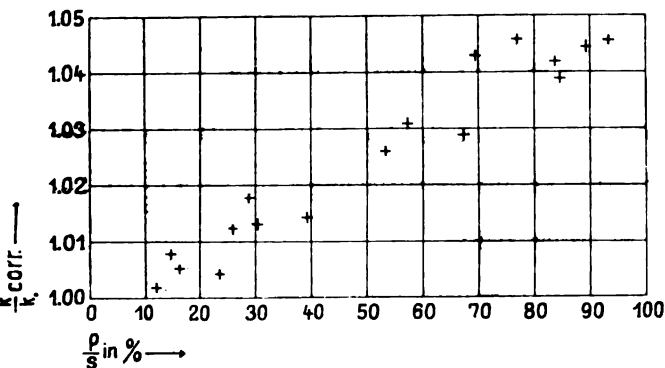
Nach Gleichung (7) wurden aus den in Tabelle I gegebenen Beobachtungen die Werte $\frac{k}{k_1}$ für die betreffenden Drucke und Temperaturen berechnet. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle II wiedergegeben. In einer Spalte der Tabelle befindet sich ausserdem das Verhältnis $\frac{p}{s}$ des im Untersuchungsrohr angewandten Druckes p zu dem bei der benutzten Temperatur notwendigen Sättigungsdruck s, welcher aus den Beobachtungen von Baly[2]) entnommen ist. Denn es war zu erwarten, dass falls

[1]) Berechnet man aus den Wellenlängen im Kontrollrohr und der entsprechenden Temperatur die Höhe des in dem betreffenden Versuch benutzten Tones, so bemerkt man ziemlich grosse Abweichungen zwischen den Tonhöhen der verschiedenen Versuche (bis zu 6⁰/₀₀). Nimmt man das Mittel derselben aus allen 17 Versuchen und nimmt an, wie es wahrscheinlich ist, da die Unterstützung der Knotenpunkte des Ton gebenden Rohres nicht verändert worden ist, dass die Tonhöhe merklich konstant geblieben ist, und berechnet mit Benutzung dieses Mittelwertes die Grösse $\frac{k}{k_1}$ aus den Beobachtungen mit dem Untersuchungsrohr, so ergeben sich wesentlich geringere Abweichungen zwischen den beobachteten Werten $\frac{k}{k_1}$ und den mittleren Werten. Hiernach scheint es also, als ob vor allem die Bestimmung der Wellenlänge im Kontrollrohr die Unsicherheit in das Resultat gebracht hat.

[2]) Baly, Philos. Mag. (5) Bd. 49, 1900, p. 527.

eine Abhängigkeit der Grösse $\frac{k}{k_1}$ vom Druck vorliegt, wie es die Beobachtung tatsächlich zeigt, welche wegen der Nähe des Kondensationspunktes eine Abhängigkeit von der Temperatur nach sich ziehen muss, die Grösse $\frac{k}{k_1}$ sich leichter wird darstellen lassen in der Abhängigkeit von dem Verhältnis $\frac{p}{s}$ als von p allein, da die Abhängigkeit von der Temperatur getrennt in den engen Grenzen, die zur Anwendung kommen konnten, nicht aus der Beobachtung abgeleitet werden konnte. Aus diesem Grunde wurde auch ausser der graphischen Darstellung der Abhängigkeit vom Druck noch die der Abhängigkeit von dem Verhältnis $\frac{p}{s}$ gewählt.





Mit untrüglicher Sicherheit geht aus den Beobachtungen hervor, dass die Grösse $k = \frac{c_p}{c_v}$ des Stickstoffs mit dem Druck bei der Temperatur der flüssigen Luft wächst, und zwar in den möglichen Druckgrenzen von nahezu 2 Atmosphären um etwa 5⁰/₀. Aus der graphischen Darstellung geht hervor, dass sich das Resultat besser folgendermassen ausdrücken lässt:

Das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{c_p}{c_v}$ des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft nimmt in erster Annäherung zu proportional dem Verhältnis des angewandten Druckes p zum Sättigungsdruck s der benutzten Temperatur und zwar um fast 5⁰/₀, wenn p von 0 bis s wächst.

Ferner darf man mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit aus den Beobachtungen schliessen, dass auch bei der Temperatur der flüssigen Luft das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Stickstoffs für genügend niedrige Drucke den Wert behält, den es unter Atmosphärendruck bei Zimmertemperatur besitzt.

Mittels der graphischen Darstellung kann man (mit einigem Vorbehalt bezüglich der Sicherheit) für die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{k}{k_1}$ von $\frac{p}{s}$ die empirische Gleichung aufstellen:

$$\frac{k}{k_1} = 0.99625 + 0.0556\,\frac{p}{s},$$

(auf welche sich in Tabelle II „$\frac{k}{k_1}$ ber.“ bezieht), oder wenn man für k_1 den Wert 1.405 einsetzt:

a) $$k = \frac{c_p}{c_v} = 1.3997 + 0.07812\,\frac{p}{s}.$$

Ferner kann man aus der Formel für die Dichte des Stickstoffs den Wert $c_p - c_v$ aus der Gleichung $c_p - c_v = \vartheta \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p$ berechnen; es ergibt sich:

$$c_p - c_v = \frac{(h_1 + h_3\,p)^2}{h_1}$$

also mit Beziehung auf absolutes Mass, resp. Zimmertemperaturkalorien:

b) $$c_p - c_v = \frac{(h_1 + h_3 p)^2}{h_1} \frac{13.596}{42700} \frac{1}{0.0012508}.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte für h_1 und h_3 und bei Vernachlässigung von höheren Potenzen von p ergibt sich aus den Gleichungen (a) und (b):

$$c_v = 0.1769 + 0.000322\, p - \frac{0.0346}{s} p$$

$$c_p = 0.2476 + 0.000451\, p - \frac{0.0346}{s} p.$$

Tabelle II.

Nr.	abs. Temp.	Druck p	$\frac{\text{Druck}}{\text{Sättig.-Druck}}$ in %	$\frac{k}{k_1}$	$\frac{k}{k_1}$ corr.	$\frac{k}{k_1}$ ber.
		cm				
1	81°64	28.20	23.4	1.004	1.004	1.009
2	82.68	71.93	53.5	1.026	1.026	1.026
3	81.78	70.22	57.3	1.031	1.030	1.027
4	80.77	31.67	28.8	1.018	1.018	1.012
5	83.32	21.38	14.8	1.008	1.008	1.004
6	83.59	44.77	30.3	1.013	1.013	1.013
7	82.25	95.74	74.5	1.044	1.043	1.037
8	82.15	98.00	77 0	1.046	1.045	1.039
9	81.30	104.03	89.5	1.045	1.044	1.046
10	81.25	107.95	93.3	1.046	1.045	1.048
11	82.49	111.66	84.8	1.040	1.039	1.043
12	81.18	18.66	16.2	1.005	1.005	1.005
13	82.00	84.33	67.3	1.029	1.029	1.033
14	82.88	16.25	11.9	1.002	1.001	1.003
15	83.31	56.58	39.4	1.015	1.014	1.018
16	82.43	33.95	25.9	1.012	1.012	1.010
17	83.41	121.37	83.8	1.043	1.042	1.043

Anhang.

Zum Schluss gebe ich hier noch die Resultate, die ich mit Benutzung des Untersuchungsrohres 1 erhalten habe. Auch diese Beobachtungen weisen auf die gleiche Abhängigkeit der Grösse $k = \frac{c_p}{c_v}$ vom Verhältnis des Druckes zum Sättigungsdruck hin, doch weichen die mittleren Werte, die man aus diesen Versuchen erhält, von denen der geschilderten Versuche um etwa 0.5% ab. Ein Grund zu der Abweichung liegt in der Verwendung einer grösseren Menge Kieselsäure im Kontrollrohr während der Benutzung des Untersuchungsrohres 1. Ob dies indessen der einzige Grund ist, lässt sich nachträglich, da das Rohr zerbrach nicht mehr untersuchen. Jedenfalls dürfen die Versuche gegen die oben beschriebenen nicht in Betracht gezogen werden, da man sie immerhin noch als Vorversuche betrachten kann, bei welchen nicht die in den späteren Versuchen angewandte ausführliche Vorbereitung besonders bezüglich des Temperaturausgleiches getroffen wurde.

Nr.	Temp.	halbe Wellenl.	Temp.	halbe Wellenl.	Druck	$\frac{\text{Druck}}{\text{Sättig.-Druck}}$ in %	$\frac{k}{k_1}$	$\frac{k}{k_1}$ corr.
	im Kontrollrohr		im Untersuchungsrohr					
		mm		mm	cm			
1	19°.95	33.724	81°.30	17.433	72.0	62.0	1.043	1.042
2	19.75	33.740	83.08	17.804	27.8	19.8	1.013	1.013
3	18.35	33.613	81.63	17.461	71.5	59.3	1.041	1.041
4	17.75	33.542	81.91	17.710	17.9	14.4	1.012	1.013
5	21.93	33.923	82.92	17.706	49.5	35.9	1.022	1.022
6	17.35	33.625	83.05	17.885	18.7	13.4	1.012	1.012

Tabelle III.

Versuch Nr. 1. 10. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $2^h\,45^m$
Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$3^h\,11^m$	51.70
12	45
13	20
15	50.80
16	60
17	38

Wellenerregung: $3^h\,16^m\,30^s$
Druck gemessen: $3^h\,17^m$: $p = 28.2$ cm

Ablesung der Wellen bei 22°

			Mittel [1])	Diff. in mm
54.99	55.00	54.99	54.98*	17.5
53.23	53.26	53.23	53.23*	7
51.46	51.49	51.40	51.46*	6
49.71	49.71	49.71	49.70*	18.2
47.90	47.86	47.91	47.88*	17.5
46.12	46.16	46.10	46.13	2
44.40	44.41	44.42	44.41	5
42.66	42.64	42.67	42.66	7
40.90	40.88	40.90	40.89	9
39.09	39.11	39.10	39.10	5
37.38	37.30	37.38	37.35	7
35.59	35.57	35.58	35.58	6
33.83	33.82	33.82	33.82	8
32.06	32.06	32.03	32.04	5
30.30	30.29	30.29	30.29	9
28.50	28.50	28.51	28.50	3
26.77	26.76	26.77	26.77	7
25.00	25.00	25.00	25.00	7
23.21	23.23	23.24	23.23	9
21.42	21.45	21.45	21.44	5
19.67	19.70	19.71	19.69	7
17.91	17.93	17.93	17.92	5
16.14	16.17	16.19	16.17	8
14.39	14.39	14.40	14.39	7
12.61	12.62	12.62	12.62	4
10.88	10.87	10.88	10.88	9
9.10	9.09	9.09	9.09	7
7.32	7.31	7.32	7.32	

Kontrollrohr.

Temp.: 21°2. Barom.: 71.52 cm

Ablesung der Wellen bei 23°

			Mittel	Diff. in mm
49.88	49.97	49.94	49.92*	33.3
46.57	46.57	46.63	46.59	34.8
43.09	43.13	43.10	43.11	33.8
39.72	39.73	39.75	39.73	33.8
38.38	36.37	36.30	36.35	34.5
32.90	32.90	32.91	32.90	33.8
29.51	29.56	29.49	29.52	33.6
26.14	26.24	26.10	26.16	33.5
22.80	22.83	22.81	22.81	33.9
19.40	19.42	19.44	19.42	33.9
16.05	16.09	16.02	16.03	34.3
12.61	12.60	12.60	12.60	33.6
9.22	9.26	9.25	9.24	33.7
5.86	5.85	5.88	5.87	

[1]) An die mit * versehenen Zahlen wurde die Massstabkorrektion angebracht (vergl. oben).

Versuch Nr. 2. 11. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft und Ende der Gasentwicklung $9^h\,35^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$10^h\,15^m$	44.91
16	65
17	42
18	18

Wellenerregung: $10^h\,17^m\,30^s$

Druck: $p = 71.93$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°3

			Mittel	Diff. in mm
53.15	53.14	53.11	53.12*	17.7
51.37	51.35	51.37	51.35*	4
49.63	49.60	49.62	49.61*	5
47.89	47.85	47.88	47.86*	4
46.14	46.10	46.12	46.12	4
44.37	44.37	44.39	44.38	9
42.60	42.57	42.60	42.59	1
40.87	40.87	40.89	40.88	5
39.15	39.10	39.15	39.13	18.1
37.32	37.31	37.33	37.32	17.5
35.60	35.54	35.57	35.57	9
33.80	33.77	33.78	33.78	0
32.09	32.07	32.09	32.08	7
30.30	30.30	30.33	30.31	4
28.57	28.57	28.58	28.57	7
26.80	26.80	26.80	26.80	5
25.05	25.04	25.06	25.05	6
23.30	23.29	23.29	23.29	5
21.54	21.53	21.54	21.54	9
19.78	19.74	19.74	19.75	4
18.02	18.00	18.00	18.01	9
16.24	16.22	16.20	16.22	2
14.50	14.50	14.50	14.50	8
12.72	12.72	12.71	12.72	4
10.99	10.98	10.98	10.98	8
9.20	9.20	9.20	9.20	4
7.45	7.46	7.47	7.46	5
5.70	5.70	5.72	5.71	

Kontrollrohr.

Temp.: 19°5. Barom.: 71.93 cm

Ablesung der Wellen bei 21°3

			Mittel	Diff. in mm
49.89	50.00	49.98	49.95*	34.0
46.53	46.56	46.57	46.55	33.4
43.19	43.20	43.23	43.21	34.2
39.77	39.80	39.80	39.79	33.5
36.40	36.48	36.44	36.44	33.9
33.03	33.08	33.05	33.05	33.2
29.72	29.75	29.73	29.73	34.3
26.28	26.34	26.28	26.30	33.7
22.92	22 96	22.92	22.93	33.2
19.60	19.62	19.60	19.61	34.0
16.20	16.22	16.22	16.21	34.1
12.80	12.80	12.80	12.80	34.0
9.39	9.42	9.39	9.40	33.8
6.02	6.04	6.00	6.02	

Versuch Nr. 3. 12. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft und Ende der Gasentwicklung: 10h 5m

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
10h 28m	49.82
29	60
30	42
31	24
32	05

Wellenerregung: 10h 30m 30s

Druck gemessen: 10h 31m: $p = 70.22$ cm

Ablesung der Wellen bei 21°.7

			Mittel	Diff. in mm
52.30	52.29	52.32	52.29*	17.1
50.59	50.59	50.59	50.58*	5
48.85	48.84	48.83	48.83*	2
47.14	47.12	47.10	47.11*	3
45.39	45.38	45.38	45.38	7
43.63	43.59	43.60	43.61	2
41.88	41.89	41.91	41.89	5
40.15	40.15	40.11	40.14	4
38.41	38.39	38.39	38.40	8
36.64	36 60	36.61	36.62	4
34.89	34.89	34.85	34.88	2
33.18	33.15	33.14	33.16	6
31.40	31.40	31.39	31.40	4
29.66	29.65	29.66	29.66	8
27.88	27.88	27.89	27.88	3
26.16	26.14	26.14	26.15	3
24.46	24.39	24.41	24.42	6
22.67	22.66	22.66	22.66	6
20.90	20.89	20.90	20.90	8
19.13	19.12	19.12	19.12	3
17.38	17.40	17.39	17.39	4
15.65	15.65	15.66	15.65	5
13.90	13.90	13.90	13.90	2
12.18	12.19	12.18	12.18	7
10.41	10.40	10.42	10.41	4
8.67	8.64	8.69	8.67	6
6.92	6.91	6.91	6.91	3
5.19	5.17	5.19	5.18	

Kontrollrohr.

Temp.: 20°.3. Barom.: 71.73 cm

Ablesung der Wellen bei 22°.2

			Mittel	Diff. in mm
53.32	53.37	53.34	53.33*	33.6
50.00	49.98	49.97	49.97*	6
46.64	46.59	46.59	46.61	6
43.24	43.26	43.26	43.25	5
39.90	39.90	39.89	39.90	3
36.56	36.59	36.56	36.57	34.2
33.14	33.15	33.15	33.15	33.7
29.79	29.79	29.76	29.78	7
26.41	26.42	26.39	26.41	8
23.04	23.03	23.01	23.03	8
19.66	19.66	19.64	19.65	7
16.29	16.29	16.27	16.28	34.3
12.83	12.88	12.85	12.85	33.8
9.45	9.49	9.47	9.47	7
6.10	6.10	6.10	6.10	

Versuch Nr. 4. 12. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $2^h\ 55^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$3^h\ 21^m$	56.05
22	55.90
23	75
24	60

Wellenerregung: $3^h\ 23^m\ 30^s$

Druck gemessen: $3^h\ 24^m$: $p = 31.67$ cm

Ablesung der Wellen bei 22°9

			Mittel	Diff. in mm
55.71	55.72	55.72	55.71*	17.8
53.93	53.95	53.93	53.93*	8
52.15	52.19	52.14	52.15*	5
50.42	50.41	50.41	50.40*	4
48.66	48.68	48.68	48.66*	5
46.90	46.92	46.94	46.91*	0
45.21	45.21	45.22	45.21	7
43.43	43.45	43.44	43.44	9
41.66	41.66	41.62	41.65	4
39.92	39.92	39.89	39.91	8
38.13	38.13	38.14	38.13	3
36.40	36.40	36.40	36.40	8
34.61	34.63	34.62	34.62	4
32.86	32.90	32.88	32.88	3
31.18	31.14	31.13	31.15	4
29.40	29.43	29.41	29.41	9
27.61	27.64	27.60	27.62	4
25.87	25.88	25.88	25.88	3
24.13	24.16	24.17	24.15	5
22.40	22.41	22.40	22.40	9
20.61	20.61	20.60	20.61	3
18.86	18.90	18.89	18.88	9
17.10	17.11	17.07	17.09	3
15.37	15.37	15.35	15.36	6
13.60	13.60	13.60	13.60	4
11.85	11.88	11.86	11.86	7
10.08	10.10	10.09	10.09	8
8.31	8.32	8.31	8.31	3
6.58	6.59	6.58	6.58	

Kontrollrohr.

Temp.: 21°5. Barom.: 71.67 cm

Ablesung der Wellen bei 22°4

			Mittel	Diff. in mm
53.05	53.05	53.05	53.04*	33.8
49.69	49.68	49.65	49.66*	2
46.36	46.32	46.33	46.34	34.1
42.94	42.92	42.92	42.93	33.9
39.55	39.52	39.56	39.54	9
36.16	36.18	36.12	36.15	8
32.75	32.78	32.77	32.77	5
29.40	29.45	29.40	29.42	6
26.03	26.09	26.05	26.06	5
22.68	22.76	22.70	22.71	34.1
19.29	19.32	19.29	19.30	33.4
15.98	15.95	15.96	15.96	8
12.58	12.60	12.55	12.58	6
9.20	9.21	9.24	9.22	34.1
5.80	5.80	5.83	5.81	

Versuch Nr. 5. 12. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $7^h\ 30^m$,
ausgepumpt: $7^h\ 38^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$8^h\ 0^m$	41.10
1	40.80
2	55
3	—
4	00

Wellenerregung: $8^h\ 2^m\ 30^s$
Druck gemessen: $8^h\ 3^m$: $p = 21.38$ cm

Ablesung der Wellen bei 22°8

			Mittel	Diff. in mm
54.26	54.25	54.27	54.25*	17.9
52.48	52.48	52.46	52.46*	8
50.70	50.69	50.69	50.68*	7
48.94	48.91	48.92	48.91*	8
47.14	47.14	47.13	47.13*	8
45.35	45.34	45.35	45.35	9
43.58	43.57	43.53	43.56	5
41.81	41.80	41.81	41.81	18.2
40.00	39.99	39.99	39.99	17.8
38.21	38.21	38.21	38.21	18.3
36.40	36.38	36.35	36.38	17.7
34.61	34.61	34.61	34.61	18.0
32.81	32.80	32.82	32.81	17.9
31.03	31.02	31.02	31.02	7
29.28	29.25	29.22	29.25	9
27.48	27.45	27.44	27.46	6
25.69	25.70	25.70	25.70	9
23.92	23.91	23.91	23.91	18.0
22.11	22.11	22.11	22.11	17.9
20.31	20.32	20.32	20.32	18.1
18.51	18.52	18.51	18.51	17.7
16.74	16.74	16.73	16.74	18.0
14.95	14.93	14.94	14.94	17.8
13.15	13.15	13.18	13.16	18.1
11.35	11.35	11.36	11.35	17.9
9.56	9.56	9.57	9.56	6
7.78	7.81	7.80	7.80	

Kontrollrohr.

Temp.: 21°0. Barom.: 71.68 cm

Ablesung der Wellen bei 22°5

			Mittel	Diff. in mm
49.89	49.94	49.92	49.91*	33.3
46.52	46.60	46.61	46.58	34.1
43.15	43.13	43.24	43.17	33.8
—	—	—	[39.79]	8
36.40	36.44	36.40	36.41	6
33.05	33.05	33.05	33.05	6
29.67	29.72	29.68	29.69	8
26.28	26.33	26.33	26.31	34.2
22.85	22.92	22.91	22.89	33.5
19.50	19.58	19.55	19.54	5
16.16	16.22	16.20	16.19	34.0
12.76	12.81	12.79	12.79	33.6
9.43	9.42	9.44	9.43	34.4
5.99	5.99	5.99	5.99	

Versuch Nr. 6. 13. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $9^h\ 40^m$,
ausgepumpt: $9^h\ 45^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$10^h\ 7^m\ 45^s$	39.60
8	53
9	28
10	00
11	38.70
12	40

Wellenerregung: $10^h\ 10^m\ 30^s$

Druck gemessen: $10^h\ 11^m$: $p = 44.77$ cm

Ablesung der Wellen bei 22°1

			Mittel	Diff. in mm
53.72	53.73	53.73	53.72*	17.8
51.94	51.95	51.96	51.94*	6
50.19	50.19	50.20	50.18*	5
48.44	48.45	48.42	48.43*	6
46.66	46.67	46.67	46.67	18.0
44.88	44.85	44.88	44.87	17.7
43.09	43.10	43.10	43.10	6
41.35	41.32	41.34	41.34	18.0
39.54	39.53	39.56	39.54	17.8
37.75	37.76	37.78	37.76	18.0
35.96	35.96	35.96	35.96	17.9
34.18	34.17	34.16	34.17	6
32.42	32.40	32.40	32.41	7
30.64	30.65	30.64	30.64	7
28.86	28.86	28.88	28.87	9
27.08	27.08	27.08	27.08	8
25.30	25.30	25.30	25.30	6
23.53	23.54	23.54	23.54	18.1
21.73	21.73	21.74	21.73	17.9
19.94	19.94	19.93	19.94	9
18.16	18.14	18.14	18.15	6
16.40	16.39	16.38	16.39	9
14.60	14.60	14.60	14.60	9
12.81	12.81	12.81	12.81	8
11.03	11.03	11.02	11.03	6
9.27	9.26	9.27	9.27	7
7.50	7.50	7.49	7.50	7
5.73	5.73	5.72	5.73	

Kontrollrohr.

Temp.: 20°4. Barom.: 71.77 cm

Ablesung der Wellen bei 22°5

			Mittel	Diff. in mm
46.59	46.55	46.55	46.56	33.0
43.29	43.24	43.24	43.26	34.2
39.83	39.85	39.83	39.84	33.6
36.49	36.48	36.48	36.48	7
33.11	33.11	33.11	33.11	34.1
29.71	29.70	29.69	29.70	1
26.30	26.27	26.30	26.29	33.5
22.93	22.93	22.95	22.94	34.0
19.55	19.55	19.52	19.54	33.4
16.21	16.20	16.18	16.20	9
12.81	12.81	12.80	12.81	34.1
9.43	9.38	9.40	9.40	33.8
6.02	6.02	6.02	6.02	

Versuch Nr. 7. 18. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $4^h\ 30^m$;
Ende der Gasentwicklung: $4^h\ 37^m$
Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$4^h\ 56^m$	47.40
57	17
58	46.93
60	47

Wellenerregung: $4^h\ 58^m\ 30^s$
Druck gemessen: $4^h\ 59^m$: $p = 95.74$ cm

Ablesung der Wellen bei 19°9

			Mittel	Diff. in mm
57.32	57.32	57.31	57.31*	17.1
55.62	55.61	55.61	55.60*	5
53.85	53.87	53.86	53.85*	6
52.10	52.10	52.10	52.09*	4
50.36	50.36	50.35	50.35*	3
48.64	48.63	48.63	48.62*	2
46.92	46.91	46.90	46.90*	5
45.16	45.14	45.15	45.15	5
43.40	43.40	43.40	43.40	5
41.64	41.65	41.67	41.65	1
39.94	39.94	39.94	39.94	2
38.22	38.22	38.22	38.22	2
36.50	36.49	36.50	36.50	9
34.72	34.72	34.70	34.71	2
33.00	32.97	32.99	32.99	4
31.23	31.25	31.24	31.25	4
29.52	29.51	29.51	29.51	3
27.78	27.79	27.78	27.78	2
26.08	26.06	26.05	26.06	6
24.31	24.28	24.31	24.30	3
22.55	22.58	22.58	22.57	5
20.81	20.83	20.83	20.82	2
19.11	19.09	19.10	19.10	7
17.34	17.34	17.31	17.33	3
15.60	15.60	15.60	15.60	3
13.87	13.86	13.87	13.87	2
12.15	12.15	12.16	12.15	5
10.40	10.40	10.39	10.40	5
8.65	8.66	8.65	8.65	5
6.89	6.90	6.91	6.90	1
5.19	5.19	5.18	5.19	5
3.45	3.45	3.41	3.44	

Kontrollrohr.

Temp.: 17°4. Barom.: 71.24 cm

Ablesung der Wellen bei 19°5

			Mittel	Diff. in mm
50.02	50.02	50.00	50.00*	33.9
46.55	46.63	46.65	46.61	8
43.20	43.26	43.24	43.23	32.9
39.94	39.94	39.94	39.94	33.4
36.60	36.60	36.60	36.60	7
33.20	33.26	33.22	33.23	3
29.90	29.90	29.90	29.90	3
26.56	26.60	26.56	26.57	7
23.20	23.21	23.19	23.20	8
19.83	19.82	19.80	19.82	3
16.49	16.49	16.49	16.49	9
13.10	13.10	13.09	13.10	5
9.75	9.75	9.75	9.75	8
6.37	6.37	6.37	6.37	

Versuch Nr. 8. 20. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft und Ende der Gasentwicklung: $10^h\ 20^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$10^h\ 45^m$	47.92
46	72
47	50
48	30
49	10

Wellenerregung: $10^h\ 47^m\ 30^s$

Druck gemessen: $10^h\ 48^m$: $p = 98.00$ cm

Ablesung der Wellen bei 15°4

			Mittel	Diff. in mm
56.30	56.26	56.28	56.27*	17.4
54.54	54.52	54.55	54.53*	8
52.76	52.76	52.77	52.75*	0
51.09	51.04	51.04	51.05*	4
49.34	49.30	49.33	49.31*	5
47.57	47.56	47.57	47.56*	3
45.83	45.82	45.84	45.83	2
44.12	44.10	44.10	44.11	16.9
42.43	42.40	42.43	42.42	17.3
40.70	40.70	40.68	40.69	9
38.91	38.90	38.90	38.90	5
37.18	37.13	37.15	37.15	5
35.40	35.40	35.40	35.40	16.8
33.73	33.74	33.70	33.72	17.2
32.00	32.00	32.00	32.00	17.8
30.23	30.21	30.23	30.22	2
28.50	28.49	28.52	28.50	2
26.79	26.75	26.79	26.78	6
25.00	25.02	25.05	25.02	3
23.28	23.30	23.30	23.29	2
21.57	21.57	21.57	21.57	6
19.83	19.81	19.80	19.81	7
18.05	18.05	18.02	18.04	3
16.34	16.29	16.31	16.31	16.8
14.66	14.55	14.68	14.63	17.6
12.87	12.85	12.90	12.87	0
11.20	11.15	11.16	11.17	3
9.42	9.42	9.49	9.44	7
7.68	7.65	7.69	7.67	16.9
5.98	5.98	5.98	5.98	

Kontrollrohr.

Temp.: 16°1. Barom.: 71.80 cm

Ablesung der Wellen bei 17°7

			Mittel	Diff. in mm
53.43	53.43	53.43	53.42*	33.2
50.12	50.10	50.12	50.10*	34.0
46.70	46.70	46.70	46.70	33.0
43.39	43.40	43.40	43.40	5
40.10	40.05	40.00	40.05	5
36.75	36.70	36.64	36.70	5
33.40	33.32	33.33	33.35	32.8
30.12	30.05	30.03	30.07	33.7
26.73	26.70	26.67	26.70	0
23.44	23.38	23.38	23.40	8
20.02	20.02	20.02	20.02	9
16.64	16.61	16.65	16.63	7
13.22	13.31	13.24	13.26	1
9.94	9.96	9.94	9.95	

Versuch Nr. 9. 21. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $11^h\ 30^m$,
Ende der Gasentwicklung: $11^h\ 45^m$
Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$12^h\ 5^m$	53.01
6	52.81
7	52.62
8	52.42

Wellenerregung: $12^h\ 7^m\ 30^s$
Druck gemessen: $12^h\ 7^m\ 45^s$:
$p = 104.03$ cm

Ablesung der Wellen bei 19°5

			Mittel	Diff. in mm
55.72	55.73	55.72	55.71*	16.4
54.08	54.09	54.08	54.07*	17.6
52.32	52.33	52.32	52.31*	1
50.61	50.61	50.61	50.60*	4
48.86	48.87	48.87	48.86*	0
47.17	47.17	47.17	47.16*	6
45.41	45.41	45.38	45.40	16.7
43.75	43.73	43.70	43.73	17.2
42.02	42.02	41.99	42.01	3
40.28	40.27	40.28	40.28	16.8
38.62	38.59	38.59	38.60	17.5
36.86	36.84	36.84	36.85	1
35.14	35.13	35.14	35.14	4
33.40	33.40	33.40	33.40	0
31.69	31.69	31.71	31.70	7
29.94	29.94	29.92	29.93	16.7
28.26	28.24	28.28	28.26	17.6
26.51	26.49	26.49	26.50	0
24.80	24.79	24.81	24.80	4
23.07	23.07	23.05	23.06	2
21.39	21.31	21.33	21.34	4
19.63	19.59	19.58	19.60	0
17.92	17.89	17.88	17.90	5
16.15	16.13	16.18	16.15	0
14.49	14.41	14.45	14.45	5
12.71	12.71	12.69	12.70	16.5
11.06	11.08	11.02	11.05	17.5
9.30	9.29	9.30	9.30	0
7.59	7.61	7.60	7.60	3
5.89	5.84	5.89	5.87	1
4.16	4.16	4.16	4.16	

Kontrollrohr.

Temp.: 17°4. Barom.: 71.53 cm

Ablesung der Wellen bei 20°6

			Mittel	Diff. in mm
53.35	53.40	53.35	53.36*	33.2
50.02	50.08	50.04	50.04*	9
46.63	46.68	46.64	46.65	3
43.28	43.34	43.34	43.32	6
39.90	40.00	39.98	39.96	3
36.60	36.64	36.66	36.63	8
33.22	33.32	33.22	33.25	6
29.89	29.90	29.88	29.89	5
26.53	26.56	26.53	26.54	6
23.15	23.20	23.20	23.18	5
19.80	19.85	19.83	19.83	5
16.48	16.47	16.50	16.48	8
13.08	13.10	13.12	13.10	5
9.74	9.78	9.73	9.75	6
6.40	6.38	6.38	6.39	

Versuch Nr. 10. 21. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft und Ende der Gasentwicklung: $3^h\ 4^m$

Temperatur der flüsigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$3^h\ 27^m$	53.33
28	13
29	52.93
30	75

Wellenerregung: $3^h\ 29^m\ 30^s$

Druck gemessen: $3^h\ 29^m\ 45^s$: $p = 107.95$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°0

			Mittel	Diff. in mm
57.21	57.22	57.20	57.20*	17.3
55.50	55.48	55.46	55.47*	16.9
53.79	53.79	53.78	53.78*	17.5
52.08	52.01	52.04	52.03*	16.9
50.37	50.36	50.33	50.34*	17.3
48.63	48.60	48.64	48.61*	16.9
46.94	46.91	46.94	46.92*	17.2
45.20	45.20	45.20	45.20	2
43.49	43.46	43.49	43.48	2
41.78	41.74	41.75	41.76	3
40.06	40.00	40.03	40.03	16.8
38.34	38.34	38.36	38.35	17.5
36.60	36.60	36.60	36.60	0
34.91	34.89	34.90	34.90	4
33.15	33.15	33.17	33.16	0
31.47	31.44	31.46	31.46	6
29.71	29.68	29.70	29.70	0
28.00	28.00	28.00	28.00	2
26.30	26.28	26.27	26.28	2
24.58	24.56	24.55	24.56	3
22.86	22.83	22.81	22.83	0
21.13	21.12	21.13	21.13	4
19.40	19.40	19.38	19.39	16.9
17.70	17.70	17.70	17.70	17.6
15.95	15.95	15.93	15.94	16.9
14.26	14.25	14.25	14.25	17.5
12.49	12.50	12.50	12.50	0
10.80	10.80	10.80	10.80	4
9.08	9.07	9.04	9.06	0
7.35	7.36	7.38	7.36	3
5.64	5.61	5.65	5.63	

Kontrollrohr.

Temp.: 18°4. Barom.: 71.45 cm

Ablesung der Wellen bei 20°4

			Mittel	Diff. in mm
50.11	50.10	50.10	50.09*	33.9
46.70	46.70	46.70	46.70	5
43.33	43.37	43.35	43.35	7
39.95	40.00	40.00	39.98	32.9
36.69	36.70	36.67	36.69	34.0
33.31	33.29	33.28	33.29	33.7
29.91	29.94	29.92	29.92	8
26.55	26.55	26.53	26.54	7
23.20	23.20	23.12	23.17	2
19.88	19.88	19.80	19.85	6
16.53	16.45	16.48	16.49	34.3
13.07	13.07	13.05	13.06	33.9
9.67	9.67	9.67	9.67	6
6.30	6.33	6.30	6.31	

Versuch Nr. 11. 21. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $9^h\,50^m$—$10^h\,0^m$,
Ende der Gasentwicklung: $10^h\,3^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$10^h\,30^m$	46.00
31	45.80
32	68
33	—
34	05

Wellenerregung: $10^h\,33^m$

Druck gemessen: $10^h\,34^m$:
$p = 111.66$ cm

Ablesung der Wellen bei 19°3

			Mittel	Diff. in mm
57.22	57.22	57.20	57.20*	17.2
55.50	55.49	55.49	55.48*	5
53.75	53.73	53.73	53.73*	4
52.00	52.00	52.00	51.99*	5
50.23	50.23	50.23	50.24*	1
48.55	48.53	48.54	48.53*	2
46.82	46.82	46.82	46.81*	3
45.10	45.06	45.08	45.08	6
43.33	43.32	43.31	43.32	1
41.62	41.60	41.62	41.61	0
39.92	39.90	39.91	39.91	6
38.16	38.13	38.15	38.15	3
36.42	36.42	36.43	36.42	5
34.69	34.65	34.67	34.67	1
32.98	32.96	32.95	32.96	6
31.20	31.19	31.20	31.20	2
29.48	29.48	29.48	29.48	6
27.72	27.71	27.74	27.72	1
26.02	26.00	26.00	26.01	2
24.29	24.29	24.28	24.29	2
22.59	22.58	22.54	22.57	6
20.80	20.81	20.81	20.81	2
19.10	19.10	19.08	19.09	8
17.34	17.30	17.30	17.31	0
15.62	15.60	15.62	15.61	4
13.88	13.87	13.86	13.87	1
12.18	12.17	12.14	12.16	5
10.42	10.41	10.40	10.41	0
8.72	8.70	8.72	8.71	3
7.00	6.95	7.00	6.98	4
5.24	5.24	5.23	5.24	

Kontrollrohr.

Temp.: 18°6. Barom.: 71.56 cm

Ablesung der Wellen bei 19°6

			Mittel	Diff. in mm
50.03	50.07	50.01	50.03*	33.5
46.70	46.67	46.68	46.68	34.0
43.30	43.29	43.25	43.28	33.9
39.90	39.87	39.90	39.89	9
36.50	36.50	36.50	36.50	4
33.18	33.15	33.16	33.16	34.1
29.78	29.73	29.75	29.75	0
26.37	26.35	26.34	26.35	33.8
22.97	22.96	22.99	22.97	7
19.60	19.60	19.61	19.60	2
16.27	16.28	16.30	16.28	6
12.93	12.91	12.91	12.92	8
9.52	9.55	9.54	9.54	9
6.15	6.14	6.16	6.15	

Versuch Nr. 12. 23. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: 2^h 10^m und ausgepumpt

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
2^h 35^m	53.87
36	70
37	50
38	25
39	08

Wellenerregung: 2^h 37^m 30^s

Druck gemessen: 2^h 37^m 45^s: $p = 18.66$ cm

Ablesung der Wellen bei 21°0

			Mittel	Diff. in mm
57.00	57.10	57.07	57.05*	17.4
55.31	55.32	55.32	55.31*	9
53.51	53.54	53.54	53.52*	4
51.78	51.80	51.80	51.78*	6
50.00	50.02	50.06	50.02*	3
48.29	48.30	48.31	48.29*	9
46.50	46.48	46.51	46.50	8
44.70	44.75	44.72	44.72	5
42.99	42.94	42.98	42.97	1
41.24	41.25	41.30	41.26	6
39.50	39.51	39.50	39.50	9
37.70	37.71	37.71	37.71	18.1
35.90	35.90	35.89	35.90	17.9
34.11	34.11	34.10	34.11	2
32.39	32.40	32.38	32.39	6
30.65	30.62	30.62	30.63	18.2
28.83	28.81	28.80	28.81	17.6
27.06	27.03	27.06	27.05	3
25.35	25.30	25.30	25.32	7
23.55	23.56	23.54	23.55	6
21.81	21.78	21.79	21.79	9
20.01	19.98	20.00	20.00	18.0
18.20	18.20	18.20	18.20	17.5
16.44	16.43	16.48	16.45	2
14.71	14.73	14.76	14.73	8
12.95	12.92	12.97	12.95	6
11.18	11.18	11.20	11.19	

Kontrollrohr.

Temp.: 18°4. Barom.: 71.76 cm

Ablesung der Wellen bei 21°7

			Mittel	Diff. in mm
49.81	49.80	49.80	49.79*	33.2
46.49	46.47	46.45	46.47	1
43.16	43.16	43.15	43.16	9
39.76	39.79	39.76	39.77	5
36.41	36.42	36.44	36.42	6
33.06	33.05	33.07	33.06	8
29.68	29.70	29.65	29.68	9
26.29	26.30	26.27	26.29	34.0
22.90	22.90	22.88	22.89	33.4
19.54	19.54	19.56	19.55	7
16.20	16.18	16.15	16.18	8
12.82	12.80	12.78	12.80	4
9.45	9.46	9.47	9.46	8
6.07	6.07	6.10	6.08	

Versuch Nr. 13. 24. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $12^h\ 45^m$;
Ende der Gasentwicklung: $12^h\ 50^m$
Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$1^h\ 15^m$	48.80
16	60
17	38
18	10
19	47.85

Wellenerregung: $1^h\ 17^m\ 30^s$
Druck gemessen: $1^h\ 17^m\ 45^s$:
$p = 84.33$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°5

			Mittel	Diff. in mm
56.80	56.81	56.81	56.80*	17.0
55.11	55.11	55.12	55.10*	7
53.36	53.34	53.32	53.33*	5
51.59	51.60	51.59	51.58*	3
49.86	49.86	49.86	49.85*	1
48.16	48.14	48.14	48.14*	4
46.41	46.38	46.40	46.40	6
44.65	44.61	44.65	44.64	5
42.90	42.88	42.90	42.89	1
41.18	41.19	41.18	41.18	1
39.48	39.44	39.49	39.47	4
37.74	37.70	37.75	37.73	4
35.99	35.99	35.99	35.99	8
34.20	34.20	34.22	34.21	3
32.49	32.46	32.50	32.48	3
30.77	30.74	30.74	30.75	0
29.04	29.04	29.06	29.05	8
27.27	27.25	27.28	27.27	4
25.54	25.52	25.54	25.53	4
23.79	23.79	23.80	23.79	2
22.06	22.07	22.09	22.07	5
20.33	20.30	20.34	20.32	3
18.58	18.59	18.59	18.59	8
16.80	16.82	16.81	16.81	2
15.08	15.10	15.10	15.09	3
13.34	13.35	13.38	13.36	1
11.65	11.63	11.68	11.65	8
9.87	9.86	9.87	9.87	3
8.12	8.14	8.15	8.14	4
6.40	6.40	6.40	6.40	

Kontrollrohr.

Temp.: 19°4. Barom.: 71.73 cm

Ablesung der Wellen bei 21°4

			Mittel	Diff. in mm
49.83	49.86	49.86	49.84*	33.5
46.50	46.47	46.49	46.49	4
43.14	43.14	43.17	43.15	8
39.74	39.77	39.79	39.77	3
36.40	36.45	36.46	36.44	34.2
33.03	33.03	33.00	33.02	33.9
29.65	29.64	29.61	29.63	4
26.29	26.31	26.27	26.29	5
22.94	22.94	22.93	22.94	34.3
19.48	19.52	19.52	19.51	33.3
16.18	16.17	16.18	16.18	34.0
12.78	12.78	12.78	12.78	4
9.33	9.34	9.34	9.34	33.4
6.03	6.00	6.00	6.00	

Versuch Nr. 14. 25. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $12^h\ 40^m$; ausgepumpt: $12^h\ 45^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$1^h\ 12^m$	43.70
13	45
14	15
15	42.90
16	65

Wellenerregung: $1^h\ 14^m\ 30^s$

Druck gemessen: $1^h\ 14^m\ 45^s$: $p = 16.25$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°6

			Mittel	Diff. in mm
56.02	56.04	56.02	56.02*	18.0
54.23	54.23	54.22	54.22*	1
52.43	52.43	52.41	52.41*	17.8
50.64	50.64	50.64	50.63*	18.1
48.82	48.83	48.84	48.82*	
—	—	—	—	
—	—	—	—	
36.41	36.42	36.41	36.41	17.7
34.64	34.65	34.63	34.64	18.2
32.83	32.80	32.84	32.82	17.3
31.08	31.08	31.10	31.09	18.1
29.28	29.26	29.29	29.28	17.7
27.50	27.53	27.50	27.51	7
25.74	25.73	25.75	25.74	9
23.96	23.94	23.95	23.95	8
22.17	22.17	22.16	22.17	18.0
20.35	20.37	20.38	20.37	17.8
18.60	18.58	18.60	18.59	

Kontrollrohr.

Temp.: 19°3. Barom.: 71.75 cm

Ablesung der Wellen bei 21°5

			Mittel	Diff. in mm
49.70	49.71	49.73	49.70*	33.3
46.36	46.39	46.36	46.37	7
—	—	—	[43.00]	7
—	—	—	[39.63]	6
36.27	36.26	36.29	36.27	4
32.90	32.94	32.96	32.93	8
29.54	29.54	26.56	29.55	34.0
26.16	26.15	26.15	26.15	33.7
22.79	22.77	22.77	22.78	8
—	—	—	[19.40]	8
—	—	—	[16.02]	7
12.66	12.65	12.64	12.65	5
9.30	9.30	9.30	9.30	7
5.93	5.93	5.93	5.93	

Versuch Nr. 15. 25. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: 10^h 20^m; ausgepumpt: 10^h 25^m

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
10^h 53^m	41.18
54	40.90
55	60
56	30
57	00

Wellenerregung: 10^h 55^m 30^s

Druck gemessen: 10^h 56^m:
$p = 56.58$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°0

			Mittel	Diff. in mm
57.31	57.29	57.29	57.29*	17.8
56.52	55.53	55.52	55.51*	9
53.72	53.74	53.73	53.72*	5
51.98	51.98	51.98	51.97*	9
50.18	50.20	50.20	50.13*	5
48.44	48.44	48.44	48.43*	5
46.70	46.68	46.67	46.68	8
44.91	44.88	44.90	44.90	6
43.13	43.14	43.16	43.14	4
41.40	41.40	41.41	41.40	18.0
39.60	39.60	39.60	39.60	17.6
37.85	37.84	37.83	37.84	7
36.08	36.06	36.07	36.07	7
34.30	34.29	34.30	34.30	6
32.55	32.54	32.54	32.54	6
30.80	30.78	30.76	30.78	9
29.00	28.99	28.98	28.99	18.0
27.20	27.18	27.20	27.19	17.7
25.42	25.42	25.42	25.42	6
23.67	23.66	23.64	23.66	6
21.88	21.91	21.89	21.90	8
20.13	20.12	20.12	20.12	8
18.35	18.33	18.34	18.34	5
16.60	16.59	16.58	16.59	7
14.80	14.81	14.80	14.80	7
13.02	13.03	13.04	13.03	8
11.24	11.26	11.26	11.25	6
9.48	9.49	9.50	9.49	18.0
7.69	7.68	7.69	7.69	

Kontrollrohr.

Temp.: 19°3 Barom.: 71.98 cm

Ablesung der Wellen bei 21°5

			Mittel	Diff. in mm
49.89	49.80	49.79	49.82*	33.9
46.45	46.41	46.43	46.43	3
43.16	43.13	43.02	43.10	9
39.75	39.80	39.58	39.71	8
36.40	36.31	36.27	36.33	6
32.99	32.96	32.97	32.97	34.0
29.60	29.54	29.58	29.57	3
26.18	26.12	26.13	26.14	33.4
22.81	22.79	22.79	22.80	34.1
19.40	19.41	19.36	19.39	33.6
16.05	16.06	15.98	16.03	34.2
12.64	12.60	12.60	12.61	33.4
9.31	9.25	9.24	9.27	5
5.93	5.94	5.90	5.92	

Versuch Nr. 16. 27. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $3^h\ 30^m$
Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$3^h\ 57^m$	46.30
58	10
59	45.85
60	60
61	35

Wellenerregung: $3^h\ 59^m\ 45^s$
Druck gemessen: $3^h\ 59^m\ 45^s$:
$p = 33.95$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°1

			Mittel	Diff. in mm
49.64	49.62	49.63	49.62*	17.7
47.86	47.87	47.85	47.85*	6
46.10	46.08	46.10	46.09	7
44.35	44.32	44.30	44.32	9
42.53	42.53	42.53	42.53	7
40.76	40.76	40.76	40.76	6
39.00	39.00	39.00	39.00	9
37.25	37.20	37.19	37.21	3
35.50	35.45	35.49	35.48	18.3
33.70	33.61	33.65	33.65	17.6
31.88	31.89	31.89	31.89	7
30.09	30.15	30.13	30.12	4
28.38	28.39	28.37	28.38	4
26.64	26.64	26.64	26.64	9
24.85	24.85	24.85	24.85	6
23.09	23.09	23.10	23.09	9
21.31	21.28	21.30	21.30	9
19.51	19.51	19.50	19.51	9
17.73	17.72	17.71	17.72	6
15.95	15.95	15.97	15.96	6
14.21	14.20	14.20	14.20	7
12.44	12.42	12.42	12.43	7
10.67	10.65	10.67	10.66	9
8.88	8.87	8.86	8.87	

Kontrollrohr.

Temp.: 18°5 Barom.: 72.35 cm

Ablesung der Wellen bei 20°5

			Mittel	Diff. in mm
50.09	50.08	50.05	50.06*	33.7
46.69	46.69	46.69	46.69	3
43.36	43.39	43.34	43.36	34.1
39.95	40.01	39.90	39.95	33.7
36.55	36.61	36.58	36.58	3
33.23	33.27	33.25	33.25	5
29.88	29.93	29.90	29.90	7
26.52	26.54	26.52	26.53	7
23.15	23.16	23.18	23.16	5
19.81	19.80	19.82	19.81	7
16.46	16.44	16.43	16.44	9
13.06	13.04	13.05	13.05	6
9.70	9.68	9.68	9.69	9
6.31	6.29	6.30	6.30	

Versuch Nr. 17. 28. 8. 03.

Untersuchungsrohr.

In flüssiger Luft: $9^h\ 30^m$. Ende der Gasentwicklung: $9^h\ 45^m$

Temperatur der flüssigen Luft:

Zeit	Brückeneinstellung
$10^h\ 12^m$	40.50
13	28
14	39.98
15	70
16	40

Wellenerregung: $10^h\ 14^m\ 30^s$

Druck gemessen: $10^h\ 14^m\ 45^s$: $p = 121.37$ cm

Ablesung der Wellen bei 20°2

			Mittel	Diff. in mm
53.50	53.52	53.51	53.50*	17.2
51.79	51.81	51.78	51.78*	0
50.10	50.09	50.07	50.08*	4
48.34	48.34	48.36	48.34*	2
46.61	46.63	46.61	46.62	2
44.89	44.92	44.90	44.90	5
43.15	43.16	43.14	43.15	18.0
41.36	41.36	41.34	41.35	16.7
39.67	39.68	39.68	39.68	17.4
37.95	37.89	37.97	37.94	4
36.20	39.19	36.21	36.20	4
34.49	34.45	34.43	34.46	5
32.71	32.71	32.70	32.71	8
30.96	30.90	30.92	30.93	16.8
29.23	29.29	29.22	29.25	17.6
27.50	27.49	27.49	27.49	4
25.73	25.78	25.74	25.75	5
24.00	24.00	24.01	24.00	2
22.26	22.29	22.30	22.28	1
20.56	20.55	20.60	20.57	6
18.80	18.83	18.81	18.81	4
17.07	17.06	17.09	17.07	3
15.34	15.35	15.33	15.34	5
13.59	13.60	13.58	13.59	

Kontrollrohr.

Temp.: 18°3. Barom.: 72.17 cm

Ablesung der Wellen bei 21°0

			Mittel	Diff. in mm
49.96	50.00	50.02	49.98*	33.8
46.60	46.60	46.61	46.60	9
43.20	43.21	43.23	43.21	8
39.81	39.85	39.82	39.83	1
36.49	36.55	36.52	36.52	6
33.15	33.18	33.15	33.16	6
29.80	29.79	29.80	29.80	8
26.42	26.40	26.45	26.42	7
23.04	23.06	23.05	23.05	34.0
19.66	19.65	19.65	19.65	33.4
16.30	16.32	16.32	16.31	34.1
12.90	12.90	12.90	12.90	33.8
9.54	9.53	9.50	9.52	6
6.16	6.16	6.15	6.16	

Über die Dichte und die Abhängigkeit derselben vom Druck des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft.

Von **A. Bestelmeyer** und **S. Valentiner.**

(Eingelaufen 5. Dezember.)

Eine im Wintersemester 1900/01 von Herrn Ch. M. Smith angefangene Untersuchung über das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{c_p}{c_v}$ des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft, die Fortsetzung dieser Arbeit durch den einen von uns,[1]) sowie endlich die Bestimmung der Änderung der inneren Reibung des Stickstoffs mit der Temperatur durch den anderen von uns[2]) erforderte die Kenntnis der Dichte und der Abhängigkeit derselben vom Druck des Stickstoffs bei der Temperatur der flüssigen Luft.[3]) Wir führten daher eine Anzahl Dichtebestimmungen bei Drucken von 16 bis 132 cm Quecksilber und Temperaturen von 81° bis 85° abs. aus. Die uns hierfür zur Verfügung stehende, sehr beschränkte Zeit gestattete leider nicht die ganze Genauigkeit anzustreben, deren die angewandte Methode fähig ist. Immerhin dürften die Mittelwerte unserer Zahlen abgesehen von einem konstanten durch die Temperatur-

---

[1]) Valentiner, vergl. Sitzungsber. dieses Heft.

[2]) Bestelmeyer, Dissertation, München 1903.

[3]) Die genannten Arbeiten wurden im physikalischen Institut der Universität München auf Veranlassung des Herrn Geheimrat Röntgen ausgeführt, der auch die ursprüngliche Anregung zu der vorliegenden, in dem gleichen Institut ausgeführten Untersuchung gegeben hat.

eichung eventuell bedingten Fehler in den Temperaturangaben auf 1 bis 2°/₀₀ zu verbürgen sein.

1. Apparat.

Wir bedienten uns zu unserer Messung eines Gasthermometers, welches in folgender Weise eingerichtet war. Die mit dem Stickstoff zu füllende Glaskugel von etwa 11 cm^3 Inhalt stand durch ein zweimal rechtwinkelig gebogenes Kapillarrohr mit einer vertikalen kalibrierten Glasröhre (*a*) von etwa 1 cm^2 Querschnitt und 30 cm Länge in Verbindung, in welcher das Gas über Quecksilber abgeschlossen war. Nahe am Ende des Rohres führte dasselbe wasserdicht durch den Boden eines bis an den Ansatz der Kapillare reichenden Troges aus Spiegelglas, welcher während der Untersuchung mit Wasser gefüllt als Temperaturbad für das kalibrierte Rohr diente. Dieser Trog war an einem 2 m langen Stativ mit eingelegter Skala befestigt, welches auf einem Steinpfeiler des Institutes aufgestellt war. An das kalibrierte Rohr war ein etwas engeres Rohr von 80 cm Länge vertikal angeblasen, an dessen unterem Ende ein Gummischlauch angesetzt war und die Verbindung zu dem an dem Stativ verschiebbar befestigten Glasrohr (*b*) von gleicher Weite wie Rohr (*a*) herstellte. Das Ansatzrohr war deshalb eingeschaltet, damit auch bei niedrigen Drucken überall der Gummischlauch unter innerem Ueberdruck stand. Zum Auspumpen des Apparates und zum Einlassen des Stickstoffs in denselben war an der Ansatzstelle des 80 cm langen Rohres an das kalibrierte Rohr (*a*) ein enges schräg nach oben führendes Rohr angeblasen, welches 5 cm von der Ansatzstelle entfernt knieförmig nach unten gebogen und mittels Kittung mit einem Π-Stück verbunden war. Von diesem führten die durch Hähne abschliessbaren Leitungen in die Atmosphäre, zur Quecksilberluftpumpe und zum Stickstoffentwicklungsapparat. Es war notwendig jenes enge nach oben führende Kniestück anzusetzen, um eventuelle Gasbläschen, die an der Kittungsstelle[1]) sich fest-

[1]) Die Kittung war notwendig, da das Untersuchungsgefäss aus Jenaer Glas hergestellt worden war.

setzen konnten, beim Bewegen des Quecksilbers nicht in das Untersuchungsgefäss geraten zu lassen, sondern sie im Knie anzusammeln. Die Kommunikation des einen Teiles mit dem Aussenraum diente zum Ablassen von Quecksilber, wenn sich hinter dem Knie zu viel angesammelt hatte.

Anstatt die Einstellung wie üblich auf gleiches Volumen mittels Benutzung einer Marke in der Nähe der Kapillarenmündung vornehmen zu müssen, konnten wir mit Hilfe des kalibrierten Rohres bei ein und derselben Gasfüllung Dichtebestimmungen bei verschiedenen Drucken und gleicher Temperatur machen. Die Ablesung des Quecksilbermeniskus in Rohr (a), der abgesehen von der Druckbestimmung besonders für die Volumenbestimmung massgebend war, wurde mit einem in 3 m Entfernung auf Steinpfeiler aufgestellten Kathetometer abgelesen, wobei nicht die Kathetometerteilung benutzt wurde, sondern der Meniskus auf die Rohrteilung und diese mehrmals auf die in dem Gasthermometerstativ eingelegte Skala bezogen wurde; der Quecksilbermeniskus im Rohr (b) wurde an dieser Skala mit unbewaffnetem Auge und Spiegel abgelesen. Die Skala selbst wurde nach Beendigung der Messung mit einem im Institut nach einem Normalmeterstab hergestellten Massstab verglichen.

Für die Bestimmung der Gasdichte bei 0° wurde die Thermometerkugel in ein Bad von Eis und destilliertem Wasser gebracht, welches von unten her mittels Stelltischchens gehoben wurde. Das mit Eis und Wasser gefüllte Gefäss stand, um es gegen Wärmeaustausch nach aussen möglichst zu schützen, in einem Holzkasten mit Holzwolle. Für die Bestimmung der Dichte bei der Temperatur der flüssigen Luft wurde von unten her ein mit flüssiger Luft gefülltes Dewar'sches Gefäss gegen die Kugel herangebracht. Es wurde darauf geachtet, dass ausser der Kugel immer ein nahezu gleich grosses Stück der Kapillare eintauchte (etwa 2,5 cm vom Ansatz der Kapillare an die Kugel). Um den Fehler infolge Unkenntnis der Temperatur in dem Teil der Kapillare, der den Übergang von der kalten zur Zimmertemperatur bildet, möglichst zu eliminieren, wurde die-

selbe, 2,9 cm vom Ansatz an der Kugel entfernt, mit 5,3 cm hoher gut anschliessender Korkhülle umgeben und in diesem Teile ein konstantes Temperaturgefälle in Rechnung gesetzt. Für den Rest der Kapillare wurde die Temperatur des das kalibrierte Rohr umgebenden Wasserbades angenommen, welches nahezu Zimmertemperatur hatte.

Die Temperatur der flüssigen Luft wurde mit Hilfe des Platinwiderstandsthermometers I unter Benutzung der Wheatstoneschen Brücke bestimmt, welches in der erwähnten Arbeit über die innere Reibung des Stickstoffs verwendet worden war.[1]) Der Platinwiderstand befand sich in gleicher Höhe mit der Thermometerkugel, derselben möglichst nahe, in der flüssigen Luft.

Die Temperatur des Wasserbades wurde mit Hilfe eines in zehntel Grade geteilten, geprüften Thermometers bestimmt. Die Temperatur des Quecksilbers wurde an einem neben dem 80 cm langen Rohr hängenden, in ganzen Graden geteilten Thermometer abgelesen. Endlich wurde bei jeder Beobachtung der Barometerstand berücksichtigt.

Vor Beginn der Messung wurde der Apparat mit einer automatischen Quecksilberpumpe Sprengel'schen Systems luftleer gepumpt und 36 Stunden ausgepumpt stehen gelassen, dann mit Stickstoff gefüllt und nochmals ausgepumpt unter gleichzeitiger Erwärmung der Thermometerkugel. Danach wurde der Apparat mit Stickstoff gefüllt. Der Stickstoff war in gleicher Weise hergestellt und gereinigt worden wie in der zitierten Arbeit[1]) des einen von uns, einschliesslich der Ausfrierung mittels flüssiger Luft.

2. Berechnung und Genauigkeit der Versuche.

Die Berechnung der Versuche geschah nach der folgenden leicht abzuleitenden Gleichung, welche gewonnen ist durch Gleichsetzen der durch Volumen, Druck und Dichte bestimmten Masse bei 0° und bei der Temperatur der flüssigen Luft mit Berücksichtigung der betreffenden schädlichen Räume:

[1]) A. Bestelmeyer, Dissertation, München 1903.

$$\frac{v^{-190} \cdot \lambda_{p'}^{t}}{\lambda_{76}^{0}} = \left\{ v^0 + \frac{v_z''}{1 + a t''} + \frac{v_\varkappa}{a t''} \lg (1 + a t'') \right\} \frac{p''}{76}$$

$$- \left\{ \frac{v_z'}{1 + a t'} + \frac{v_\varkappa}{(t' - t) a} \lg \left(\frac{1 + a t'}{1 + a t} \right) \right\} \frac{p'}{76},$$

woraus $\lambda_{p'}^{t}$ zu berechnen ist. Hierin bedeutet:

$\lambda_{p'}^{t}$ die Dichte des Stickstoffs bei der Temperatur t der flüssigen Luft und dem Druck von p' cm Quecksilber.

λ_{76}^{0} die Dichte des Stickstoffs bei 0° und 76 cm Quecksilber, welche bei der Ausrechnung = 1 gesetzt worden ist.

v^{-190} resp. v^0 das Volumen der Gasthermometerkugel bei — 190° resp. 0°.

v_z', v_z'' das Volumen des mit Stickstoff gefüllten Teiles des kalibrierten Rohres (a) und der Kapillare bis zum Beginn der Korkhülle.[1])

$v_\varkappa$ das Volumen der Kapillare im Kork.

t', t'' die Temperatur des Wasserbades um das Rohr (a).[1])

p', p'' der Druck des Gases im Gasthermometer.[1])

Was die Korrektionsglieder, herrührend von $v_\varkappa$, betrifft, so können in diesen bei der numerischen Berechnung unter den vorliegenden Verhältnissen für t' und t'', sowie für t mittlere Temperaturen angenommen werden; da $v_\varkappa = 0.0101$ cm³ ist, und wenn $t' = t'' = 18{,}^{\circ}5$ und $t = -190^{\circ}$ gesetzt wird, so ergibt sich:

$$\frac{v_\varkappa}{a t''} \lg (1 + a t'') = 0.00977 \text{ cm}^3 \text{ und}$$

$$\frac{v_\varkappa}{a (t' - t)} \lg \left(\frac{1 + a t'}{1 + a t} \right) = 0.01666 \text{ cm}^3.$$

---

[1]) v', t' und p' beziehen sich auf die Messungen, bei welchen sich die Thermometerkugel in flüssiger Luft befand, v'', t'' und p'' auf die, bei welchen sie sich bei gleicher Stickstofffüllung des Apparates in schmelzendem Eis befand.

Nimmt man für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Jenaer Glases 0.000023, so ergibt sich für:

$$v^{0} = 10.867 \text{ cm}^3 \text{ und}$$
$$v^{-190} = 10.820 \text{ cm}^3,$$

so dass sich die Dichte des Stickstoffs, bezogen auf die Dichte bei 0^0 und 76 cm Quecksilberdruck, aus unseren Beobachtungen mittels der Formel berechnet:

$$\lambda_{p'}^{t} = \frac{1}{76 \cdot 10.820}\left[\left\{\frac{v_s''}{1+at''} + 10.877\right\}p'' - \left\{\frac{v_s'}{1+at'} + 0.017\right\}p'\right].$$

Über die Fehlergrenze der Beobachtungen ist folgendes zu sagen. Die Auswertung des Volumens der Kugel, der Kapillare und des graduierten Rohres darf als genügend genau betrachtet werden, sie wurde mit der nötigen Sorgfalt ausgeführt.[1]) Fehler in der Volumenbestimmung können also nur entstanden sein durch fehlerhafte Schätzung bei Ablesung des Quecksilbermeniskus im graduierten Rohr. Es entspricht $\pm$ 0.07 mm Fehler in der Ablesung der Quecksilberhöhe einem Fehler von ungefähr $\pm$ 0.007 cm^3, d. h. es kann v_s' sowie v_s'' um $\pm$ 0.007 cm^3 falsch bestimmt sein. Dieser Fehler kann das Resultat im ungünstigsten Fall auf $\pm$ 0.9 ‰ beeinflussen.

$0{}^\circ\!.05$ Fehler in der Temperaturbestimmung des Gasvolumens in dem kalibrierten Rohr (a) ergibt einen Fehler von 0.02 % dieses Gasvolumens, in dem Resultat einen Fehler bis zu $\pm$ 0.6 ‰.

λ_0 kann durch eine Temperaturabweichung der Mischung von Eis und Wasser um $\pm\, 0{}^\circ\!.05$ vom Schmelzpunkt des Eises, da es proportional der absoluten Temperatur zu setzen ist, mit

[1]) Der Inhalt der Kugel und der Kapillare wurde durch Quecksilberfüllung bestimmt; zur Kalibrierung des Rohres in Abständen von ca. 2 cm wurden die aus einem zu diesem Zweck unten angekitteten Hahn ausfliessenden Quecksilbermengen gewogen, so dass die in den Tabellen angeführten Zahlen das Volumen des Rohres einschliesslich der Meniskus-Korrektion ergeben, wenn die Kuppe in der Höhe des betreffenden Teilstriches steht.

einem Fehler von $\pm$ 0.0002 seines Wertes, d. h. von 0.2 °/oo behaftet sein.

Die relativen Angaben der Temperatur der Thermometerkugel durch den Platinwiderstand dürften auf wenige hundertstel Grade sicher sein, das bedeutet für λ_p^t für die angegebene Temperatur einen möglichen Fehler von $\pm$ 0.3 °/oo.

Die bedeutendste Fehlerquelle in den vorliegenden Messungen bildet die Druckmessung namentlich bei niederen Drucken. Der Druck wurde bestimmt durch Ablesung der Quecksilberhöhen in Rohr (*a*) und Rohr (*b*) und des Barometers. Für die Ablesung des Barometers und der mit Kathetometer abgelesenen Quecksilberhöhe darf die Fehlergrenze wie üblich zu $\pm$ 0.07 mm festgesetzt werden. Für die Ablesung des 3. Quecksilbermeniskus, welcher mit blossem Auge beobachtet wurde, muss indessen ein Fehler von $\pm$ 0.2 mm in Anrechnung gebracht werden. Die Ablesefehler der Quecksilbersäulen können also den Druck um $\pm$ 0.34 mm fälschen; hierzu können sich Fehler in der Temperaturkorrektion addieren. Nimmt man einen Temperaturunterschied der Quecksilbersäulen in beiden Schenkeln von $\pm$ 0°,5 an und Fehler der gleichen Grösse in der Temperaturbestimmung des Quecksilbers im Luftthermometer und im Barometer, so kann dieser Fehler bis zu 0.16 bis 0.22 mm betragen. Bei den kleinsten zur Anwendung gekommenen Drucken (160 mm) könnten also die Fehler in der Druckbestimmung falls sie sich sämtlich addieren würden, bis zu 3.1 °/oo das Resultat fälschen. Analoge Fehler können die Druckbestimmung bei 0° und dadurch die Resultate der betreffenden Versuchsreihe im Maximum um 1.2 °/oo beeinflusst haben.

Würden sich in einem Falle — was nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit als ausgeschlossen gelten kann — diese sämtlichen Fehler addieren, so würde bei den kleinsten Drucken ein Gesamtfehler von $\pm$ 6.3 °/oo resultieren.

3. Beobachtungen.

Versuch. Nr.	Barometer		Zeit	Manometer			Widerstandsmessung		Temp. d. grad. Rohr.	Thermometerkugel in:
		Temp.		links	rechts	Temp.	Rheostat	Brücke		
	cm			cm	cm		Ω	cm		
1	72 35	18°4	12h 31m	1.335	96.79	18°9	19.105	$49.^{54}_{58}$	18°28	fl. Luft
2	35	6	1h 6m	10.88	119.50	9	"	$50.^{15}_{17}$	40	"
3	34	6	1h 21m	18.38	140.40	9	"	$50.^{44}_{47}$	38	"
4	31	7	2h 2m	28.06	173.89	8	"	$51.^{14}_{19}$	30	"
5	31	8	2h 27m	18.72	140.69	9	19.005	$49.^{15}_{28}$	25	"
6	32	8	2h 43m	10.875	119.16	8	"	$49.^{76}_{76}$	25	"
7	31	8	3h 00m	1.34	96.50	8	"	$50.^{05}_{09}$	25	"
8	31	8	3h 22m	1.75	155.94	9	—	—	20	schm. Eis
9	29	9	4h 11m	1.40	94.06	8	—	—	14	schm. Eis
10	30	9	4h 30m	1.29	60.23	19.4	18.005	$48.^{14}_{14}$	10	fl. Luft
11	30	9	4h 42m	14.235	83.49	—	"	$48.^{29}_{30}$	12	"
12	30	9	4h 56m	28.225	$114.^{96}_{93}$	19.1	"	$48.^{47}_{52}$	20	"
13	30	9	5h 12m	14.38	83.77	0	"	$48.^{60}_{65}$	20	"
14	30	9	5h 27m	1.30	60.30	6	"	$48.^{82}_{84}$	26	"
15	31	9	5h 53m	1.345	39.30	1	"	$49.^{07}_{06}$	20	fl. Luft
16	31	19.0	6h 10m	28.44	82.17	0	"	$49.^{34}_{45}$	20	"
17	31	0	6h 22m	1.20	$39.^{09}_{10}$	0	"	$49.^{60}_{61}$	20	"
18	32	0	6h 38m	15.69	95.27	1	—	—	24	schm. Eis
19	32	0	—	16.585	73.29	2	—	—	29	schm. Eis
20	34	0	7h 25m	1.30	30.09	4	18.005	$49.^{78}_{72}$	40	fl. Luft
21	35	0	7h 39m	28.55	67.61	4	"	$50.^{04}_{07}$	50	"
22	36	1	7h 50m	1.31	30.14	4	"	$50.^{08}_{11}$	51	"
23	36	1	8h 2m	28.64	$67.^{78}_{77}$	6	"	$50.^{30}_{28}$	60	"
24	36	2	8h 14m	1.42	30.24	6	"	$50.^{40}_{37}$	60	"
25	37	2	8h 35m	1.20	$95.^{98}_{90}$	5	"	$50.^{62}_{74}$	68	"
26	37	2	8h 49m	10.80	$118.^{14}_{11}$	3	"	$50.^{74}_{84}$	73	"
27	37	3	8h 59m	18.68	$139.^{27}_{24}$	5	"	$50.^{85}_{85}$	79	"
28	40	3	9h 13m	29.30	162.60	4	"	50.95 51.04	82	"
29	40	4	9h 24m	18.52	138.89	5	"	$51.^{12}_{18}$	84	"
30	40	4	9h 35m	10.75	$118.^{04}_{08}$	4	"	$51.^{21}_{22}$	95	"
31	40	4	9h 46m	1.12	95.90	4	"	$51.^{37}_{38}$	94	"
32	40	4	10h 5m	1.325	$156.^{99}_{95}$	4	—	—	94	schm. Eis

Zwischen Versuch 8 und 9, 14 und 15, 18 und 19 wurde Stickstoff aus dem Gasthermometer abgesaugt, zwischen Versuch 24 und 25 in dasselbe nachgefüllt.

Barometerkorrektion inkl. der Kapillardepression beträgt: + 0.103 cm.

In der Spalte „Manometer" bezieht sich „links" auf die Ablesung des Rohres (*a*) mit Hilfe des Kathetometers, „rechts" auf die Ablesung des Rohres (*b*) mit blossem Auge; diese letztere wurde stets zweimal ausgeführt.

Zur Berechnung des Widerstandes des Platinthermometers sei bemerkt, dass die Brücke 10 m lang ist, und auf dem in der Mitte gelegenen Meter gemessen wurde; der Brückenmittelpunkt liegt bei 49.64 cm. Zur Bestimmung der Temperatur des Platinthermometers dient die Gleichung:

$$W_t = 73.030 + 0.27418\, t - 0.000067\, t^2,$$

worin W_t den Widerstand bei der Temperatur t^0 vom Schmelzpunkt des Eises an gerechnet, in Ω bedeutet.

Das Thermometer, mit welchem die Temperatur des kalibrierten Rohres gemessen wurde, zeigt in dem benutzten Bereich um 0°,18 zu hoch.

Um die Teilung des graduierten Rohres auf die Gasthermometerskala zu beziehen, ist + 85.425 cm zu den Teilen des Rohres zu addieren.

An die Gasthermometerskala sind folgende Korrektionen anzubringen:

Oberhalb	111 cm:	± 0.00 cm
Von	99—91 „ :	— 0.03 „
„	90—89 „ :	— 0.02 „
„	88—76 „ :	— 0.01 „
„	75—64 „ :	± 0.00 „
„	63—60 „ :	+ 0.01 „
„	59—58 „ :	+ 0.02 „
„	42—30 „ :	+ 0.03 „
„	29—28 „ :	+ 0.04 „

Eichung des Gasthermometergefässes; es beträgt:

das Volumen der Thermometerkugel + Kapillare bis zur Korkhülle bei 0°: 10.867 cm^3;

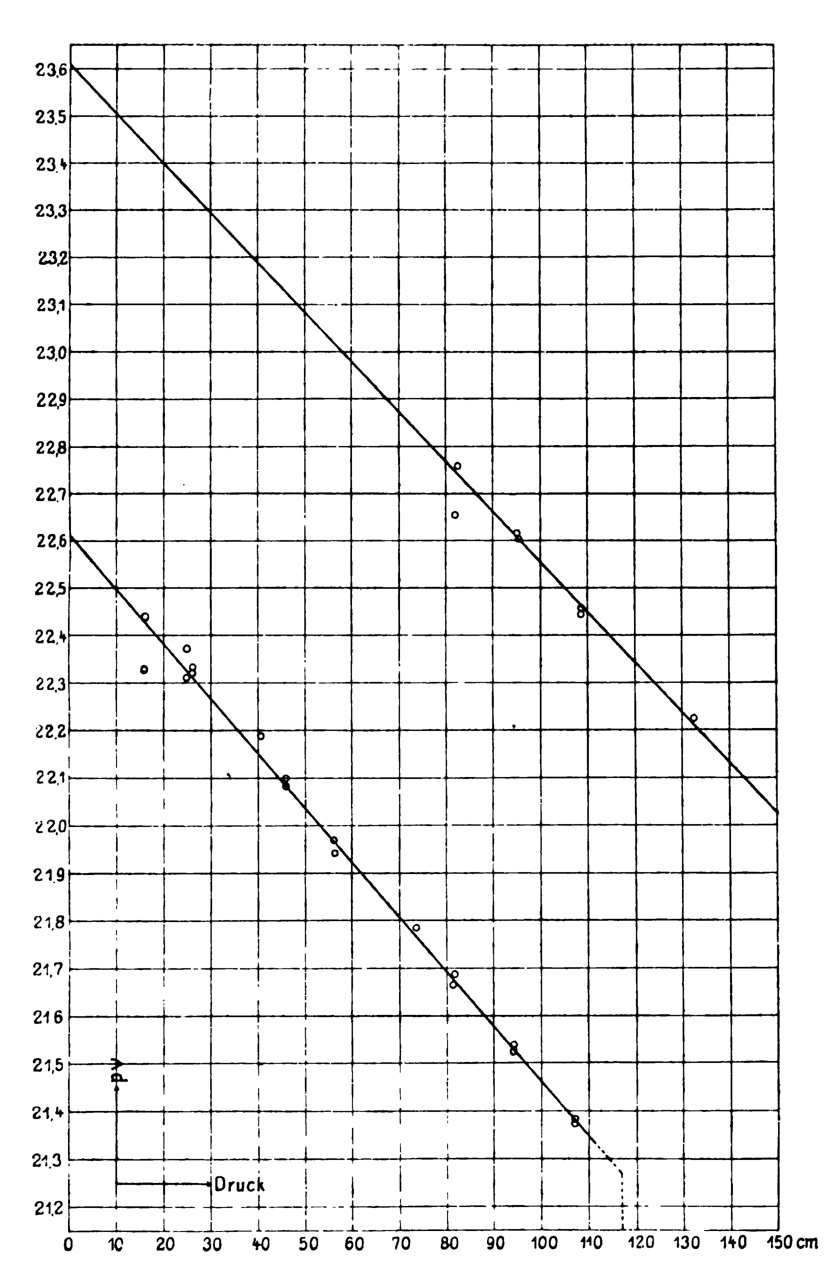
das Volumen der Kapillare in der Korkhülle: 0.0101 cm^3;

das Volumen der Kapillare von der Korkhülle bis in 1 cm Entfernung von der Ansatzstelle an das graduierte Rohr: 0.0937 cm^3; von diesem Punkt an bis an:

Teilstrich des graduierten Rohres	das Volumen bei 19° in cm^3	Teilstrich des graduierten Rohres	das Volumen bei 19° in cm^3
29	0.603	14	14.910
28	1.554	13	15.869
27	2.505	12	16.830
26	3.457	11	17.790
25	4.408	10	18.753
24	5.359	9	19.716
23	6.312	8	20.681
22	7.265	7	21.647
21	8.219	6	22.614
20	9.172	5	23.584
19	10.128	4	24.554
18	11.083	3	25.527
17	12.039	2	26.500
16	12.995	1	27.476
15	13.951	0	28.455

4. Resultat.

Mit Hilfe der in § 2 angegebenen Formel lässt sich aus diesen Beobachtungen $\lambda_{p'}^t$ berechnen. Es ist in der folgenden Tabelle nicht $\lambda_{p'}^t$ sondern $\frac{p'}{\lambda_{p'}^t}$ für die in den Versuchen benutzten Drucke p' und Temperaturen t eingetragen, da $\frac{p'}{\lambda_{p'}^t} = p' v_{p'}^t$ naturgemäss eine einfachere Beziehung zu p' und t hat. Um eine bessere Übersicht zu gewinnen, wurden diese Werte mittels des durch eine vorläufige Berechnung gewonnenen Ausdehnungskoeffizienten zunächst auf die 2 Mitteltemperaturen von 85°00 abs. und 81°40 abs. reduziert; die so erhaltenen Werte wurden in Koordinatenpapier eingetragen. Es zeigt sich dann eine lineare Abhängigkeit des Produktes pv vom Druck. Durch die verschiedenen Punkte bei 81°4 kann die betreffende Gerade mit ge-


23,6
23,5
23,4
23,3
23,2
23,1
23,0
22,9
22,8
22,7
22,6
22,5
22,4
22,3
22,2
22,1
22,0
21,9
21,8
21,7
21,6
21,5
21,4
21,3
21,2
pv
Druck
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150 cm

nügender Sicherheit gezogen werden. Weit weniger bestimmt ist infolge der geringen Anzahl der Beobachtungen die Isotherme für 85°.0; doch kann man für diese den Schnittpunkt der Ordinatenachse mit Hilfe der ersten Isotherme durch die theoretische Überlegung finden, dass bei dem Drucke $p = 0$ sich jedes Gas ideal verhält, dass also die Werte von $p\,v$ für $p = 0$ bei zwei verschiedenen Temperaturen sich wie diese Temperaturen verhalten müssen. Durch den auf diese Weise gewonnenen und die bei 85°.0 beobachteten Punkte wurde dann die zweite Isotherme gezogen. Es ist hierbei zunächst vorausgesetzt, dass die Isothermen bis zum Schnittpunkt der Ordinatenachse merklich geradlinig verlaufen werden; indessen dürfte das angewandte Verfahren noch auf den richtigen Verlauf der Isothermen führen, solange es sich nicht um ganz geringe Drucke handelt, auch wenn dieselben bei niedrigen Drucken einer Parallelen zur Abszissenachse sich nähern würden, da eine dementsprechende Krümmung der Isothermen bei niedrigen Drucken einen untereinander ähnlichen, mit der absoluten Temperatur proportionalen Verlauf nehmen würde.

Für die zahlenmässige Prüfung unserer Beobachtungen, sowie für Interpolationszwecke haben wir die Gleichung aufgestellt:

$$p\,v = 0.27774 \cdot \vartheta - (0.03202 - 0.000253 \cdot \vartheta) \cdot p,$$

deren Konstanten aus der graphischen Darstellung entnommen wurden: dabei bedeutet ϑ die absolute Temperatur, v das spezifische Volumen, bezogen auf das des Stickstoffs bei der Temperatur des schmelzenden Eises und dem Druck von 76 cm Quecksilber, p den Druck. Nach dieser Gleichung sind die unter „$p\,v$ ber.“ aufgeführten Werte berechnet. Wie die letzte Reihe der Tabelle zeigt, ist die Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten in Anbetracht der Verhältnisse eine gute. Bei Beobachtung Nr. 28 war offenbar ein Teil des Stickstoffs verflüssigt, und es ist bemerkenswert, dass die Isotherme bis in die nächste Nähe des Verflüssigungsdruckes ohne jedes Anzeichen einer Krümmung verläuft.

Die oben erwähnte Beziehung gestattet nun auch eine Kon-

trolle der Thermometereichung, indem sich $[\lim_{p=0} p\,v]_\vartheta : [\lim_{p=0} p\,v]_{273.04}$ verhalten muss wie $\vartheta : 273.04$. Es mag daran erinnert werden, dass diese Beziehung nicht nur von der kinetischen Gastheorie gefordert wird, sondern auch experimentell mit einem hohen Grade von Genauigkeit geprüft ist, indem Chappuis[1]) für den Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten des Stickstoffs zwischen 0° und 100° fand: $\lim_{p=0} \alpha = 0.0036612$, $\lim_{p=0} \beta = 0.0036613$, in naher Übereinstimmung mit den entsprechenden Werten des Wasserstoffs: $\lim_{p=0} \alpha = 0.0036625$, $\lim_{p=0} \beta = 0.0036624$. Berechnet man nach jener Beziehung ϑ, so ergibt sich, dass die Skala des Platinthermometers I im Bereich der flüssigen Luft um ca. $^2/_{10}$ Grade zu hoch zeigt.

Nr. der Versuche	Absolute Temp.	Druck in cm Hg.	$p\,v$ beob.	$p\,v$ ber.	Differenz in ‰
1, 8	84°98	82.20	22.751	22.736	+ 0.7
2, 8	85.14	95.34	644	645	± 0
3, 8	21	108.69	521	526	— 0.2
4, 8	39	132.38	342	334	+ 0.4
5, 8	84.56	108.61	316	329	— 0.6
6, 8	70	94.98	527	516	+ 0.5
7, 8	78	81.86	591	680	— 3.9
10, 9	80.97	45.78	21.976	21.959	+ 0.8
11, 9	81.01	56.03	857	852	+ 0.2
12, 9	06	73.47	687	667	+ 0.9
13, 9	09	56.17	853	874	— 1.0
14, 9	14	45.84	22.010	22.008	+ 0.1
15, 18	19	24.90	313	263	+ 2.2
16, 18	27	40.58	151	106	+ 2.0
17, 18	32	24.83	288	301	— 0.6
20, 19	35	15.79	316	413	— 4.3
21, 19	43	26.01	328	319	+ 0.4
22, 19	44	15.85	449	438	+ 0.5
23, 19	49	26.10	358	335	+ 1.0
24, 19	51	15.84	359	458	— 4.4
25, 32	58	81.47	21.720	21.729	— 0.4
26, 32	61	94.06	601	594	+ 0.3
27, 32	62	107.29	440	446	— 0.3
28, 32	66	119.98	19.244	314	— 97.2
29, 32	69	107.09	21.469	470	± 0
30, 32	71	94.05	616	625	— 0.4
31, 32	75	81.56	789	774	+ 0.7

[1]) P. Chappuis, Rapp. prés. au Congr. de Phys. à Paris, I. p. 131–147. 1900.

Hymenopteren Amazoniens.

Von **W. A. Schulz.**

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Seit durch Bates die Aufmerksamkeit auf die farbenprächtige und unvergleichlich vielgestaltige Insektenwelt des weiten, vom Amazonenstrom bewässerten Tieflandes gelenkt wurde, ist das Interesse an dieser eigentlich nie wieder erloschen. Immer neue Forscher und Sammler sind ausgezogen, um die Kerbtierschätze dieses Gebiets zu erschliessen, und dabei haben die Systematik nicht nur, sondern auch die Tiergeographie, die ohne die minutiösesten systematischen Vorarbeiten nicht denkbar ist, und ebenso die Biologie gewonnen. Freilich, die veröffentlichten Ergebnisse betreffen zum überwiegenden Teile die nun einmal stets bevorzugten Coleopteren und namentlich Lepidopteren, während die anderen Insektenordnungen, insbesondere auch die doch biologisch am allerinteressantesten Hymenopteren noch wenig durchgearbeitet sind. Erst in neuester Zeit macht sich in dieser Hinsicht ein Wandel bemerkbar. So sind von Fox in den Jahren 1897—99 verschiedene Hymenopteren-Familien aus der grossen, vornehmlich in der Gegend von Santarem an der Mündung des Tapajoz und in Mattogrosso zusammengebrachten Ausbeute des Amerikaners Herbert H. Smith, eines Schülers von Louis Agassiz, bearbeitet worden, und seit 1900 liefert uns der emsige österreichische Hymenopterolog Adolf Ducke fortlaufend dankenswerte Bereicherungen unserer Kenntnis von der Fauna des unteren Amazonenstroms. Sehr wenig bekannt und, min-

destens in der Neuzeit, noch gar nicht in Bearbeitung genommen, ist jedoch die Immenfauna des oberen Stromes.

Bei dieser Lage der Dinge, und da ich selbst mich seit langem speziell mit der Fauna Amazoniens beschäftige, gereichte es mir zu grosser Befriedigung, vom Konservatorium der Münchener zoologischen Staatssammlung mit der Sichtung und Durcharbeitung einer dort aufbewahrten hymenopterologischen Sonderkollektion betraut zu werden, die von keinem Geringeren als Henry Walter Bates selbst herrührt. Wie nämlich dieser berühmte Reisende in seinem klassischen Buche „The Naturalist on the Amazons River“ selbst berichtet, hat er auf seinen elfjährigen Wanderungen (1848—59) die Gewohnheit gehabt, von allen erbeuteten Insektenformen mindestens je ein Paar für seine eigene Sammlung aufzubewahren. Wenn nun auch ein Teil dieser seiner Privat-Hymenopterensammlung, ebenso wie seine Sammlungen der anderen Insektenordnungen, schon bei seinen Lebzeiten in andere Hände übergegangen sein mag, so wird Bates doch den Grundstock zurückbehalten haben, und dieser ist es m. E., der in der oben erwähnten Sondersammlung vorliegt, die nach dem Tode ihres Besitzers durch Kauf auf Umwegen an das Münchener Museum gelangte.

In den folgenden Blättern veröffentliche ich nun die Ergebnisse meiner Studien, die nur erst etwa den dritten Teil der in Rede stehenden Ausbeute begreifen, indes hoffe ich, dass es mir später möglich sein wird, die begonnene Arbeit zu Ende zu führen.

Der wissenschaftliche Wert des Bates'schen hymenopterologischen Nachlasses wird leider dadurch etwas herabgemindert, dass nur ein Teil der vorhandenen Exemplare Etiketten mit genauen Fundortsbezeichnungen, wie Pará (dafür schreibe ich nachstehend der Eindeutigkeit halber stets Belem oder Belem do Pará), Santarem, Obidos, Ega, São Paulo d'Olivença etc. trägt, viele andere aber nur mit winzigen quadratischen Zetteln in mehreren Farben versehen waren, die offenbar ebenfalls jeweils bestimmte Orte in Bates' Reiseroute bezeichneten, welche

jedoch, ist das Geheimnis dieses Forschers geblieben. Solche Stücke führe ich nur als vom „Amazonenstrom" oder, dem englischen Beispiele folgend, kurzweg „Amazon" stammend an. Nichtsdestoweniger ist die Sammlung, abgesehen von ihrem rein historischen Interesse und von den zahlreichen, darin enthaltenen Neuheiten, von denen hier nur erst wenige beschrieben werden konnten, wegen der wirklich vorhandenen exakten, entomogeographisch wichtigen Lokalitätsangaben, sodann aber auch noch aus einem anderen Grunde sehr wertvoll. Eine Menge der durch Bates gesammelten Hautflügler ist nämlich wohl schon in den fünfziger bis siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts von Smith und Walker nach Exemplaren des Britischen Museums in London beschrieben worden, jedoch fast durchweg in einer Weise, dass sich nach den Diagnosen dieser Bearbeiter die Tiere nie oder kaum, jedenfalls sehr selten mit absoluter Sicherheit erkennen lassen. Dies liegt daran, dass die genannten Autoren in ihren Beschreibungen zumeist nur die Färbung schildern, die gerade für die Systematik der Hymenopteren von ganz untergeordneter Bedeutung ist, während die für die Wiedererkennung der Formen ausschlaggebenden skulpturellen und plastischen Verhältnisse von ihnen viel seltener Berücksichtigung finden. Der gründliche Systematiker also, der sich nicht damit begnügen will, die Smith'schen und Walker'schen Beschreibungen einfach zu ignorieren, wie es vielfach geschieht, ist auf das Studium der Typen angewiesen, und diese sind ihm unzugänglich, es sei denn, dass er eine Reise zum Britischen Museum macht, denn dessen Verwaltung verschickt bekanntlich entgegen aller internationalen Gepflogenheit Typen grundsätzlich nicht. Hieraus erklärt sich zur Genüge, dass die meisten, von den vorhin angeführten beiden englischen Autoren aufgestellten Arten bis heute immer nur als toter Ballast in der Literatur fortgeschleppt wurden. Eine ganze Anzahl dieser obscuren Namen erscheint nun aber in dem Nachlasse von Bates, und die mit ihnen versehenen Stücke stellen gewiss Cotypen dar, jedenfalls decken sie sich alle vollkommen mit den jeweiligen, bisher

undeutbaren Originalbeschreibungen. Auf solche Weise konnte ich z. B. schon Pison flavopictum Sm. ausgraben und der richtigen Gattung Scapheutes einverleiben.

Getreu dem in meinen früheren Arbeiten befolgten Prinzipe, gebe ich auch hier Zitate nur von Abhandlungen, die später als die jeweiligen Bände von Dalla Torres grossem Immenkataloge erschienen sind, oder nur dann, wenn eine vollständige Umgestaltung der Synonymenreihe erforderlich wird.

Den Herren Prof. Dr. R. Hertwig, erstem, und Dr. F. Doflein, zweitem Konservator der Münchener zoologischen Staatssammlung, fühle ich mich für das mir bewiesene unbegrenzte Vertrauen und Wohlwollen zu Dank verpflichtet, den ich auch an dieser Stelle zum Ausdruck bringe.

Ampulicidae.

Ampulex Hellmayri nov. sp.

♀. Long. corp.: 13—16, alae antic. 7,5—9 mm.

Affinis A. micanti Kohl, sed differt vertice latiore, punctatura crassa verticis et occipitis densiore, dentibus lateralibus segmenti mediani corni — nec coniformibus alisque brevioribus, anticis fumato — subfasciatis.

Corpus breve, relate robustum. Clipei crista mediana vomeriformis in dimidio basali fere recta, deinde leviter arcuatim deflexa, antice dente acuto instructa. Margo clipei lateralis ultra angulum interiorem inferiorem oculorum, ex eorum marginis inferioris dimidio oritur, ad apicem cristae medianae utrinque obtuso-bidentatus. Oculorum marginis inferioris dens medianus deest. Orbitae interiores ad verticem paululum convergunt, fere parallelae. Oculi latitudine verticis, intra orbitas mensa, longiores in vertice antennarum flagelli articulorum 1 + 2 longitudine inter se distant.

Occiput pone oculos sat prolongatum, retrorsum angustatum, depressione mediana haud conspicua, margine acuto

nec limbi collaris angusti instar reflexo. Frontis carinae laterales acutae, inter se sat remotae, parallelae, ad apicem paululum arcuatae in dimidia parte distantiae suae ab ocello anteriore evanescunt; carina mediana fere obsoleta. Ocelli posteriores ab oculis tertia parte longitudinis flagelli articuli secundi distant. Frons, vertex, occiput et tempora crasse denseque rugoso-punctata; solum in occipitis depressione centrali punctatura sparsior est. Tempora tuberculo haud instructa. Antennae robustae, flagelli articulus tertius triplo longior quam in medio crassior.

Collare aeque longum ac postice latum, hic in tuberculum validum coniformem productum, antice depressum, utrinque tuberculatum, sulco mediano parum distincto tuberculi posterioris culmen attingente. Collare supra, praecipue in depressione antica transverse rugoso-strigatum, postice et in lateribus sparsim crasseque punctatum, in declivitate postica tuberculi posterioris glabrum. Dorsulum, scutellum et postcutellum punctis sparsis at crassissimis, tantum intra dorsuli sulcos duos longitudinales magis confluentibus. Sutura episternalis haud valde conspicua. Mesopleurae sparse et crasse punctatae. Metapleurae glabrae. Alae subhyalinae, modice longae, anticae abdominis segmenti 2. (3. Kohlii) marginem posteriorem vix superantes, ad venam basalem, in cellulis radiali, cubitali secunda et discoidali secunda affumatae, subbifasciatae. Cellulae cubitales tres clausae. Distantia puncti, ubi vena transverso-cubitalis tertia cellulam radialem attingit, ab apice cellulae radialis longitudinem venarum transverso-cubitalium primae aut secundae circiter aequat.

Pedes robusti, tibiae III postice crasse rugoso-punctatae. Tarsi III articulus penultimus ultimum e basi sua emittens, longitudine articuli praecedentis aut dimidii ultimi. Unguiculi fere bifidi.

Segmentum medianum latius quam in medio longius, postice utrinque dente valido, corniformi, ut in A. surinamensi Sauss., munitum. Carinae segmenti mediani 3 et

4 approximatae, inter se in medio paullo minus quam a carinis 2 aut 5 distant; eiusdem segmenti declivitas postica et latera reticulato-rugulosa. Abdominis segmenti 2. (3. Kohlii) dorsum in medio latius quam longius.

Resplendenti-viridis, supra cyaneo-lavata. Antennarum flagelli articulus secundus in dimidio apicali nec non articuli insequentes nigri. Pilositas corporis albida sparsa, densior in pro- et mesothorace, in lateribus apiceque segmenti mediani; in pronoto, dorsulo et scutellis pili sparsi validiores exstant.

Hab. Teffé et (?) São Paulo d'Olivença, ad ripam meridionalem fluminis Amazonum superioris.

2 ♀♀ aus Teffé und fraglich São Paulo d'Olivença gehören zu einer A. micans Kohl nahestehenden Art, unterscheiden sich aber von dieser sofort durch breiteren Scheitel, dichtere Punktierung auf Scheitel und Hinterhaupt, horn-, nicht kegelförmige Seitendorne des Mittelsegments sowie durch kürzere Flügel, deren vordere zwei durch rauchige Trübung entstandene Querbinden angedeutet haben.

Allgemeine Körpergestalt kräftig, gedrungen. Die pflugscharförmige Kopfschildkante an der Basalhälfte geradlinig, an der Endhälfte leicht bogenförmig nach unten verlaufend und in einen ziemlich spitzen Zahn endigend. Die Kopfschildseitenränder gehen jenseits der inneren unteren Augenecke von der Mitte des unteren Augenrandes ab und zeigen jederseits neben dem Endzahne der Mittelkante zwei stumpfe Zähne. An der Mitte des unteren Augenrandes fehlt ein Zahn, wie er dort bei A. neotropica Kohl vorkommt. Die inneren Augenränder nach dem Scheitel zu nur wenig geneigt, fast parallel. Die Netzaugen sind beträchtlich länger als die Breite des Scheitels, zwischen den inneren Augenrändern gemessen; der Abstand jener auf dem Scheitel beträgt die Länge des 1. + 2. Fühlergeisselgliedes. Der Kopf ist hinter den Augen reichlich verlängert und nach hinten verschmälert, sein Hinterrand ist zwar scharf abgesetzt, jedoch nicht zu einem förmlichen Halskragen aufgebogen; der Längseindruck in der Mitte des Hinterhaupts

ist nicht besonders stark ausgeprägt. Seitenkiele der Stirn scharf, von einander ziemlich weit entfernt, parallel, nur am Ende ein ganz klein wenig bogenförmig verlaufend; in der Mitte der Höhe bis zum vorderen Nebenauge erlöschen sie. Mittelkiel so gut wie nicht ausgeprägt. Die hinteren Nebenaugen stehen um $^1/_3$ der Länge des 2. Geisselgliedes voneinander ab. Stirn, Scheitel, Hinterkopf und Schläfen dicht und grob runzlig punktiert; diese Punktierung ist nur in dem Längseindrucke hinter den Nebenaugen spärlicher. Auch die Kopfunterseite (Kinngegend) ist grob punktiert, jedoch stehen die Punkte hier nicht so dicht und sind auch nicht runzlig zusammengeflossen. Eine kegelförmige Auftreibung an den Schläfen, wie sie bei A. sikkimensis (Krchb.) vorkommt, fehlt. Die Fühler sind kräftig, das 3. Geisselglied ist etwa 3 mal so lang als in der Mitte dick.

Collare so lang als hinten breit und hier zu einem starken kegelförmigen Höcker erhoben, vorn mit einem ziemlich tiefen Eindruck, zu dessen beiden Seiten je ein Höcker emporragt. Eine Mittelfurche ist angedeutet, und sie erstreckt sich bis auf die Höhe des hinteren Höckers. Auf seiner Oberfläche, namentlich in dem Eindrucke vorn, weist das Collare entschiedene Querriefen auf, an dem hinteren Höcker und an den Seiten stehen nicht sehr dichte, grobe Punkte; der hintere Abhang des Hinterhöckers ist glänzend glatt. Das Dorsulum und die beiden Schildchen sind mit zerstreuten, sehr groben Punkten besetzt, die nur zwischen den beiden, übrigens ziemlich undeutlichen Längsfurchen des Dorsulums und am Hinterschildchen enger aneinander stehen. Episternalnaht der Mesopleuren in der Form einer kurzen, von den Schulterbeulen nach unten gehenden und dort bald verschwindenden, wenig deutlichen Punktfurche ersichtlich; eine Abzweigung von ihr nach den Mittelhüften zu, wie sie bei gewissen Ampulexarten auftritt, fehlt. Mittelbrustseiten mit groben, nicht besonders eng aneinander gerückten Punkten bestanden, zwischen den Punkten glatt und glänzend. Metapleuren glänzend glatt. Flügel fast glashell, von mässiger Länge, die vor-

deren gehen über den Hinterrand des 2. (nach Kohls Zählweise 3.) Hinterleibssegments kaum hinaus und sind durch rauchige, wenn auch matte Trübung, die sich einerseits längs der Basalader, andererseits durch die Radialzelle, zweite Kubital- und zweite Diskoidalzelle erstreckt, wie mit 2 Querbinden ausgestattet.

Drei geschlossene Kubitalzellen. Die 3. Kubitalquerader mündet an der Radialader in einem Abstande von der Spitze der Radialzelle, der etwa der Länge der 1. oder 2. Kubitalquerader gleichkommt. Beine von kräftiger, gedrungener Form; Schienen III hinten grob runzlig punktiert. Mittelhüften wie bei allen bekannten Arten dieser Gattung mit alleiniger Ausnahme von A. sikkimensis (Krchb.) nicht durch eine breite Leiste, sondern nur durch eine dünne Scheidewand von einander getrennt. Schienen III hinten grob runzlig punktiert. Das vorletzte Tarsenglied, an dessen Basis das letzte eingefügt ist, in seiner ganzen Länge genommen, reichlich so lang als das drittletzte und halb so lang als das Endglied. Klauen fast bifid.

Mittelsegment mitten breiter als in der Mitte lang, an den Hinterecken mit je einem einzigen kräftigen, hornartigen Zahnfortsatz, wie bei A. surinamensis Sauss. Kiel 3 und 4 genähert, in der Mitte etwas weniger von einander abstehend als 3 von 2 oder 4 von 5. Abfallender Teil und Seiten des Mittelsegments mit netzartiger Runzelstreifung. Die Rückenplatte des 2. (nach Kohl 3.) Hinterleibsringes ist mitten breiter als lang, die Bauchplatte zeigt die stärkste Wölbung im ersten Drittel.

Glänzend grün, auf der Oberseite blau-violett überwaschen. Fühlergeissel von der Mitte des 2. Gliedes an schwarz, matt. Die weissliche Körperbehaarung ist im allgemeinen sparsam und nur an der Vorder- und Mittelbrust sowie an den Seiten und am Ende des Mittelsegments dichter. Auf dem Collare, Dorsulum und den Schildchen ragen einige stärkere Borstenhaare empor.

Ich benenne diese prachtvolle Art nach Herrn Dr. C. E.

Hellmayr, dem Ornithologen am Münchener Museum und ebenso begeisterten wie kritischen Kenner der neotropischen Vögel. Die Typen befinden sich in der Münchener Staatssammlung.

Es ist nicht unmöglich, dass das Stück aus Teffé von demjenigen mit der fraglichen Fundortsbezeichnung São Paulo d'Olivença später subspezifisch abgetrennt wird, da es gegen die obige Beschreibung einige, freilich geringe Abweichungen bietet, die sich vielleicht durch die Herkunft von einer verschiedenen Lokalität erklären. Es ist kleiner als das ♀ von São Paulo d'Olivença, hat mehr goldgrüne Grundfärbung mit geringerem blauen Schimmer auf der Oberseite und Kiel 2 des Mittelsegmentrückens ist von 3 kaum weiter, als 3 in der Mitte von 4 entfernt. Auch sind beim ♀ von Teffé die hornartigen Fortsätze der Hinterecken des Mittelsegments verhältnismässig kürzer und stumpfer als bei der Partnerin. Es wird aber ratsam sein, ehe in ein so vertieftes Studium eingetreten wird, zu warten, bis sich von den so seltenen Ampulexen in den europäischen Museen und Sammlungen erst ein weit grösseres Material und vor allen Dingen auch mit viel genaueren Fundortsangaben, als bisher vorhanden, aufgehäuft hat.

Von Ampulex micans Kohl war bisher zweifelhaft, ob diese Spezies aus Australien oder Mejico stammt. Nach der Heimat der nächstverwandten A. Hellmayri zu schliessen, dürfte wohl Mejico das Vaterland sein.

Durchläuft man, um A. Hellmayri aufzusuchen, Kohls Tabelle, so gelangt man zwanglos bis Einteilungsgrund 31, Absatz 2 (S. 479), hier aber stimmt schon der Schlusssatz: „Hinterschienen hinten glatt etc." nicht. Die Hauptunterschiede nun zwischen meiner Art und den nächstverwandten mögen, soweit das weibliche Geschlecht in Betracht kommt, in der folgenden Tabelle veranschaulicht werden:

1. Die Seitenränder des pflugscharförmigen Kopfschildes gehen von der inneren unteren Augenecke ab. Vorletztes Tarsenglied der Hinterbeine entschieden kürzer als das halbe Endglied, auch beträchtlich kürzer als das drittletzte. (Hinter-

schienen hinten glatt. Seitendorne des Mittelsegments kegelförmig. Flügel bräunlich getrübt. Länge 24—33 mm. Bekanntes Vorkommen: Chiriqui.) A. neotropica Kohl

— Die Seitenränder des pflugscharförmigen Kopfschildes gehen jenseits der inneren unteren Augenecke vom unteren Augenrande, manchmal von dessen Mitte, ab. Vorletztes Tarsenglied der Hinterbeine entschieden so lang, bisweilen sogar etwas länger als das halbe Endglied, auch nahezu so lang oder länger als das drittletzte Fussglied 2

2. Seitendorne des Mittelsegments verhältnismässig lang, hornförmig. Collare dreihöckerig, mit oder ohne vertiefte Längslinie. Hinterschienen hinten glatt oder dicht grob punktiert 3

— Seitendorne des Mittelsegments nicht besonders lang, kegelförmig. Collare mit nur einem Höcker, am Hinterrande, stets mit einer linearen Längsvertiefung in der Mitte. Hinterschienen hinten glatt, höchstens mit weit von einander abstehenden Punkten 5

3. Der geringste Abstand der Netzaugen auf dem Scheitel beträgt nur ²/₃ der Länge des 2. Fühlergeisselgliedes. Drittes Geisselglied etwa 4 mal so lang als mitten dick. Die Vorderflügel überragen die Rückenplatte des 2. (nach Kohl 3.) Hinterleibssegmentes. Collare glatt und glänzend, nur hier und da ist ein Punkt sichtbar. Vorderflügel bräunelnd getrübt. Hinterschienen hinten glatt, höchstens mit wenigen Punkten. Länge 22—27 mm. Bekannte Verbreitung: Surinam, „Amazonien"
A. surinamensis Sauss.

— Der geringste Netzaugenabstand auf dem Scheitel beträgt mindestens ³/₄ der Länge des 2. Geisselgliedes. Drittes Geisselglied höchstens etwa 3,5 mal so lang als mitten dick. Die Vorderflügel überragen kaum die Rückenplatte des 2. (Kohl'schen 3.) Hinterleibssegmentes 4

4. Collare glatt und glänzend, ohne Punkte und Runzeln und ohne mittlere Längslinie. Scheitel, Hinterhaupt und Schläfen mit Ausnahme der Nähe der Oberkieferbasis glatt,

mit nur vereinzelten Punkten. Flügel bräunelnd getrübt. Hinterschienen hinten glatt, höchstens mit wenigen Punkten. Länge 16—20 mm. Bekannte Verbreitung: „Brasilien"
A. minor Kohl

— Collare runzelstreifig und grob punktiert, mit mittlerer Längslinie. Scheitel, Hinterhaupt und Schläfen überall dicht und grob punktiert. Flügel bis auf zwei in den Vorderflügeln angedeutete Querbinden fast glashell. Hinterschienen hinten dicht und grob runzlig punktiert. Länge 13–16 mm. Bekannte Verbreitung: Südufer des oberen Amazonenstroms
A. Hellmayri Schlz.

5. Schläfen mässig dicht, grob punktiert. Collare mit einigen unbestimmten Querrunzeln und einer etwas sparsamen, jedoch deutlichen Punktierung, die auch zur Seite auftritt; die vertiefte mittlere Längslinie reicht nur bis zum niederen kegelförmigen Höcker zurück. Flügel gleichmässig, aber nur sehr schwach getrübt, ohne Querbinde. Länge 15 mm. Bekannte Verbreitung: Mejico (?) A. micans Kohl

— Schläfen glänzend, mit wenigen Pünktchen. Collare oben mit deutlichen Querriefen zu beiden Seiten der Längslinie, nur hie und da mit einem Punkte ausgestattet, seitwärts ohne Punkte; die lineare Längsvertiefung in der Mitte reicht bis auf die Spitze des kegelförmigen Höckers. Die Flügel zeigen eine etwas stärkere Trübung in der Radial-, zweiten Kubital- und zweiten Diskoidalzelle, so dass die Neigung zu einer Querbindenbildung ausgesprochen ist. Länge 15,5 mm. Vaterland noch gänzlich unbekannt A. sagax Kohl.

Sphecidae.

Podium (Dynatus) nigripes Westw.

Sceliphron nigripes Ducke, Zeitschr. f. syst. Hym. u. Dipterol., I, 1901 p. 242 (Belem u. Insel Marajó)

P. (D.) n. Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 28.

Aus der Gattung Podium Fabr., deren Arten durchweg selten und auch in den grössten Sammlungen stets nur in

wenigen Exemplaren vertreten sind, liegt in dem Bates'schen Nachlasse die immerhin stattliche Zahl von 25 Stücken in 12 verschiedenen Formen vor.

Der Riese der Gruppe, nigripes ist unter 6 verschiedenen Namen beschrieben worden, bis diese alle im letzten Jahre von Kohl unter der erwähnten ältesten Bezeichnung zusammengezogen wurden. Ganz gereinigt ist die Nomenklatur aber doch noch nicht, denn die Form Spinolae Lep., die von letztgenanntem Autor als „Varietät" zu nigripes Westw. gezogen wird, hat in Wirklichkeit wohl subspezifischen Rang, so zwar, dass die gelbflüglige Form nigripes nigripes, die schwarzflüglige nigripes Spinolae heissen muss. Ich komme darauf deshalb, weil mir von beiden je 1 Pärchen vorliegt, merkwürdigerweise nun aber dasjenige von nigripes aus Teffé, von Spinolae aus Santarem stammt. Ob dieses Verhältnis immer statt hat, d. h. ob jene Form ausschliesslich am oberen Amazonenstrom mit andinischer Fauna, diese hingegen nur immer an dessen mittlerem und unterem Laufe mit zentralbrasilianisch-guianischer bezw. küstenbrasilianischer Fauna, vorkommt, entzieht sich heute noch unserer Kenntnis, und es wird erst reichhaltigeren Materials bedürfen, um in diese Frage Klarheit zu bringen. Inzwischen erscheint mir das, was bislang über die Verbreitung der fraglichen beiden Subspezies bekannt geworden, recht instruktiv:

P. (Dynatus) nigripes nigripes,

Britisch-Guiana (ob nur weiter im Innern?), Surinam (2 ♂ 3 ♀ im Münchener Museum), Teffé am Südufer des oberen Amazons;

P. (Dynatus) nigripes Spinolae,

Orizaba in Mejico, Santarem an der Mündung des Tapajoz, Catamarca in Argentinien, Rio de Janeiro, Pará.

Beide vorerwähnten Paare vom Amazon stehen auch sonst noch in einem merkwürdigen Verhältnisse zu einander, insofern, als bei demjenigen von nigripes nigripes das ♂ kleiner als das ♀ ist, während umgekehrt bei dem Paare von nigripes Spinolae das ♂ das andere Geschlecht an Körpermasse bedeutend über-

trifft. Dieses Verhältnis scheint durchweg platz zu greifen, denn bei den vorhin angeführten Exemplaren von P. nigripes nigripes aus Surinam sind beide ♂♂ auch kleiner als die 3 ♀♀, und bei dem einzigen Paare derselben Form im Dresdener Museum (aus „Brasilien“), das ich kürzlich dort einsah, stehen die Geschlechter in demselben Grössenverhältnisse zu einander.

Als Autor von dem in die Synonymie zurückgetretenen P. giganteum, im III. Band von Schomburgks Reisen in Britisch-Guiana beschrieben, darf nicht Klug stehen, obwohl dieser in dem Werke selbst als solcher genannt ist, vielmehr Erichson, der die Insekten darin bearbeitete.

Podium (Trigonopsis) affine Sm.

Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902, p. 33.

Eine Reihe von 4 ♀♀, wovon 3 aus Teffé und 1 aus São Paulo d'Olivença stammt, entspricht der typischen von Pará beschriebenen Form mit ausgedehnter roter Färbung der Beine. Erwähnenswert scheint mir an dieser Reihe die wechselnde Länge des Hinterleibsstiels. Von Kohl wird diese als ein wenig kürzer denn der Metatarsus der Hinterbeine angegeben, was bei dem Stücke aus São Paulo d'Olivença auch zutrifft, bei 2 Exemplaren von Teffé ist sie dagegen gleich lang dem Metatarsus und bei dem letzten von Teffé sogar entschieden länger als dieser, etwa um ein Drittel der Länge des darauffolgenden Gliedes. Auch die Art der Randbezahnung am Kopfschildmittelteile ist sehr variabel. Völlige 7 Zähne, wie sie theoretisch vorhanden sein sollen, finden sich eigentlich an keinem meiner Exemplare, sondern nur 5. Dies liegt daran, dass der neben den grossen Randzähnen stehende Zahn die Neigung hat, zu obliterieren, und so ist er bei einem Stücke aus Teffé eben noch angedeutet, bei den übrigen 4 hingegen nicht mehr zu bemerken.

Die rote Beinfarbe unterliegt ebenfalls beträchtlichen Schwankungen; an einem ♀ aus Teffé sind die Schienen I sowie Schienen und Tarsen II hinten schon ganz verdunkelt, während an den übrigen 3 ♀♀ Beinpaar I und II grösstenteils rotgelb sind. Diese Verdunkelung erreicht den höchsten Grad

bei der Form intermedius Sauss., die wohl sicher in subspezifischem Verhältnisse zu affine Sm. steht. Die beiden Subspezies verbreiten sich dann nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse folgendermassen:

P. (Trigonopsis) affine affine Sm.

Belem do Pará, Teffé, São Paulo d'Olivença,

P. (Trigonopsis) affine intermedium Sauss.

Guiana (ob mehr an den Küstenstrichen oder im Innern, muss erst die Zukunft lehren).

Podium (Trigonopsis) abdominale Pty.

! Perty, Delect. anim. artic. Brasil., 1833, p. 142, tab. 27, fig. 18

Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 36.

Der Typus dieser Art ist noch im Münchener Museum vorhanden; er stellt ein ♀ von 21 mm Körperlänge, mit fast durchaus dunklen, metallischblau glänzenden Beinen dar, an denen eigentlich nur die Vorderschienen am Anfang und Ende sowie die Vordertarsen eine rötliche Aufhellung zeigen. Die Zeichnung des Kopfschildes auf der Perty'schen Tafel ist ein Phantasiegebilde; in Wirklichkeit ist dieser Teil natürlich in der Mitte seines Vorderrandes mit 5 kräftigen Zähnen bewehrt, wovon der mittelste am kleinsten und die seitlichen am grössten sind.

Stücke mit solcher Beinfärbung, bei denen aber die Aufhellung der Vorderbeine zum Teil schon weiter vorgeschritten ist, konnte ich 3 weibliche, 2 von Belem do Pará und 1 von Teffé untersuchen. Von einem vierten ♀ aus Belem do Pará blieb es wegen fehlenden Hinterleibes ungewiss, ob es zu dieser Form oder zu P. (Trigonopsis) resplendens Kohl bezw. violaceum Sm. zu ziehen sei.

Ein weiteres Pärchen nun, das Etiketten mit der vagen Herkunftsbezeichnung „Amazonas" trägt, hat nicht nur Beinpaar I, sondern auch fast das ganze Beinpaar II rostgelb gefärbt und repräsentiert somit die Form soror Mocs. Da diese aber die merkwürdige Verbreitung: São Paulo, „Brasilien", Perú (nach Kohl) und „Amazonas" (s. obenstehend) haben soll,

so bin ich noch im Zweifel, ob wir es hier mit einer geographischen Lokalrasse oder Subspezies oder einer bloss zufälligen Farbenaberration von abdominale zu tun haben. Oder sollte es vielleicht statt São Paulo richtig „São Paulo d'Olivença" heissen? Ähnlich steht es mit einer dritten Form, Cameronii Kohl (= olim violaceum Cam.), die nur durch dunkles metallischblaues Abdomen von der letztgenannten unterschieden ist und in San Juan in Guatemala, Chiriqui, Bogotá — also in einem zur Aufstellung einer Subspezies vortrefflich geeigneten Verbreitungsgebiet, seltsamerweise nun aber auch noch in Cayenne (nach Kohl) heimaten soll. Ich zweifle zwar nicht im geringsten daran, dass abdominale Pty., soror Mocs. und Cameronii Kohl nur als Subspezies aufzufassen sind; ehe sie aber formell als solche proklamiert werden, dürfte es sich empfehlen zu warten, bis noch mehr und vor allem präzisere Fundorte für jede einzelne Form bekannt werden.

Das ♂ von P. abdominale ist noch ungenügend bekannt, es mögen deshalb die für die heutige Betrachtungsweise charakteristischen Merkmale nach dem oben erwähnten ♂ von soror hier Platz finden:

Wie Kohl richtig bemerkt, stimmt abdominale ♂ mit demjenigen von affine Sm. mehr denn mit violaceum Sm. überein. Die Mandibeln sind entgegen de Saussures Angabe nicht „prope apicem ut fractae", vielmehr einfach, fast gerade und nur nach der Spitze hin schwach sichelförmig gebogen. Beim Enddrittel des Innenrandes weisen sie weder einen Einschnitt noch vor ihrer Basis innen einen Zahn auf.

Der Kopfschildmittelteil ist, wie bei affine ♂, sehr tief, halbkreisförmig ausgebuchtet und die Ausbuchtung beiderseits von einem kräftigen dornenförmigen, spitzen Zahn begleitet. Verschmälerung des Kopfes hinter den Augen nicht geringer als beim ♀, jäh, im Gegensatz zu P. affine. Der Abstand der hinteren Nebenaugen vom scharfen Hinterhauptsrande beträgt in der Projektion gut die Länge des 1. + 2. Geisselgliedes. Abstand der Netzaugen auf dem Scheitel kaum geringer als am Kopfschilde; hier ungefähr gleich der

Länge des 2. + halben 3. Geisselgliedes. Dorsulum zerstreut, nicht gerade grob punktiert. Der Hinterleibsstiel ist nur mässig nach unten gebogen, so ziemlich walzig, nach hinten zu weder depress noch verbreitert. Er übertrifft den Metatarsus der Hinterbeine etwa um $^2/_3$ der Länge des darauffolgenden Gliedes.

Podium (Parapodium) biguttatum Tschbg.

Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 45.

Von Texas an durch Mejico und Zentral-Amerika verbreitet, von Südamerika nur erst aus „St. Paul, Brasilien" bekannt, wobei dahingestellt bleibt, ob darunter São Paulo in Südbrasilien oder São Paulo d'Olivença am oberen Amazonenstrom zu verstehen ist. Als neuen Fundplatz kann ich das altberühmte Ega (Teffé) am oberen Amazon beibringen, woher 1 ♀ stammt, das mit der von Kohl für diese Spezies gegebenen Charakteristik übereinstimmt, nur finde ich die Netzaugenabstände etwas grösser, am Scheitel nämlich gleich der Länge des 2. Fühlergeisselgliedes und am Kopfschilde gleich derjenigen des 2. + $^1/_3$ des 3. Geisselgliedes. Die Endränder der Hinterleibsringe sind an meinem Stücke blass, farblos, und dessen Körperlänge beträgt 18, die Flügelspannweite 22 mm.

Podium (Parapodium) Batesianum nov. sp.

♂. Long. corp. 14,5, extens. alar. 19 mm.

Gracile, nigrum, leviter cyanescenti-opalizans. Abdomen pedesque ex parte rufi.

Alae hyalinae, iridescentes, fumato-maculatae ut in P. biguttato Tschbg. Mandibulae oculis breviores, piceae, apicem versus clariores, dente basali interno carent. Clipei pars media prominens, excisura profunda bidentata, pars lateralis integra, inermis. Oculi in vertice longitudine antennarum flagelli artic. 2 di + $^2/_3$ 3 tii, in clipeo artic. 2 di + 3 tii inter se distant.

Excisura gutturalis a fovea occipitali magna ad articulationem prothoracis apta perpaullum tantum remota. Occiput pone oculos breviusculum.

Pronotum longitudine relate mediocri, collare evidenter brevius quam latius, retrorsum assurgens, haud in conum rotundatum emissum, in medio sat profunde impressum. Dorsulum collari longius. Sutura episternalis mesopleurarum exstat. Sulcus segmenti mediani ad stigma vergens fere obsoletus. Petiolus abdominis paullulum deorsum curvatus, subrectus, segm. mediani areae dorsali aut tibiae III aut metatarso postico + articulo insequenti longitudine circiter aequalis. Femora III et tibiae III aeque longa.

Frons inferior dense punctata. Vertex, occiput et tempora nitida, fere impunctata.

Collare nitidum, sparsim et fine punctatum. Dorsulum et mesothoracis latera nitida punctis profundis modice punctata. Scutellum nitidum, vix punctatum. Segmentum medianum supra longitudinaliter subcanaliculatum, antice transverse rugoso-striolatum, in medio sublaeve, politum, ad latera punctatum insuper oblique strigatum.

Pubescentia capitis et thoracis sat longa, aurea.

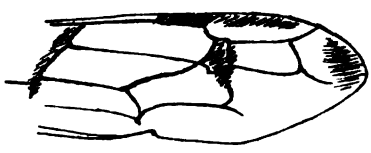
Ein einzelnes ♂ vom „Amazonenstrom", ohne exaktere Fundortsangabe, passt zu keiner der bisher bekannten Arten der Parapodium-Gruppe. Von P. agile Kohl und Friesei Kohl unterscheidet es sich besonders durch eng an den Kinnausschnitt gerückte Hinterhauptsgrube, kürzeres Collare und abweichende Proportionen von Kopf und Hinterleibsstiel, von P. biguttatum Tschbg. durch andere Bezahnung des Kopfschildvorderrandes, durch weit grössere Gesicht- und Stirnbreite, nach unten gebogenen und etwas längeren Hinterleibsstiel.

Statur sehr schlank, Bruststück und Hinterleib flach, depress. Pubescenz goldgelb, am Kopfschilde und Gesicht ist sie anliegend, an dem Collare, Dorsulum, den Schildchen, Brustseiten, an dem Vorderrande und den Seiten des Mittelsegments lang, dünn, abstehend. Auch die Basalhälfte der Beine und der Hinterleibsstiel sind mit abstehenden lichten Haaren besetzt.

Schwarz, auf Dorsulum und Mittelsegment leicht bläulich

opalisierend, Beinpaar I und II ausser Hüften, Schenkelringen, dem Anfang der Schenkel und den Endgliedern der Tarsen, ein Fleck am Anfange und die Spitze der Schenkel sowie diejenige der Schienen von Beinpaar III und das Abdomen von der hinteren Hälfte des auf den Stiel folgenden Segments ab rot. Diese rote Färbung der Beine und des Hinterleibes wird aber wohl veränderlich sein. Fühlerschaft vorn rötlichgelb, eingedrückt bezw. mitten abgeflacht, Schienensporen gleichfalls rot, Oberkiefer pechschwarz, gegen die Spitze hin heller.

Flügel fast glashell, lebhaft irisierend, genau wie bei P. biguttatum mit je einem rauchigen Wisch an der Vorderflügelspitze, dem Vorderrande der Radialzelle, in der zweiten Kubitalzelle und längs der Basalader. Vorderflügelgeäder:



Die erste Diskoidalquerader mündet an dem typischen Stücke interstitial an der ersten Kubitalquerader, wird aber wohl sonst, wie meist bei den Arten dieser Gruppe, auch an der ersten Kubitalzelle endigen. Die zweite Kubitalzelle ist in der bei der ganzen Gruppe üblichen Weise klein, an der Radialader stark verschmälert. Dritte Kubitalzelle gross, lang, an der Radialader wenig kürzer als an der Kubitalader, das Radialaderstück zwischen der 2. und 3. Kubitalquerader mehr als doppelt so lang als das Endstück der Radialader von der 3. Kubitalquerader an gerechnet. Die Axillarader der Hinterflügel bildet die Basis des Basallappenrandes, ein der ganzen Parapodium-Gruppe eigentümlicher Charakter.

Oberkiefer kürzer als die Netzaugen, innen an der Basis ohne Zähnchen. Kopfschild kurz; der vortretende mittlere Teil ist tief ausgeschnitten und der Ausschnitt von zwei starken, an der Basis breiten Zähnen begrenzt; an den Seiten zeigt der Kopfschildrand weder Ausschnitte noch Zähnchen. Fühler dünn und schlank, die Geisselglieder vom 2. ab an der Oberseite der Länge nach gekielt. Die untere Stirnfläche ist dicht punktiert. Die Gegend um die Nebenaugen, der

Scheitel, die Hinterhauptsgegend und die Schläfen glänzend, mit nur ganz vereinzelten Pünktchen. Der Kinnausschnitt rückt hart an den Unterrand der Hinterhauptsgrube heran. Die Netzaugen stehen am Scheitel um die Länge des 2. + $^2/_3$ des 3. Fühlergeisselgliedes, am Kopfschilde um die des 2. + ganzen 3. Geisselgliedes von einander ab. Der Kopf ist hinter den Augen nur bescheiden fortgesetzt.

Das Pronotum ist verhältnismässig kurz, der Kragenwulst (Collare) viel breiter als lang, er steigt nach hinten nur mässig empor und bildet oben keinen kegelförmigen Höcker, sondern besitzt in der Mitte eine starke Längsfurche. Schildchen und Hinterschildchen flach. Episternalnaht der Mittelbrustseiten vorhanden, aber nicht besonders scharf ausgeprägt. In der Skulptur stimmt das Collare so ziemlich mit dem Hinterhaupte überein, d. h. es ist glänzend und nur mit zerstreuten, wenig tiefen Punkten besetzt.

Dorsulum länger als das Collare, beinahe doppelt so lang als dieses, gleich den Seiten des Mesothorax glänzend und mit nicht allzu gedrängt stehenden tiefgestochenen Punkten besetzt. Das Schildchen ist ebenfalls glänzend und trägt nur sehr vereinzelte, feine Punkte.

Das Mittelsegment etwa $1^1/_2$ mal so lang als an der Basis breit, in der Mitte sehr seicht längseingedrückt und querrunzelstreifig. Im übrigen erscheint die Oberfläche im 2. Drittel ihrer Länge, vor der, nur schwach angedeuteten, abstürzenden Fläche und in dieser zum Teil selbst, poliert glatt, mit wenigen vereinzelten Punkten; an der Basis dagegen, den Seitenrändern und der den abschüssigen Teil begrenzenden Kante ist die Punktierung gedrängt, grob, an der Basis und den Seiten (Pleuren) geht sie in Querrunzelstreifung über. Die Stigmenfurchen sind nur von mässiger Deutlichkeit.

Hinterleibsstiel ein wenig nach unten gebogen, etwa gleich lang dem Mittelsegment, den Hinterschienen oder dem Metarsus der Hinterbeine vermehrt um die Länge des darauf-

folgenden Gliedes. Die Schenkel III sind ebenso lang als die Schienen III.

Ich weihe diese Art dem Andenken Henry Walter Bates', des Heros der Amazonforschung und genialen Entomologen, der es in dieser Teilwissenschaft aus völlig eigener Kraft vom Steinträger bis zum glänzenden Bauherrn brachte, und der, wovon ich mich selbst überzeugen konnte, im Gedächtnis der Bewohner Amazoniens, namentlich des Innern, noch heute fortlebt.

Der Typus wird in der Münchener zoologischen Staatssammlung aufbewahrt.

Interessant wird es sein, wenn wir die Parapodium-Arten erst näher kennen werden, so dass wir über ihre geographische Verbreitung einen Überblick gewinnen können. Einstweilen wird man die Männer dieser Gruppe — von P. agile Kohl ist er noch unbekannt, wenn damit nicht, was noch zweifelhaft, P. Friesei Kohl ♂ zusammenfällt — gegeneinander so abgrenzen können:

1. Der Kehlausschnitt zur Aufnahme der Mundteile ist von der Hinterhauptsgrube, in welcher der Prothorax artikuliert, weit entfernt. Pronotumwulst (Collare) ungefähr so lang als am Hinterrande breit. Dorsulum ungefähr von der Länge des Collare. Die rauchige Trübung der Vorderflügel tritt vornehmlich in der Form zweier dunkelbrauner Querbinden auf. (Seiten des Kopfschildrandes ohne Zähnchen und Ausschnitte. Der Abstand der Netzaugen auf dem Scheitel beträgt reichlich die Länge des 1. + 2. Fühlergeisselgliedes, der auf dem Kopfschilde die Länge des 2. + halben 1. Hinterleibsstiel ein wenig nach unten gebogen, ein klein wenig länger als der Metatarsus der Hinterbeine, vermehrt um die Hälfte des darauffolgenden Gliedes. Bekanntes Vorkommen: Guayaquil, Westabhang der ecuadorianischen Anden.)

P. (Parapodium) Friesei Kohl

— Der Kehlausschnitt zur Aufnahme der Mundteile reicht hart an den Unterrand der Hinterhauptsgrube, in der der Prothorax artikuliert, heran. Collare entschieden kürzer als

am Hinterrande breit. Dorsulum länger als das Collare. Die rauchige Trübung der Vorderflügel erscheint in der Form isolierter Makeln 2

2. An den Seiten des Kopfschildvorderrandes zeigt sich neben den beiden grossen Mittelzähnen, an deren Basis, jederseits eine kleine Ausbuchtung. Der Abstand der Netzaugen ist auf dem Scheitel um ebensoviel kürzer als das 2. Geisselglied, als er grösser ist denn das 3. Geisselglied lang, am Kopfschilde gleich der Länge des 1. + 2. Geisselgliedes. Hinterleibsstiel so ziemlich gerade, etwa um ein Drittel des 2. Hinterfussgliedes länger als der Metatarsus der Hinterbeine. Bekannte Verbreitung: Britisch-Columbia, Texas, Mejico, Yucatan, Nicaragua, Teffé am oberen Amazon, Südost-Brasilien, São Paulo [?] P. (Parapodium) biguttatum Tschbg.

— Seiten des Kopfschildrandes ohne Ausschnitte oder Zähnchen. Der Abstand der Netzaugen beträgt auf dem Scheitel die Länge des 2. + $^2/_3$ des 3. Geisselgliedes, am Kopfschilde die des 2. + ganzen 3. Hinterleibsstiel ein wenig nach unten gebogen, so lang als der Metatarsus der Hinterbeine, vermehrt um die Länge des darauffolgenden Gliedes. Bekanntes Vorkommen: „Amazonenstrom".
P. (Parapodium) Batesianum Schlz.

Podium fumigatum bugabense Cam.

P. fumigatum var. bugabense Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 58.

1 ♀ von Villa Nova (heute Parintins) am unteren Amazon stelle ich zu der Form P. bugabense Cam., da bei ihm der Netzaugenabstand auf dem Scheitel die Länge des 2. Fühlergeisselgliedes beträgt, und die Flügel in geringerer Ausdehnung rauchig getrübt sind als beim typischen P. fumigatum (Pty.). Die Trübung begreift die Spitzen beider Flügelpaare, ferner im Vorderflügel die Radialzelle, das äussere Fünftel der 1., die ganze 2. und die 3. Kubitalzelle mit Ausnahme einer Aufhellung in dem vorgezogenen Aussenwinkel, die äusseren Dreiviertel der 2. Diskoidalzelle mit über deren Hinter- und Aussen-

rand übergreifender Trübung, endlich die Umgebung der Medial- und 1. Submedialquerader. Eine pechrote Färbung zeigt sich auch an der Spitze der Schenkel II und an den Tarsen II. Körperlänge ca. 22 mm.

Ich nehme keinen Anstand, das eben geschilderte Stück zum bugabense zu ziehen, trotzdem bei diesem nach Camerons Abbildung in der Biologia centrali-americana die Bemakelung eigentlich nur die 2. Kubitalzelle und deren Umgebung umfasst.

Der Formenkreis des P. fumigatum enthält nach dem heutigen Stande unseres Wissens nachfolgende Subspezies:

1. P. fumigatum fumigatum (Pty.), Bahia,
2. P. fumigatum bugabense Cam., Panama, Bugaba; Guiana (vielleicht nur das Innere); Parintins, unterer Amazon,
3. P. fumigatum aureo-sericeum Kohl, Paramaribo, im weiteren vielleicht nur die Küstenzone von Guiana.

Podium brevicolle Kohl.

Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 62.

1 ♀ von 18 mm Körperlänge und 28 mm Flügelspannweite, mit 7 kräftigen Randzähnen am Kopfschildmittelteile, liegt aus São Paulo d' Olivença, am Südufer des oberen Amazonenstroms, unweit der Grenze Perús, vor.

Unter Hinzuziehung der von Kohl gemachten Fundortsangaben scheint sich diese Art in zwei mächtigen Bögen, einerseits von Mejico über Colombien bis Perú bezw. dem Tiefland östlich der peruanischen Anden, andererseits an den Küsten des nördlichen Südamerikas und Ostbrasiliens (Guiana, Pará, Bahia) verbreitet zu haben. In dem dazwischen gelegenen grossen zentralbrasilianischen Faunengebiete wird sie dann vielleicht fehlen.

Podium Goryanum Lep.

Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 69.

Von Surinam, Cayenne und Pará bekannt. Kohl gibt noch Zentralamerika als Vaterland an, was mir einstweilen fraglich erscheint.

Die Münchener Sammlung besitzt 1 ♂ vom „Amazonenstrom“, ohne nähere Lokalitätsbezeichnung, sowie ein ♀ von São Paulo d'Olivença, womit das Vorkommen der Art auch im oberen Teile dieses Stromes nachgewiesen ist. Das beregte ♀, welches auch sonst durch geringe Grösse (23 mm Körperlänge) auffällt, zeigt den bei Goryanum seltenen Fall der Interstitialität der ersten Diskoidalquerader an der ersten Kubitalquerader.

Podium flavipenne Latr. (nec Lep.)

? Sceliphron (Podium) flavipenne Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1897 p. 373

Podium flavipenne Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 84.

Es erscheint mir etwas ungewiss, ob die Fox vorgelegenen ♀♀ von Rio de Janeiro und Santarem wirklich beide flavipenne Latr. und nicht vielleicht zum Teil Goryanum Lep. waren. Der Zweifel ist deshalb gerechtfertigt, weil Fox zur Bestimmung unbedingt auch Lepeletiers Hist. Nat. Ins. Hymén. (1845) herangezogen haben muss, und in diesem Werke das Hauptunterscheidungsmerkmal beider Arten, die abweichende Zahl der Zähne am Vorderrande des Kopfschildmittelteiles, noch nicht verwandt war. Nach Ausschluss der oben genannten Lokalitäten ist P. flavipenne nur erst von Oyapoc in Cayenne und „Colombien“ bekannt. Als neuer Fundort kommt jetzt Ega (heute Teffé) am Südufer des oberen Amazonenstroms hinzu, woher ein 28 mm langes ♀ vorliegt, das der von Kohl gegebenen Beschreibung entspricht, aber abweichend von dieser und den Diagnosen aller früheren Autoren eine bemakelte 2. und auch 3. Kubitalzelle im Vorderflügel hat. Kohl geht so weit zu erklären, dass sich P. flavipenne allein schon in der Flügelbeschaffenheit d. h. in der ungedunkelten 2. Kubitalzelle von Goryanum unterscheidet. Dies bedarf nun aber nach dem vorhin Ausgeführten einer Einschränkung, ja wird wohl tatsächlich gänzlich hinfällig werden, wenn erst später in den Sammlungen grössere Reihen von Exemplaren vorliegen werden.

Nach dem dürftigen Material, das ich zur Zeit von den beregten beiden Spezies zur Verfügung habe, unterscheiden sich diese in der Flügelfärbung nur dadurch, dass bei P. Goryanum die 3. Kubitalzelle hyalin, bei flavipenne hingegen gedunkelt (bemakelt) ist. Allein wenn, wie gesagt, grössere Reihen zum Studium werden herangezogen werden können, dürften sich wahrscheinlich Übergänge zeigen, und auch dann wird sich erst mit voller Sicherheit ergeben, ob die flavipenne eng verwandte prachtvolle Form P. princeps Kohl, von der ebenso wie von flavipenne das ♂ noch unbekannt ist, tatsächlich eine eigene Art darstellt.

Podium haematogastrum Spin.

< Sceliphron (Podium) haematogastrum Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1897 p. 373

Podium haematogastrum Kohl, Abh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. I, 1902 p. 90.

3 ♀♀ und 1 ♂ vom „Amazonenstrom", ohne präzisere Fundortsangabe. Eine in typischen Stücken durch die völlig roten Beine und Hinterleib (einschliesslich des Stiels) gut gekennzeichnete Form. Allein es kommen Exemplare vor — eins meiner Weibchen sowie das Männchen gehören dazu —, bei denen die letzten Hinterleibsringe geschwärzt sind, und diese Inkonstanz der Körperfärbung stützt die von Kohl geäusserte Ansicht, dass P. haematogastrum und die beiden nächstverwandten, eigentlich nur durch Färbungscharaktere unterschiedenen Formen egregium Sauss. und fumipenne Tschbg. artlich zusammenfallen. Alle drei Formen werden auch nicht einmal subspezifisch zu sondern sein, da sie im Süden, in Uruguay und Rio Grande do Sul neben einander auftreten, vielmehr anscheinend lediglich Aberrationen darstellen.

Bei dem oben angezogenen ♂ stösst die erste Diskoidalquerader auf die erste Kubitalquerader, bei den ♀♀ mündet sie dagegen in die zweite Kubitalzelle.

Was Fox a. a. O. als haematogastrum aufführt, ist, nach seinen daran geknüpften Bemerkungen zu schliessen, ein Ge-

misch von dieser Form, dem P. egregium oder fumipenne und möglicherweise auch Taschenbergi Kohl und spretum Kohl oder fallax Kohl.

Alysonidae.

Bothynostethus aberrans Ducke.

Ducke, Verh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. LII, 1902 p. 578, ♂ (Belem do Pará).

Ein ♀ vom „Amazonenstrom", ohne präzisere Bezeichnung, kann ich nach eingehenderem Studium dieser seltenen Grabwespen-Gattung nur als zu obiger Art gehörig betrachten. Aberrans wurde hauptsächlich darauf begründet, dass bei ihm die erste Diskoidalquerader noch in die 1. und nicht, wie bei allen übrigen bekannten Bothynostethus-Arten, in die 2. Kubitalzelle mündet, ferner darauf, dass die 2. Diskoidalzelle oben kaum enger als unten ist. Beide Merkmale finden sich nun an dem von mir erwähnten ♀, allerdings nur im linken Vorderflügel; im rechten mündet die 1. Diskoidalquerader deutlich interstitial an der 1. Kubitalquerader, und die 2. Diskoidalzelle erscheint in ihm oben merklich verengt. Dies kann eine zufällige anorme Bildung des rechten Vorderflügels sein, auf die kein grosser Wert zu legen ist; immerhin deutet sie an, dass die Art der Mündung der 1. Diskoidalquerader Schwankungen unterliegt.

Ein erheblicherer Unterschied gegen Duckes Beschreibung liegt nun aber in der Kopfschildbildung meines ♀. Dieser Teil ist zwar ebenfalls, wie beim ♂, in der Mitte zu einer deutlichen Spitze vorgezogen, aber zu beiden Seiten, unweit der unteren Augenecke, ausserdem noch mit je 2 scharfen, dicht nebeneinander stehenden Zähnen bewehrt, die erst dann sichtbar werden, wenn die Mandibeln offen stehen. Auch ist die gelbliche Körperzeichnung beim ♀ reicher als beim ♂ und auf folgende Stellen verteilt: Fühlerschaft unten, Kopfschild ausser dem schwarzen Vorderrande und einer feinen braunen Längslinie über die Mitte, Palpen, Schulterbeulen, einen mondförmigen Fleck um die Aushöhlung in der Mitte des Pronotumrandes, einen kleinen Strich jederseits davon, 2 kleine Flecken auf dem

Metanotum, die Innenseite der Vordertibien, den Anfang der Mittel- und Hintertibien und alle Schienensporen. Gelbbraun sind die Mandibeln in ihrer ersten Hälfte, die Tegulae, die Vordertarsen sowie die Vorderschienen an der Aussenseite. Die vertiefte mittlere Längslinie der Stirn endigt nicht an dem vorderen Nebenauge, sondern weit vor ihm. Es mag sein, dass dieses Merkmal ebenso wie die geschilderte Kopfschildbildung und die reichere Körperzeichnung nur dem Weibchen zukommt und somit sexuellen Charakter hat.

In allen übrigen Eigenschaften stimmt mein ♀ mit dem von Ducke beschriebenen ♂ überein. Wie bei diesem sind die Vorderflügel bis kaum zur Basalader glashell, darüber hinaus leicht rauchig getrübt. Das 6. Ventralsegment des Hinterleibes ist glänzend rotbraun, was auch auf die Zugehörigkeit zu aberrans schliessen lässt. Das Pygidialfeld des letzten Dorsalsegments ist länglich eiförmig und mit kurzen, groben, glänzend rostbraunen Börstchen dicht bestanden. Die Hinterränder der Hinterleibssegmente schimmern bräunlich durch. Gruben auf dem Dorsulum in der Nähe der Flügelschuppen sind nicht vorhanden, es steht dort nur jederseits in der Höhe der Flügelschuppen eine feine, eingedrückte gerade Linie.

Bothynostethus wurde 1883 von Kohl auf einer mejikanischen Art errichtet; seither sind 4 brasilianische und 1 nordamerikanische Form hinzu beschrieben worden. In den Sammlungen sind, wie bereits erwähnt, diese Insekten immer noch sehr selten.

Scapheutes flavopictus (Sm.).

Pison flavopictus Smith, Journal of Entomology, vol. I, 1862 p. 81 no. 2, ♀ (São Paulo d'Olivença)

Pison flavopictum Kohl, Verh. k. k. zool.-bot. Ges., Wien, Bd. XXXIV, 1884 p. 187

Pison flavopictum D. T., Catal. Hymen., vol. VIII, 1897 p. 711.

Frederick Smith, dem seiner Zeit am Britischen Museum die Fabrikation neuer Immenarten „im Akkord“ vergeben

war, stellte ein „Pison flavopictum" auf, das nie wieder gedeutet wurde, und zwar, wie sich jetzt ergiebt, weil er das Genus verfehlte bezw. keine damals neue Gattung in seiner Art erkannte. Ein Scapheutes-♀ nämlich in der nachgelassenen Bates'schen Privatsammlung, aus Teffé, trägt einen Zettel mit der obigen Bezeichnung Smiths in einer Handschrift, wie sie in dieser Sammlung stets wiederkehrt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die Bestimmung, die Bates seinem Exemplar gab, entweder von Smith selbst herrührte, oder dieses ist gar ein Cotypus. Jedenfalls stimmt mein Stück mit der Beschreibung Smiths, die ich damit verglichen habe, völlig überein. Als Fundort nennt dieser Autor „St. Paul (Brazil)", und dies ist nun einer der berüchtigten Fälle, in denen von Smith und Walker aus Bequemlichkeit oder echt englischem Lakonismus der Name des kleinen Indianerdorfs São Paulo d'Olivença am oberen Amazon kurzweg, wie oben genannt, abgekürzt und damit der grössten Konfusion Vorschub geleistet wurde, denn bei der Bezeichnung „S. Paulo" denkt jeder sofort an den Staat in Südostbrasilien, der von der peruanischen Grenze, wo São Paulo d'Olivença liegt, durch eine Welt geschieden ist.

Dass S. flavopictus in der Tat vom oberen Amazonenstrom und nicht von Südostbrasilien stammt, beweist ausser dem neu hinzukommenden Fundorte Teffé auch eine Stelle in dem oben zitierten Journal, im gleichen Bande, auf S. 82: „This insect was discovered by Mr. H. W. Bates at St. Paul, Brazil", denn bekanntlich hat Bates nur am genannten Strome, nicht in Südbrasilien, gesammelt. Bei der gegebenen Verbreitung: São Paulo d'Olivença und Teffé erscheint es nun nicht ausgeschlossen, dass auch S. flavopictus (Sm.), wie Ampulex Hellmayri u. a. Arten der Gegend am Südufer des Oberlaufs des Amazons eigentümlich ist und den Strom nach Norden zu nicht überschreitet.

Im übrigen giebt, wie nach den sonstigen Leistungen Smiths nicht anders zu erwarten war, seine Beschreibung auch diesmal weiter nichts als eine für unsere heutigen Bedürfnisse

wertlose Farbenschilderung, erwähnt sie doch nicht einmal die Tatsache der gestielten zweiten Kubitalzelle, wodurch allein schon flavopictum aus der Gattung Pison ausscheidet, geschweige denn die für Scapheutes so charakteristische Verbreiterung der Hinterschenkelspitze. Ich gebe deshalb in folgendem eine etwas eingehendere Beschreibung der hier in Rede stehenden Spezies, wobei besonders die plastischen und strukturellen Merkmale nachgetragen sind.

Dem nur im männlichen Geschlechte bekannten S. Mocsáryi Handl. namentlich auch in Hinsicht der Bildung des Mittelsegments sehr ähnlich, so dass man versucht sein könnte, beide artlich zu vereinigen. Dagegen spricht aber doch eine Anzahl wesentlicher Merkmale: Der feine Längskiel in der Stirnmitte reicht bis zum vorderen Nebenauge. Stirn, Scheitel und Hinterhaupt sind ziemlich fein, wenn auch gedrängt, lederartig punktiert, an den inneren Netzaugenrändern, in der Höhe der Nebenaugen, findet sich beiderseits je eine breite, glatte, glänzende Stelle. Die Punktierung des Dorsulums ist gleichfalls nicht grob, sondern äusserst fein, lederartig, beinahe so zart als die an den Mesopleuren und Mittelsegmentseiten. Die hinteren Nebenaugen sind von den Netzaugen doppelt so weit entfernt, als ihr Abstand von einander beträgt. In der Höhe der hinteren Nebenaugen stehen die Netzaugen um die Länge des 2. + 3. + 4., in der Höhe der Fühlerinsertion etwa um die Länge des 2. + 3. Fühlergeisselgliedes von einander ab.

Die Cilien an den Vordertarsen sind ungefähr $1^1/_2$ mal so lang als der Metatarsus breit.

Fühler schlank, der Schaft lang und ziemlich derb, von der Länge des 1. + 2. Geisselgliedes, Geisselglied 2 um $^1/_3$ länger als 3, dieses gleich lang wie 4, die folgenden kürzer und an Länge unter sich wenig verschieden.

Flügel sehr schwach, gleichmässig gebräunt, die Adern nicht schwarzbraun wie bei Mocsáryi, sondern rotbraun. Die Radialzelle erscheint verhältnismässig etwas länger gestreckt als bei letzter Art, desgleichen die 3. Kubitalzelle.

Lichte Körpertomentierung und -behaarung ungefähr wie bei der genannten Spezies. Die letzte Hinterleibsrückenplatte weist ein deutlich abgegrenztes, flaches, abgerundetlänglich dreieckiges Pygidialfeld auf, das mit groben, kurzen, glänzend bräunlichen Börstchen besetzt ist. Körperfärbung schwarz, die Hinterränder der Abdominalsegmente scheinen blassbraun durch. Zitronengelb sind: der Rand des Pronotums, zwei grosse Flecken auf dem Schildchen und 1 grosser, rundlicher Fleck zu jeder Seite des 2. (nach Kohl 3.) Hinterleibdorsalsegments, an dessen Vorderrande. Diese Rückenflecken werden möglicherweise veränderlich sein und sich auch auf die folgenden Segmente erstrecken können. Weisslichgelb sind: der Kopfschild unter der silberweissen Behaarung mit Ausnahme des schwarzbraunen Vorderrandes, die Schulterbeulen, die Palpen, die Mandibeln ausser an der schwarzbraunen Endhälfte, der Fühlerschaft bis auf einen schmalen schwarzen Strich auf der Oberseite, die Tarsen aller Beine ausser den bräunlichen Spitzen, die Vorder- und Mittelschienen bis auf einen braunen Strich auf ihrer Hinterseite, die Spitze der Hinterschenkel, die Hinterschienen ausser am Ende und alle Schienensporen. Länge des Körpers 9, des Vorderflügels 7,5 mm.

Die Grabwespengattung Scapheutes ist erst 1887 von Handlirsch aufgestellt und ausserhalb Brasiliens noch nicht gefunden worden. Ihre Arten müssen ganz ausserordentlich selten sein, denn in der sehr grossen, in vielen Jahren und in den verschiedensten Gegenden des genannten Landes zusammengebrachten Hymenopteren-Ausbeute Herbert H. Smiths, die von Fox bearbeitet wurde, fand sich nur ein einziges Scapheutes-Exemplar vor. Alles in allem, dürften bis heute kaum mehr als 4—5 Stücke dieser Gattung bekannt geworden sein, die sich auf 3 Arten verteilen. Diese 3 Arten auseinanderzuhalten, mag die folgende Tabelle dienen:

1. Stirn und Scheitel gleichmässig grob punktiert, Dorsulum ebenso, aber etwas weitläufiger. Flügel in der Mitte gebräunt, am Saume und an der Basis heller. (Mittelfeld des

Mittelsegments in der Mitte durch einen seichten, undeutlichen Eindruck geteilt, an dessen Seiten je 9—10 nach hinten divergierende, deutliche, feine Längskiele verlaufen. Länge 8 mm. São Paulo im südlichen Brasilien [oder etwa gar wieder São Paulo d'Olivença am oberen Amazon?])

S. Mocsáryi Handl. ♂

— Stirn, Scheitel und Dorsulum ziemlich fein punktiert. Flügel gleichmässig schwach getrübt 2

2. Mittelfeld des Mittelsegments durch eine deutliche Längsfurche geteilt, im übrigen vollkommen glatt und glänzend. Hinterleibsring 2—5 oben mit gelben Seitenflecken. Länge 10 mm. Coary am Südufer des oberen Amazons und Chapada in Mattogrosso (Fox) S. brasilianus Handl. ♀

— Mittelfeld des Mittelsegments wie bei S. Mocsáryi mit einem feinen Längseindruck in der Mitte, zu dessen beiden Seiten je etwa 10 Längskiele strahlen- oder fächerförmig verlaufen. Nur Hinterleibsring 2 oben mit gelben Seitenflecken (ob konstant?). Länge 9 mm. Teffé am Südufer des oberen Amazons S. flavopictus (Sm.) ♀.

Vespidae.

Montezumia morosa Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 38.

1 ♀ von Teffé. Bis jetzt hatte man von der Verbreitung dieser Form nur vage Begriffe, wie sie sich in Angaben wie „Brazil", „Guiana" ausdrücken. Das von de Saussure aus Mejico angeführte ♂ wird wohl subspezifisch von morosa zu trennen sein. Ebenso glaube ich, werden M. anceps Sauss. und M. platinia Sauss., wenn erst einmal grössere Reihen von Exemplaren zur Untersuchung vorliegen, ihres Ranges als Arten entkleidet und zu Subspezies in dem morosa-Kreise werden.

Mein erwähntes ♀ ist ca. 15 mm lang und fast gänzlich schwarz. Rostgelb ist bei ihm nur an dem Endglied der Vordertarsen angedeutet. Seine Flügel sind an der Aussen-

seite hellbräunlich, vom Stigma bis zur Basis schwarzbraun und zeigen kaum einen metallischen Glanz.

Montezumia infernalis (Spin.).

M. Spinolae Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 39

M. infernalis Smith, ibidem, p. 40

M. Spinolae Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1899 p. 462.

2 ♂♂ von Santarem mit 2 gelben Flecken am Mittelsegment und ebensolchem Saum am Hinterrande des ersten Abdominalsegments. Ein Stück hat schwarzen, das andere gelbgefleckten Kopfschild, ein Beweis, dass die Färbung dieses Teiles etwa die Aufstellung von Lokalrassen nicht rechtfertigen würde.

Die Art ist sonst von Pará und Surinam bekannt; Fox beschränkt sich leider darauf, sie von „various localities“ zu registrieren, anstatt uns diese einzeln zu nennen.

Montezumia infundibuliformis (Fabr.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 39

Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1899 p. 462.

2 ♀♀ von Teffé. Sieht man von solchen wertlosen Vaterlandsangaben, wie „Brasilien“ ab, so ist vorliegende Spezies eigentlich nur erst von Santarem bekannt, und ihre nunmehrige Konstatierung am Oberlaufe des Amazons bleibt interessant.

Polistes versicolor (Oliv.).

Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 446.

Eine gemeine, im tropischen Amerika ungeheuer weit verbreitete, aber in der Zeichnung stark abändernde Art. In Bates' Sammlung steckt 1 Pärchen von Santarem, das der var. D bei Saussure (Mon. Guêp. Soc., p. 82) entspricht. Zwei weitere einzelne ♀♀ oder ♀♀, die nur den Fundort „Amazon“ tragen, haben auch am dritten und vierten Hinterleibsringe gelbe Seitenflecke.

Versicolor-Nester fand ich seiner Zeit häufig in Pará. Sie

waren an Sträuchern und Büschen an den Wegen, mit Vorliebe auch an der Unterseite der Blätter von Bananen sowie unter Balken von verlassenen Lehmhütten befestigt und unterschieden sich in nichts von dem gewohnten Polistes-Typus. Ihre Grösse war durchschnittlich die einer Wallnuss, und nach meinen Notizen sah ich sie besonders viel in den Monaten September und Oktober. Bei der Annäherung setzten sich die Insassen in feindseliger Haltung bezw. in Angriffsstellung, den Kopf mit erhobenen Fühlern nach vorn gerichtet, in gleicher Weise, wie es auch andere Polistes-Arten dort taten, aussen auf die Nester. In den Brutzellen von versicolor speziell traf man fast regelmässig Larven und Puppen einer dem Wirtstiere in Grösse und allgemeiner Körperfärbung ähnelnden Ichneumonide, im engeren Sinne dieses Familienbegriffs.

v. Ihering hält die südamerikanischen Polistes für spättertiäre Einwanderer aus Nordamerika und stützt sich dabei auf die Wahrnehmung, dass die in Südbrasilien heimischen Spezies dieser Gattung nach Art ihrer paläarktischen bezw. nearktischen Verwandten nur Sommernester haben. Allein abgesehen davon, dass dies für den Norden nicht zutrifft — ich erinnere mich genau am unteren Amazon auch im Winter, d. h. in diesem Falle in der Regenzeit, bewohnte Polistes-Nester beobachtet zu haben, obwohl sie auch dort in der Trockenzeit am häufigsten waren — so lässt sich auch die Frage aufwerfen, wie sich alsdann die in Südamerika endemischen Formen der Gattung, etwa P. cavapyta Sauss., die nur in dem Winkel an der Mündung des Plata und in den Südost-Staaten Brasiliens vorkommt, erklären. Die Richtigkeit der v. Ihering'schen Theorie vorausgesetzt, würde sich meines Erachtens daraus nur folgern lassen, dass sich, um bei dem Beispiele zu bleiben, Cavapyta erst posttertiär aus einer verwandten Form, vielleicht carnifex (Fabr.), entwickelt hat, und dass möglicherweise das ebengenannte Gebiet noch nach der Tertiärzeit eine vom archibrasilianisch-guianischen Festlande getrennte Insel bildete, wofür auch sonst verschiedene Eigentümlichkeiten der Fauna jenes zu sprechen scheinen.

Polistes carnifex Fabr.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 109
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 447.

Eine ebenfalls über weite Teile Tropisch-Amerikas, einschliesslich der Antillen, anscheinend jedoch sehr ungleichmässig verbreitete Spezies. Ein von Bates in Santarem gesammeltes Pärchen sowie zwei ♀♀ vom „Amazon" repräsentieren die Form chlorostoma Lep. Ob es zweckmässig ist, diese als Subspezies wieder einzuführen, wird noch an umfangreicherem Material zu untersuchen sein.

Sonst kann ich aus meiner Privatsammlung noch folgende Fundorte für die hier behandelte Art aufführen: Orobó im Innern des Staates Bahia, wo Herr R. Haensch 1894 ein ♂ für mich sammelte und Chiriqui in der Republik Panama.

Polybia liliacea (Fabr.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 125
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 450.

1 ♀ oder ♀ vom „Amazon". Bekannte Verbreitung: Cayenne, Mararú, Santarem, Chapada.

Als neue Fundstelle kann ich den Rio Napo in Ecuador beibringen, woher ich die Spezies durch Herrn Haensch erhielt. Das betreffende (weibliche) Stück weicht von denen vom Amazon dadurch ab, dass seine Mandibeln nicht ganz schwarz gefärbt sind, sondern einen hellgelben Fleck an der Basis aufweisen.

Polybia sulcata Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 125.

Eine der alten Arten, die seit ihrer Aufstellung mit der Heimatsangabe „Brasilien" von keinem Autor mehr behandelt wurden. Ein Exemplar (♀ oder ♀) von Teffé beweist, dass sulcata sowohl in der Körperfärbung als auch in der Zeichnung abänderungsfähig ist, denn die Grundfarbe seines Hinterleibes ist nicht, wie Saussures Beschreibung angiebt, rot, sondern schwarz, und die gelbe Zeichnung erstreckt sich ausser auf die von genanntem Autor erwähnten Stellen noch auf folgende:

Unterseite des Fühlerschafts, Vorderrand des Pronotums, in der Mitte breit unterbrochen, Prosternum, Vorderhüften, die Aussenseiten der Mittel- und Hinterhüften, die Spitze aller Schenkelringe, die Flügelschuppen ausser einem braunen Punkte vorn, einen langen, von der Vorderflügelwurzel bis zu den Mittelhüften ziehenden Strich, einen kürzeren unter der Hinterflügelwurzel, einen grossen Fleck auf den Metapleuren, unmittelbar daranstossend einen Strich an den Seiten des Mittelsegments sowie dessen scharfe Hinterrandskanten. Die gelben Säume der Dorsalsegmente des Hinterleibes greifen auf die Bauchseite über. Das Gelb am Hinterrande des Hinterleibsstieles setzt sich auf dessen Seiten fort. Über die Oberfläche des Hinterleibes zieht sich eine feine, eingedrückte Längslinie, die sich in der Mitte der gelben Segmentsäume bemerkbar macht. Der Hinterleibsstiel ist ungefähr so lang als der Metatarsus der Hinterbeine + $^1/_2$ der Länge des darauffolgenden Fussgliedes. Fühlerschaft von gleicher Länge wie das 1. + 2. + 3. Geisselglied. 2. Geisselglied reichlich so lang als das 3. + 4. Körperlänge 14, Flügelspannweite 21 mm.

Ob die hier beschriebene Form etwa eine besondere Subspezies mit dunklem Hinterleibe und ebensolchen Beinen darstellt, muss sich später erst erweisen.

Polybia Jurinei Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 125
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 449.

Dieser bisher nur von Chapada in Mattogrosso, Rio de Janeiro, Mararú bei Santarem und von Santarem selbst bekannte Art liegt in 2 ♀♀ von Teffé und „Amazon“ vor. Merkwürdig ist nun, dass sie auch auf der westindischen Insel Puerto Rico vorkommt, woher ich in meiner eigenen Sammlung 3 ♀♀ besitze. Diese zeichnen sich von den erwähnten beiden amazonischen Stücken durch tieferes Schwarz der Körperfärbung aus, was daher rührt, dass die greise Tomentierung weniger als bei den letzten hervortritt. Zwei der portorikanischen Exemplare haben überdies einen kleinen gelben Strich oder Fleck unter-

halb der Vorderflügelwurzel. Ehe man aber auf diesen Unterschieden eine neue Subspezies errichtet, wird es ratsam sein, weiteres Antillen-Material abzuwarten.

In Surinam ist Jurinei gleichfalls vor mehreren Jahren von Herrn Michaelis gesammelt und von ihm in den Handel gebracht worden. Weibliche Stücke, die sich in meiner Sammlung und dem Münchener Museum finden, haben die übliche, feine, weissliche Tomentierung und keinen gelben Fleck unter der Flügelwurzel. Das Gleiche gilt von einem weiblichen Exemplare aus Coca in Ecuador in meiner Sammlung (R. Haensch leg.). Noch alle von mir untersuchten Stücke dieser Art wiesen einen kleinen hellgelben Fleck an der Oberkieferbasis und eine sehr feine Längslinie über die Mitte des ganzen Hinterleibes auf.

Polybia rejecta (Fabr.).

P. r. Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 126

P. bicolor Smith, ibidem p. 131

P. r. Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 449.

Von Cayenne, Parintins (Villa Bella), Mararú bei Santarem, Santarem selbst, „Sebastiae“ und Chapada in Mattagrosso bekannt. Als neue Fundstelle kommt Teffé hinzu, woher ein Weibchen oder Neutrum mit abweichend dunkelbraunem statt rotem Hinterleib vorliegt.

Der Kopf ist bei dieser Art sehr flach, linsenförmig, mit einer herzförmigen Erhöhung auf der Stirn, die in der Mitte durch eine feine, bis zum vorderen Nebenauge gehende Längsstrieme geteilt ist.

Im Münchener Museum ist noch von rejecta ein Pärchen aus Mejico (speziell Cordova in der tierra caliente, Saussure leg.) vorhanden, das schwarzbraunen Hinterleib mit undeutlich blassen Rändern der Dorsalsegmente und deutlich hellgelben an den Ventralsegmenten,, mit Ausnahme des ersten und letzten, besitzt. Der Hinterleibsstiel ist bei den in Rede stehenden beiden Stücken oben gelb gerandet. Das ♂ zeichnet sich ausserdem durch unten gelben Fühlerschaft, einen ebensolchen Fleck

an den inneren Augenrändern, an der Basis des Kopfschildes, gelbe Vorderhüften und Schenkelringe und einen gelblichen Fleck auf dem Mesosternum aus. Behaarung an Clipeus und Sternum silberweiss.

4 weibliche Exemplare mit ebenfalls dunkelbraunem statt rotem Hinterleib (also var. B. Saussures) in derselben Sammlung stammen von Nordwest-Ecuador (Paramba, 3500′ Höhe, V. 1897, W. F. H. Rosenberg leg.). Bei zwei von ihnen ist das Postscutellum ohne Andeutung von gelber Zeichnung.

Haensch endlich sammelte rejecta in der Form mit dunkelbraunem Abdomen 1897 bei Philadelphia im Staate Minas Geraes, woher sie mir in meiner eigenen Sammlung vorliegt.

Polybia atra (Oliv.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 126
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 450.

Sicher bekannt von: „Inseln von Paraná", Chapada, Santarem. Von dieser letzten Örtlichkeit findet sich auch ein ♀ oder ☿ in Bates' Sammlung vor.

Polybia tinctipennis Fox.

Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 452.

Eine nach 2 weiblichen oder Arbeiter-Exemplaren von Chapada in Mattogrosso aufgestellte Art, die sich von der bei oberflächlicher Betrachtung ähnlichen P. atra (Oliv.) durch braune sammetige Körperbehaarung, gestreckteren Hinterleibsstiel und einige Färbungsmerkmale unterscheidet. 2 mir vorliegende ♀♀ oder ☿☿, wovon 1 von Teffé stammt und das andere nur „Amazon" als Heimatsangabe führt, gehören zweifellos zu tinctipennis. Jedoch ist bei ihnen das Dorsulum nicht länger als breit, der Hinterleibsstiel von etwa gleicher Länge wie Schenkel III, und blasse Säume zeigen sich ausser am Hinterrande des Pronotums und des Hinterleibsstiels noch auf Dorsalsegment 4 und 5, wo sie ziemlich breit und mitten etwas unterbrochen sind. Vielleicht werden diese Charaktere aber in grösseren Reihen abändern oder teilweise nur dem geschlech-

tigen oder ungeschlechtigen Weibchen zukommen. Die Flügel sind relativ sehr lang und breit, beinahe so lang als der ganze Körper.

Polybia flavicans (Fabr.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 126
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 451.

Eine von „La Mara" (?), Mararú und Santarem angeführte Art, die in der Bates'schen Sammlung in 2 ♀♀ oder ☿☿ vom „Amazon", ohne genauere Lokalitätsbezeichnung, enthalten ist.

Herr R. Haensch in Berlin hat mir vom Rio Napo in Ecuador Weibchen hiervon mitgebracht, die sich durch tiefschwarze Färbung am Abdomen auszeichnen. Ausserdem findet sich in seiner Ausbeute von ebendorther eine P. flavicans täuschend ähnliche Spottform, eine Eumenide, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde.

Polybia angulata (Fabr.).

Polistes angulata Fabricius, Systema piezatorum, 1804 p. 275 no. 32

Polistes angulicollis Spinola, Mem. Acad. sc. Torino (2) XIII, 1851, p. 61 (an 77?) no. 58 ♀ (ich kann dieses seltene Werk jetzt nicht einsehen; die Zitate bei Saussure und Dalla Torre gehen bezüglich der Seitenzahl auseinander)

Polybia angulicollis Saussure, Monogr. Guêp. Soc. 1853 p. 184 no. 23 ♀

Polybia angulata Saussure, ibidem, p. 185 no. 24 ☿

Polybia angulata Dalla Torre, Catal. Hymen. hucusque cognit., vol. IX, 1894 p. 162

Polybia angulicollis Dalla Torre, ibidem, p. 162

Polybia angulata Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 450

Polybia angulicollis Fox, ibidem, p. 450.

Angulata und angulicollis sind bis jetzt als getrennte Formen geführt worden, stellen aber in Wirklichkeit eine Art vor, höchstens sind sie subspezifisch verschieden. Es muss daher für sie der älteste Fabricius'sche Name gelten. Als

Beweis für die Richtigkeit dieser hier von mir vertretenen Auffassung mag ein Stück (♀ oder ⚲) vom Amazonenstrom, ohne genauere Lokalitätsangabe, dienen, das theoretisch zu angulata (i. e. S.) gehören würde, da es schwarze bezw. dunkelbraune Beine besitzt. Indes sind die Schenkel aller Beinpaare gegen das Ende hin sowie die Schienen und Tarsen I auf der Innenseite gelb gefleckt, ausserdem die Fühlergeissel rotbraun gefärbt, was alles einen Übergang zu angulicollis bedeutet. Übrigens hat de Saussure selbst schon eine „Varietät“ seiner angulata mit rotbrauner Fühlergeissel (statt der typischen schwarzen) verzeichnet, die ebenfalls ein Bindeglied mit angulicollis darstellt. Die Oberseite der Mandibeln an dem von mir vorhin besprochenen Exemplar ist, bis auf die schwarzbraune Spitze, rotgelb.

P. angulata ist vom unteren Amazonenstrom bekannt. Neuerdings ist sie durch Herrn Haensch in Ecuador, bei Archidona im Quellgebiete des Rio Napo gesammelt worden, woher ich in meiner Sammlung ein ♀ mit schwarzbraunen Beinen und Mandibeln und rotbrauner Fühlergeissel besitze. Merkwürdigerweise kommt nun aber auch in Ecuador, im Nordwesten dieser Republik, die typische Form angulicollis mit hellgelben Beinen, rostroter Fühlergeissel und schwarzen Mandibeln vor. 2 weibliche Stücke daher, bei Cachaví in 500′ Höhe im XI.—XII. 1896 von Herrn W. F. H. Rosenberg gefangen, konnte ich in der Münchner Staatssammlung einsehen. Danach scheint es doch, als ob die soeben behandelten beiden Formen subspezifischen Rang beanspruchen dürfen, obschon Übergänge zwischen ihnen vorhanden sind. Ehe ich sie aber definitiv in dieser Weise sondere, wird es gut sein, noch mehr Material von mannigfaltigeren Lokalitäten abzuwarten.

In meiner eigenen Sammlung liegt angulata noch aus Espirito Santo (Michaelis leg.) und Jundiahy in São Paulo (12. X. 1897, C. Schrottky leg.) vor.

Polybia paraensis (Spin.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 127
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 451.

Nicht selten, in der Literatur von Pará, Mararú und Santarem erwähnt. 3 ♀♀ oder ☿☿, 1 von Santarem und 2 von Teffé stecken in Bates' Sammlung. Es erscheint bemerkenswert, dass damit die Art auch vom Oberlauf des Amazons nachgewiesen wird.

Ihr Nest mag kaum noch bekannt sein. Ich fand eins am 13. 4. 1893 in Marco da Legoa im Stadtpark von Belem do Pará und sandte es später ans Berliner Museum. Ziemlich gross, kugelig, von etwa 25 mm Durchmesser, war es unter der Deckplatte eines grossen steinernen Parktisches befestigt. Die äussere papierne Nesthülle war aus geknetetem morschem Holze hergestellt und von bräunlicher Farbe. An der Nestunterseite befanden sich zwei Schlupflöcher, wovon eins vielleicht als Einflugs-, das andere als Ausflugsloch diente.

Polybia fulvofasciata (Deg.).

P. phtisica Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 127

P. fulvofasciata Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 448.

1 ♀ oder ☿ in Bates' Ausbeute vom „Amazon".

Eine ganze Anzahl kleinerer und grösserer Lehmnester von kugel- oder auch magen- (dudelsack-)förmiger Gestalt, die an dünnen Zweigen von Garten- und Waldbäumen befestigt waren, erhielt ich in der Zeit vom 9. X. — 22. XI. 1892 bei Belem, namentlich in der schon im Walde gelegenen Vorstadt Marco da Legoa. Die kleineren kugelförmigen Nester hatten einen Durchmesser von 8—10 cm, die grösseren dudelsack- oder magenförmigen einen solchen von ca. 15—20 cm in der Länge und ca. 7 cm in der Breite am dünneren und bis ca. 10 cm am dickeren Ende. Jedes einzelne Nest bestand aus einem dicken, grauen Mantel von geknetetem und erhärtetem Lehm als Aussenteil und den horizontal über einander gelagerten

Brutwaben im Innern. An dem unteren Ende des Mantels war ein rundes Ein- und Ausflugsloch mit etwas lippenförmig aufgeworfenem Rande gelassen.

Herr Geheimrat Prof. Dr. Möbius, Direktor des Berliner zoologischen Museums, an den ich damals eine Sammlung solcher Nester schickte, und der bekanntlich selbst über exotische gesellige Faltenwespen publiziert hat, bestimmte mir die Nestinsassen als Polybia cajennensis (Fabr.), ein Name, der dem oben angegebenen aus Prioritätsgründen weichen muss.

Ein solches kleineres kugeliges Lehmnest gelangte am 25. September 1892 in Marco da Legoa unter merkwürdigen Umständen in meine Hände. Es fiel bei einem Brande, wie er dort von Zeit zu Zeit behufs Beseitigung des lästigen Gestrüpps in der Nähe der Häuser und Hütten angelegt zu werden pflegte, schon etwas angekohlt von den dünnen Zweigen eines Baumes herab und enthielt keine Wespen, sondern eine Schaar ♀♀ und ♃♃ einer grossen Ameise der Gattung Camponotus. Dabei war unersichtlich, ob diese Ameisen das leere Nest bezogen oder etwa die Wespen daraus vertrieben hatten, oder endlich ob vielleicht die rechtmässigen Bewohner des Nestes vor dem Feuer geflohen waren, und dieses nun den Camponoten, welche ohnehin einer baumbewohnenden Spezies angehörten, als letzte Zufluchtsstätte gedient hatte.

Wie bei den neotropischen Vespiden zumeist, enthält die ältere Literatur auch über das Verbreitungsgebiet von P. fulvofasciata nur so vage Angaben wie: Cayenne, „Brasilien"; de Saussure führt ausserdem noch die westindische Insel St. Thomas auf. Fox konnte dann 1898 aus der grossartigen Ausbeute des Amerikaners Herbert H. Smith als neuen Fangplatz Chapada in Mattogrosso beibringen, und jetzt kommt nach dem oben Erörterten noch Belem do Pará hinzu.

Polybia pallidipes (Oliv.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 127
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 450.

Bisher nur im weiblichen Geschlechte, von Cayenne, Santarem, Rio de Janeiro und Chapada, Corumbá und Pedra Branca

im Staate Mattogrosso bekannt. Ein ♂ von Teffé am oberen Amazonenstrom, von 12 mm Körperlänge und 21 mm Flügelspannweite repräsentiert die Form mit ganz rostgelbem Hinterleibe, an dem hellgelbe Segmenthinterrandsbinden ganz matt angedeutet sind. Sonst unterscheidet es sich in nichts von dem ♀ und ☿. Die Fühlergeissel ist oben dunkelbraun, unten rotgelb, und die Flügel sind fast glashell, mit gelblicher Tingierung in der Kostal- und Subkostalzelle.

Polybia occidentalis (Oliv.).

Vespa occidentalis Olivier, Encycl. méthod. Insect. VI, 1791 p. 675 no. 31

autor. posterior. uti apud Dalla Torre, Catal. Hymen. hucusque cognit., vol. IX, 1894 p. 165

Vespa pygmaea Fabricius, Entom. system. II, 1793 p. 283 no. 102

autor. posterior. uti apud Dalla Torre, ibidem p. 165

Polistes parvula Fabricius, Systema piezatorum, 1804 p. 280 no. 55

autor. posterior. uti apud Dalla Torre, ibidem p. 165

? Polistes bistriata Fabricius, ibidem p. 281 no. 56

Polybia pygmaea Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 128 no. 34

Polybia occidentalis Smith, ibidem p. 128 no. 35

Polybia parvula Smith, ibidem p. 130 no. 47

Polybia occidentalis Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 449.

Die spezifische Vereinigung von pygmaea und occidentalis wurde bereits von Fox, und zwar mit vollem Rechte vorgenommen. Die einzigen Unterschiede, die zwischen beiden genannten Formen bestehen sollten, waren solche der Körperzeichnung, und diese ist nun, wie ich an Exemplaren aus Santarem und Teffé bestätigen kann, von einer geradezu unglaublichen Abänderungsfähigkeit, dergestalt, dass alle Übergänge zwischen den genannten zwei Formen, die auch keineswegs etwa Lokalrassen (Subspezies) sind, vorkommen. Die

Variabilität erstreckt sich aber nicht blos auf die Färbung, sondern auch auf die Form des Hinterleibsstieles, welch' letzte de Saussure als Haupteinteilungsgrund für die Gattung Polybia diente, und die sich jetzt auch als labil erweist. Der Hinterleibsstiel erscheint nämlich bei Stücken aus Teffé ziemlich kurz und hinten entschieden breit und glockenförmig, bei anderen aber von derselben Örtlichkeit ist er gestreckt, schmal, nach hinten zu nur mässig verbreitert. Eine durchgreifende Übereinstimmung indes etwa zwischen der Bildung des Hinterleibsstiels, der Körperzeichnung und der Lokalität lässt sich nicht konstatieren. Bunte, reichlich gelb gezeichnete Exemplare neben solchen mit fast gänzlich erloschener heller Zeichnung, also beinahe ganz schwarzen, kommen sowohl in Teffé als auch in Santarem vor. Ebensowenig habe ich plastische Unterschiede zwischen occidentalis und pygmaea, auch nicht durch Untersuchung grösserer Reihen von verschiedenen Gebieten Mittel- und Südamerikas in der Münchener zoologischen Staatssammlung festzustellen vermocht. Dagegen scheint es, als ob die Insassen ein und desselben Nestes doch vielleicht konstant gezeichnet sein werden, wenigstens deutet eine Beobachtung, die ich in Pará machte, darauf hin. Dort waren zahlreiche Exemplare, die ich am 3. 12. 1892 in Marco da Legoa fing, schwarz, mit gelber Ringelung am Hinterleibe, entsprachen also der Form pygmaea, zwölf Stücke aber, die ich ebendort am 5. 2. 1893 erbeutete, und die offenbar der Inhalt eines Nestes, aber eines anderen als die vorerwähnten, waren, zeigten übereinstimmend viel reicheres gelbes Kolorit und stellten somit occidentalis, im engeren Sinne, dar.

Polistes parvula, von Fabricius aus „Südamerika“ in seiner gänzlich unzureichenden knappen Weise beschrieben und von Saussure, ohne Einsicht der Type auf Stücke aus Mejico gedeutet, ist gewiss auch nichts weiter als eine Färbungsaberration von occidentalis, bei der die lichte Zeichnung bis auf einen Saum am Hinterrande des Petiolus verschwindet. Ein so gezeichnetes ♀ liegt mir aus Teffé vor. Bei einem anderen von Santarem tritt ausser am Stiele schon am 2. Hinterleibs-

ringe ein heller Randsaum auf, und die gleiche Tingierung hat ein weibliches, von Saussure seiner Zeit selbst erhaltenes und anscheinend auch von ihm als „parvula" bestimmtes Stück aus „Meztill., tierra templada, Mejico" im Münchener Museum. Dass auch Exemplare vorkommen, bei denen die Ausdehnung der gelben Zeichnung noch weiter vorgeschritten ist, also Übergänge zu pygmaea, braucht wohl nach dem eingangs Ausgeführten nur angedeutet zu werden. Ganz schwarze Stücke mit gleichzeitig gestrecktem, langem Petiolus treten in Mejico (Oaxaca) auf und bilden die var. (wohl subsp.) Diguetiana R. Buyss. Der Zuvorkommenheit ihres Autors, des Herrn Vicomte R. du Buysson am Pariser Museum, danke ich eine Anzahl weiblicher Stücke dieser Form. Übrigens liefert doch auch die Beschreibung von Fabricius einen Beweis für die Richtigkeit dieser meiner Auffassung von parvula: „statura et magnitudo omnino P. pygmaeae, at toto nigra, abdominis petiolo tantum margine tenuissimo flavo."

Als ich die Bereinigung der Synonymie von P. occidentalis soweit durchgeführt hatte, kamen mir in der Münchener Staatssammlung vier sehr alte, aber noch leidlich gut erhaltene, niedrig auf plumpe Nadeln gespiesste weibliche Wespen zu Gesicht, die auf einem angehefteten Etikett in Pertys Handschrift den Namen „Polistes bistriata Fabr." und die Fundortsangabe „Brasil, Piauhy" trugen. Sie rühren offenbar von der denkwürdigen bayerischen Expedition von Spix und Martius (1817—20) her, die auch den brasilianischen Staat Piauhy berührte, wo seither kaum wieder ein Zoolog tätig gewesen sein mag. Die Bearbeitung der von diesen Reisenden heimgebrachten Insekten wurde Maximilian Perty übertragen, der darüber das umfangreiche Werk: „Delectus animalium articulatorum etc." (1830 – 34) veröffentlichte, allerdings ohne die ganze Spix und Martius'sche Ausbeute darin zu behandeln, denn im Münchener Museum steckt noch manches Hymenopteron aus dieser Quelle, das von Perty unberücksichtigt blieb. Die vorhin beregten 4 Stücke gehören zweifellos auch dazu, und sie dürften Perty als Polistes bistriata entweder noch von

Fabricius selbst oder doch nach Exemplaren bestimmt sein, die damals unter diesem Namen umliefen. Jedenfalls stellen sie Polybia occidentalis (Oliv.) dar, und es ist nach dem soeben Ausgeführten möglich, ja wahrscheinlich, dass Polistes bistriata, eine Form, die bisher undeutbar geblieben war, und die von Dalla Torre auffallenderweise unter Vespa aufgeführt worden ist, einfach als Synonym von Polybia occidentalis hinfällt.

Diese Wespe hat eine immense Verbreitung. Soweit ich im Augenblick zu eruieren vermag, sind ausser den schon genannten noch folgende präzisere Fundstellen bekannt: Cayenne, Rio de Janeiro und Chapada. Das Münchener Museum besitzt die Art ferner aus Taubaté im Staate S. Paulo, Pernambuco (5. 1. 1894, Dr. H. Brauns leg.), „Cuantl., tierra caliente", Angangueo, Michoacan und Guanajuato (Mejico, Saussure) und Colombien (Steinheil leg.).

Polybia infernalis Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 129.

4 weibliche Exemplare von Teffé mit variierender Färbung: bei zweien ist ausser der blassgelblichen Grundfärbung nur das Dorsulum und der Hinterleib vom Stiele an etwas gebräunt, bei den beiden anderen sind ferner noch die nach unten gebogenen Seitenränder des Pronotums, ein grosser viereckiger Scheitelfleck und ein länglich ovaler auf der Mitte des Kopfschildes dunkelbraun. Vielleicht stellen diese die geschlechtigen Weibchen, jene die Neutra (Arbeiter) dar.

Infernalis, von Pará beschrieben, ist seither von keinem Autor mehr behandelt worden.

Polybia metathoracica Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 130
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 449.

Eine sehr variable, aus Cayenne, Chapada, Mararú bei Santarem sowie aus letzterem Orte selbst angeführte Spezies, die wahrscheinlich späterhin in mehrere Subspezies aufgelöst

werden wird. Ein mir vorliegendes ♀ oder ♀ vom „Amazon“ hat ca. 12,5 mm Körperlänge und 24 mm Vorderflügelspannweite. Die schwarze Grundfärbung ist überall durch eine hellgraue Tomentdecke verhüllt, und die gelbe Zeichnung beschränkt sich auf folgende Stellen: zwei schmale Striche an den Innenrändern der Netzaugen oberhalb des Kopfschildes, einen schmalen Saum am Hinterrande des Pronotums, die beiden Schildchen, einen grossen, schmalen, hinten in der Mitte zugespitzten, fast sechseckigen Fleck unter dem Hinterschildchen am Mittelsegment, einen Strich auf Hüften II und III, das letzte Tarsenglied von Beinpaar I, einschliesslich der Klauen, die Spitze aller Schenkel, diejenige der Schienen I und II und alle Schienensporen. Am Hinterrande des Hinterleibsstieles ist ein schmaler blassgelber Saum kaum wahrnehmbar.

Auffallenderweise zitiert Herr Prof. Dalla Torre im IX. Bande seines Catalogus Hymenopterorum (1894), abweichend von dem durch ihn in den übrigen Bänden befolgten Prinzipe, den ganzen Synonymenschatz zu geben, ausser am Schlusse, bei der Gattung Nectarina, Smiths Catalogue of Hymenopterous Insects in the collection of the British Museum, part V, Vespidae, 1857 nur insoweit, als darin neue Arten beschrieben sind.

Polybia injucunda Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part. V, 1857 p. 109.

Nur erst von Pará und nur im ♀ bekannt. In Bates' Sammlung findet sich ein ♂ mit der Vaterlandsangabe „Amazon“ vor, bei dem die gelbe Zeichnung ebenso wie beim ♀ verteilt ist, nur hat das Mittelsegment ausserdem noch hinten zu beiden Seiten des mittleren Längseindrucks je einen länglichen gelben Fleck. Alle Schienensporen sind weisslich. Fühler am Ende spitz und umgebogen, die Oberfläche der Glieder schwarz, matt, Unterfläche glänzend glatt, rotbraun, gegen die Fühlerspitze hin gelblich. Der Kopf ist verhältnismässig dick, Stirn und Scheitel sehr gewölbt, wie

das Bruststück dicht lederartig punktiert. An den Seiten der Mittel- und Hinterbrust sowie des Mittelsegments ist die Punktierung feiner und besteht dort aus einer sehr zarten Grundpunktierung mit zerstreuten gröberen Pünktchen. Das Bruststück ist in seinem vorderen und mittleren Teile hochgewölbt und nebst dem Kopfe, den Hüften und dem Hinterleibsstiele unten dicht glänzend grau oder gelblich behaart. Am Clipeus und im Gesicht ist diese Behaarung am dichtesten und silberweiss; erstgenannter Teil ist flach und vorn breit abgerundet. Beine lang, die Hinterschienen reichen weit über die Spitze des Abdomens hinaus.

Polybia surinamensis Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 130
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 448.

Bekannte Verbreitung: Surinam, Mararú bei Santarem, Santarem selbst und Rio de Janeiro. 1 ♂ aus Teffé und 2 ♀♀ oder ☿☿ ebendaher und von Santarem liegen in Bates' Ausbeute vor.

In der Originalbeschreibung wird die Länge des Hinterleibsstiels irrtümlich als gleich derjenigen des Bruststücks angegeben, in der Abbildung aber, die der Autor von der Art später in seinen Hymenopteren der Novara-Reise giebt, ist das Längenverhältnis des Petiolus richtig dargestellt.

Polybia chapadae Fox.

Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 453.

Von Chapada in Mattogrosso beschrieben. In dem Bates'schen Material befindet sich ein ♀ oder ☿, leider nur mit der wenig besagenden Heimatsangabe „Amazon". In Fox' Beschreibung, a. a. O. S. 454, Z. 2 von oben muss es statt „first joint of flagellum as long as the second, third and most of fourth" lauten: „second joint of flagellum as long as the third, fourth and most of fifth".

Polybia pseudomimetica nov. sp.

♀ an ♀. Long. corp. 16,5, extens. alar. 29 mm.

Statura et colore corporis P. liliaceae (Fabr.) et P. sycophantae Grib. fere aequalis, differt tamen petiolo abdominis longiore, gracili, lineari, quam ob rem ad Saussurei divisionem quintam („Kappa") pertinet, fronte plano-convexiuscula nec scutiformi, punctatura frontis et verticis, pronoti, dorsuli, scutellorum segmentique medialis subtilissime rugosa et alarum anticarum cellula cubitali secunda aeque alta ac postice longa, tertia angusta, altiore quam longiore.

Nigra, laevis, ubique, praesertim in fronte, facie et clipeo sericanti-albescenti-pruinosa. Mandibulae robustae, breves, relate breviores quam in P. liliacea, ad apicem bruneae. Palpi brunei. Genae angustae, lineares. Clipeus pentagonus, aeque longus ac latus, parum convexus, planiusculus, sparsim subtiliterque punctatus, marginis antici angulo medio parum producto. Facies lateraliter parum impressa, itaque frons media haud in forma scuti elevata, sed plana, leviter convexa. Frons inter antennas carina parva nec sulco munita. Vertex parum convexus; occiput et tempora quam in P. liliacea aliquantulum latiora. Punctatura frontis et verticis subtilissime rugosa, coriacea, occipitis temporumque inconspicua, fere nulla. Distantia oculorum in vertice longitudinem antennarum flagelli articulorum 1—4 circiter aequat. Ocelli in triangulum aequilateralem dispositi sunt, postici ab oculis bis quam inter se distant. Antennae subclavatae, piceae, subtus ad apicem ferrugineae; flagelli articulus 2. longitudine articulorum duorum insequentium, articuli 4. usque ad 9. inter se fere aequilongi.

Thorax antice subquadratus, marginatus, attamen haud bispinosus, supra sicut capitis frons et vertex, subtiliter rugoso-coriaceo-punctulatus; pronoti lobi laterales deflexi, meso- et metapleurae laeves, sparsim subtiliterque punctati. Dorsulum parum longius quam latius. Pronoti lobi laterales deflexi et mesopleurae punctis impressis carent.

Alae longae, subhyalinae, anticae ad marginem anteriorem et in cellula radiali paulum affumatae. Cellula cubitalis secunda relate magna, haud altior quam postice latior; vena transverso-cubitalis prima, recta, parte radii cellulam cubitalem secundam formante solum bis longior (in P. liliacea paulo magis). Cellula cubitalis tertia angusta, altior quam latior, radii pars eam formans tres quartas partes longitudinis venae transverso-cubitalis secundae, etiam fere rectae, aequat (in specie citata circiter aequilonga est). Vena transverso-cubitalis tertia in medio fracta, deinde ad marginem alae exteriorem vergens, iterum geniculata, venam discoidalem denique rectangulariter attingit; pars extra eam sita (cellula cubitalis quarta Saussurei) cellulis cubitalibus secunda et tertia simul sumptis multo (in P. l. haud) maior est.

Pedes longi, validi, postici abdominis apicem valde superant. Coxae III prolongatae; femur III et tibia III aequilonga.

Segmentum mediale eodem modo, quo frons, vertex, pronotum et dorsulum, subtilissime coriaceo-rugoso-punctulatum, subcompressum, versus marginem posteriorem leniter declive, supra parum convexum, fere planum, in medio longitudinaliter anguste canaliculatum.

Abdominis petiolus angustus, linearis, subcylindricus, postice parum dilatatus nec supra impressus, longitudine dorsuli + scutelli aut metatarsi III + dimidii articuli insequentis; margo petioli posticus tertia parte latitudinis segmenti abdominis secundi vix latior est. Reliqua abdominis pars (i. e. segmenta 2—6), quam in P. l. relate multo minor et gracilior, formam ovali-conicam praebet.

Coloris sulphurei (subeburnei) sunt: orbitae interiores usque ad antennarum altitudinem; pronoti margo posterior; macula parva subalaris; dorsuli lineae duae medianae, subparallelae, antice paululum divergentes, pronotum haud attingentes posticeque confluentes; alarum tegulae macula brunea lateris exterioris excepta; scutellum et post-

scutellum; femorum et tibiarum I apex, tarsorum I articulus ultimus, linea coxarum II et III supra, trochanterum II et III apex subtus, femorum II et III tibiarumque II apex; segmenti medialis lineae duae medianae longitudinales, parallelae, sat latae nec non margo posticus abdominis petioli et segmentorum 2 bis 5 margines posteriores.

Hab. Teffé, ad ripam meridionalem fluminis Amazonum superioris. Unum specimen, quod in museo regio Monacensi asservatur.

Eine Spottform, die der Polybia liliacea (Fabr.) und sycophanta Grib., dem Polistes liliaciosus Sauss. und endlich der Montezumia liliacea Grib. und M. liliaciosa Grib. in Grösse und Körperfärbung verblüffend ähnlich ist, sich jedoch von allen Arten sofort durch den langen, schmalen Hinterleibsstiel unterscheidet. Wäre es aber dieses Merkmal allein, und nicht auch noch eine ganze Reihe weiter unten zu erörternder Unterschiede, so würde ich einstweilen wohl davon Abstand genommen haben, die vorliegende Form von Polybia liliacea und sycophanta artlich zu trennen, denn wir wissen jetzt, dass in dieser Gattung die Gestalt des Hinterleibsstiels, wenn sie auch in der Regel konstant bleibt, bei manchen Arten, z. B. occidentalis (Oliv.), doch beträchtlichen Abänderungen unterworfen ist, und dass darum die alte de Saussure'sche Einteilung in 6 „Divisionen", die sich vornehmlich auf die Bildung des Hinterleibsstiels gründet, einer Revision bedarf.

Durch die Gestalt seines Hinterleibsstiels reiht sich P. pseudomimetica in die 5. Division (Kappa) des eben genannten Autors ein. Als Hauptunterschiede gegen P. liliacea sind ferner hervorzuheben die fast flache, mitten nicht, wie bei dieser Art, in Form eines Schildes erhobene Stirn, die sehr fein und dicht lederartig runzlige Punktierung auf Stirn, Scheitel, Pronotum, Dorsulum, den Schildchen und Mittelsegment, wohingegen alle diese Teile bei der letzterwähnten Spezies glatt sind, wenigstens keine Punktierung wahrnehmen lassen, endlich die Form der 2. und 3. Kubitalzelle des Vorder-

flügels. Die Stellen in der voraufgegangenen lateinischen Diagnose, die eine Verschiedenheit von P. liliacea bedeuten, sind durch gesperrten Druck schärfer hervorgehoben.

Schwarz, glatt, am ganzen Körper, am längsten auf Kopfschild, Gesicht und Stirn seidenartig weisslich pruinös behaart. Oberkiefer kräftig, kurz, verhältnismässig kürzer und breiter als bei P. liliacea, an der Spitze braun. Palpen braun. Wangen schmal, linear. Kopfschild fünfeckig, ungefähr so lang wie breit, wenig gewölbt, fast flach, mit einzelnen zerstreuten Punkten besetzt. Sein Vorderrand ist in der Mitte wie bei der genannten Spezies in eine Spitze ausgezogen, jedoch viel weniger jäh, so dass er mehr abgerundet, nicht so sehr dreieckig vorgezogen erscheint. Gesicht an den Seiten nur wenig eingedrückt, woher es kommt, dass die Stirn nicht, wie wir es bei den meisten Polybien gewohnt sind, in der Mitte schild- oder herzförmig erhaben, sondern nahezu flach, höchstens ein wenig gewölbt ist. Stirn zwischen den Fühleransatzstellen mit einem kleinen Längskiel, also mit keiner reingestochenen Grube, wie sonst bei den Arten dieser Gattung; eine Längsstrieme bis zum vorderen Nebenauge ist kaum angedeutet. Scheitel nur wenig gewölbt; Hinterhaupt und Schläfen erscheinen ein ganz klein wenig breiter als bei liliacea. Diese Abweichung mag aber vielleicht individuell sein. Stirn und Scheitel sind sehr fein, gedrängt, lederartig runzlig punktiert, an Hinterhaupt und Schläfen macht sich fast keine Skulptur bemerkbar. Der Abstand der Netzaugen auf dem Scheitel kommt etwa der Länge von Fühlergeisselglied 1—4 gleich. Die Nebenaugen stehen in einem gleichseitigen Dreieck, die hinteren entfernen sich von den Netzaugen um doppelt so viel als von einander. Fühler schwach keulenförmig, pechbraun, unten gegen das Ende der Geissel hin rostrot; Geisselglied 2 von der Länge der beiden folgenden Glieder, 4—9 unter sich ungefähr gleich lang.

Bruststück nach vorn wenig verschmälert, hier fast

quadratisch, mit scharfem Vorderrande, im Gegensatz zu liliacea, wo er wohl kantig, aber nicht scharf ist, ohne jedoch seitlich gerade in dornförmige Spitzen auszulaufen; Punktierung oben, wie auf Stirn und Scheitel, fein lederartig runzlig; die herabgezogenen Seitenlappen des Pronotums sowie die Mittel- und Hinterbrustseiten sind glatt und mit zerstreuten, feinen Punkten bestanden. Dorsulum nur wenig länger als breit. Die herabgezogenen Seitenlappen des Pronotums sowie Mittelbrustseiten ohne tief eingestochene Punkte, wie sie für P. liliacea charakteristisch sind, bei welcher Art je ein solcher Punkt in der Nähe des Prosternums bezw. unterhalb des Ursprunges der Hinterflügel, gegen die Metapleuren hin, steht.

Flügel lang, fast glashell, von oben gesehen, wie bei erwähnter Spezies, etwas gelblich schimmernd, die vorderen am Vorderrande, namentlich in der Radialzelle, etwas rauchig getrübt. 2. Kubitalzelle verhältnismässig gross, nicht höher als hinten breit; die 1., gerade verlaufende Kubitalquerader nur doppelt so lang als das die 2. Kubitalzelle mitbildende Stück der Radialader (bei P. liliacea etwas länger). 3. Kubitalzelle schmal, höher als breit; das sie mitbildende Stück der Radialader ist nur $^3/_4$ so lang als die ebenfalls fast gerade 2. Kubitalquerader (bei der oft angezogenen Art ungefähr gleich lang dieser). Die 3. Kubitalquerader ist in der Mitte gebrochen, geht dann stark nach dem Flügelaussenrande zu und ist kurz vor ihrer rechtwinklig erfolgenden Einmündung in die Diskoidalader nochmals gekniet; der auswärts von ihr liegende Flügelteil (die 4. Kubitalzelle de Saussures) ist viel grösser als die 2. + 3. Kubitalzelle zusammengenommen (bei P. l. nicht grösser).

Beine lang und kräftig, das hinterste Paar ragt weit über die Spitze des Hinterleibes hinaus. Hüften III verlängert, fast $^3/_4$ so lang als der Hinterleibsstiel, bei liliacea gewöhnlich; Schenkel III und Schiene III gleich lang.

Mittelsegment ebenso wie Stirn, Scheitel, Pronotum

und Dorsulum sehr fein und dicht lederartig-runzlig punktiert. Seine Oberfläche ist nicht so jäh abschüssig wie bei der verglichenen Spezies, vielmehr vom Postscutellum sanft nach hinten absteigend, dabei wenig gewölbt, fast flach, in der Mitte mit einer verhältnismässig schmalen Längsrinne.

Hinterleibsstiel schmal und lang, linear, oben fast zylindrisch, auf der Unterseite abgeflacht, nach hinten zu nur sehr schwach verdickt und dort oben ohne Längseindruck. Seine Länge kommt derjenigen des Dorsulums und Schildchens oder des Metatarsus III + der Hälfte des nachfolgenden Tarsengliedes gleich; am Hinterrande ist er kaum breiter als $^1/_3$ der grössten Breite des 2. Abdominalsegments. Dieses ist ganz vorn etwas halsförmig eingeschnürt, erreicht dann schnell, noch in dem ersten Drittel seiner Länge, die grösste Breite und wird von dort ab allmählich wieder etwas schmäler. Der Rest des Hinterleibes ist spitz kegelförmig, vom 2. Ringe an gerechnet, erscheint er oval-kegelförmig. Im ganzen ist das Abdomen kleiner und schmächtiger als bei P. l.

Schwefelgelb (am Hinterleibe mehr weisslichgelb) sind: die inneren Augenränder bis zur Höhe der Fühler; Hinterrand des Pronotums; ein kleiner Fleck unterhalb der Vorderflügelwurzel; zwei fast parallele, nach vorn zu etwas auseinandergehende, den Vorderrücken nicht erreichende und hinten zusammenfliessende Längsstreifen auf der Mitte des Dorsulums — die beiden seitlichen, längs der Flügelschuppen verlaufenden Dorsulumstreifen der P. liliacea fehlen, dagegen sind bei P. pseudomimetica die Flügelschuppen nicht schwarz, sondern gelb, mit einem braunen Fleck auf der Aussenseite —; Schildchen und Hinterschildchen; Spitze von Schenkeln und Schienen I, letztes Tarsenglied I, eine Längslinie auf Hüfte II und III oben, Spitze der Schenkelringe II und III unten, Spitze der Schenkel II und III und der Schienen II; 2 annähernd parallele, ziemlich breite Längslinien auf der Mitte

des Mittelsegments, zu beiden Seiten der schwarz gefärbten Längsrinne sowie der scharfe Hinterrand dieses Segments, und endlich die Hinterränder des Hinterleibsstiels und -Segments 2—5 oben. Auf der Bauchseite ist nur Ring 2 und 3 gelblichweiss gesäumt, 4 und 5 haben nur Seitenflecke von dieser Farbe.

Die Beschreibung Gribodos von Polybia sycophanta — Bullett. della soc. entom. ital. XXIII, 1892 p. 251 — ist bei weitem nicht ausführlich genug, um über alle wissenswerten Merkmale Aufschluss geben zu können. Ich muss daher fürs erste behufs Klarstellung der Verwandtschaftsverhältnisse der von mir hier neu beschriebenen Art von einer zirkularen Anordnung, in dem weiter unten, bei Trigona Heideri Friese, besprochenen Sinne, absehen und begnüge mich, in folgendem eine lineare Tabelle zu geben:

1. Hinterleibsstiel depress, ziemlich flach, oben in der Mitte nicht jäh glocken- oder becherförmig anschwellend, am Grunde nicht stielförmig verdünnt, sondern, von oben betrachtet, ziemlich regelmässig dreieckig erscheinend. Körperzeichnungen dunkel ockergelb. Miarim (?), Brasilien
Polybia sycophanta Grib.

— Hinterleibsstiel am Grunde dünn, in den letzten $^{2}/_{3}$ seiner Länge glocken- oder becherförmig erweitert oder länglich, schmal, linear. Körperzeichnungen blass-, schwefelgelb oder gelblichweiss 2

2. Hinterleibsstiel am Grunde dünn, in $^{2}/_{3}$ seiner Länge plötzlich glocken- oder becherförmig erweitert, oben in der Mitte mit einem schwachen Längseindruck, bei weitem kürzer als das Dorsulum, so lang als Metatarsus III. Mitte des Kopfschildvorderrandes in eine kräftige, dreieckige Spitze vorgezogen. Stirn mit schild- oder herzförmig erhabenem Mittelfelde, dicht oberhalb der Fühleransatzstellen mit einer tiefen, eingestochenen Grube, von der aus eine deutliche Längsstrieme bis zum vorderen Nebenauge zieht. Der ganze Körper glatt ohne deutliche Skulptur, mit einer sehr kurzen, eng anliegenden, bräunlich-pruinösen Pubescenz. Bruststück vorn etwas quadra-

tisch, aber nicht scharf gerandet. Die herabgezogenen Seitenlappen des Pronotums sowie die Mesopleuren zeigen dicht am Prosternum bezw. unterhalb der Hinterflügelwurzel nahe den Metapleuren, je einen tiefen, reingestochenen Punkt. Erste Kubitalquerader der Vorderflügel mehr als doppelt so lang als das die 2. Kubitalzelle mitbildende Stück der Radialader; das die 3. Kubitalzelle mitbildende Stück der Radialader ist ungefähr gleich lang der 2. Kubitalquerader. Kubitalanalfeld (4. Kubitalzelle de Saussures) nicht grösser als die 2. und 3. Kubitalzelle zusammengenommen. Hüften III gewöhnlich, nicht verlängert. Gelbe Zeichnung auf Bruststück, Abdomen, allenfalls Kopf beschränkt; auf dem Dorsulum finden sich ausser den beiden gelben Mittellängslinien noch zwei seitliche längs der Flügelschuppen. Guianisch-zentralbrasilianisches Faunengebiet bis südlich nach Mattogrosso, Rio Napo in Ecuador

Polybia liliacea (Fabr.)

— Hinterleibsstiel schmal und lang, linear, nach hinten nur schwach verdickt und dort oben ohne Längseindruck, so lang als das Dorsulum + Schildchen oder Metatarsus III + der Hälfte des nachfolgenden Tarsengliedes. Kopfschild am Vorderrande mehr gerundet verlaufend, die Mitte mässig weit dreieckig vorgezogen. Stirn wenig gewölbt, fast flach, ohne schild- oder herzförmig erhabenes Mittelfeld, mit einem kleinen Längskiel zwischen den Fühleransatzstellen, ohne Grube; Längsstrieme kaum angedeutet. Stirn, Scheitel, Pronotum, Dorsulum, beide Schildchen und Mittelsegment mit sehr feiner und gedrängter, lederartig runzliger Punktierung, der übrige Körper glatt; — Pubescenz überall sehr deutlich seidenartig-weisslich-pruinös, am längsten auf Kopfschild, Gesicht und Stirn. Bruststück vorn scharf gerandet. Herabgezogene Seitenlappen des Pronotums und die Mesopleuren ohne reingestochene Punkte. Erste Kubitalquerader der Vorderflügel nur doppelt so lang als das die 2. Kubitalzelle mitbildende Stück der Radialader; das die 3. Kubitalzelle mitbildende Stück der Radialader ist nur $^3/_4$ so lang als die 2. Kubitalquerader. Kubitalanalfeld (4. Kubitalzelle de Saussures) viel grösser als die 2. + 3. Kubitalzelle.

Hüften III verlängert. Gelbe Körperzeichnung reichlicher; namentlich erstreckt sie sich auch auf die Beine; auf dem Dorsulum fehlen gelbe Seitenstreifen längs der Flügelschuppen. Teffé am Südufer des oberen Amazons

Polybia pseudomimetica Schlz.

Zur Erklärung für den Namen pseudomimetica mögen die folgenden Ausführungen dienen.

Dass in den Tropen unter den gestachelten Immen gleiche oder doch höchst ähnliche Körpergestalt, -Färbung und -Zeichnung bei ihrer sonstigen Struktur nach ganz verschiedenen Arten, Gattungen, selbst Familien angehörenden Formen vorkommt, war schon länger bekannt. Der Altmeister der Hymenopterologie, Herr H. de Saussure in Genf, wies schon vor Jahrzehnten darauf hin, und in neuerer Zeit machten Gribodo, Friese u. a. weitere solche Fälle bekannt. In grösseren zoologischen Kreisen jedoch scheinen diese Wahrnehmungen bisher keine Beachtung gefunden zu haben, obwohl sie meines Erachtens deshalb von grosser Bedeutung sind, weil sie auf die unter der Bezeichnung „Mimikry" zusammengefassten Erscheinungen neues Licht werfen. Ich habe bereits vor Jahren wiederholt darauf hingewiesen, wie misslich die teleologische Bates-Darwin'sche Mimikry-Theorie, die so lange eine glänzende Illustration zur Lehre von der „selection of the fittest" im Kampfe ums Dasein bildete, wird, wenn die üblichen, in Lehr- und Handbüchern immer wieder angezogenen Beispiele einmal ausser acht gelassen und unbefangenen Auges die tropischen Insekten gemustert werden. Da ergiebt sich denn oft gar bald, dass von einem Verhältnis des Geschützt- oder Ungeschütztseins zwischen den „nachgeahmten" und „nachahmenden" Formen keine Rede sein kann. Diese Erkenntnis bricht sich auch sonst immer mehr Bahn, und gerade unsere bedeutendsten Lepidopterologen stehen heute der Erklärung der Mimikry-Erscheinungen im Darwin'schen Sinne, wenigstens in der bis jetzt gebräuchlichen, so sehr verallgemeinerten Form, skeptisch gegenüber. Um wieviel gerechtfertigter ist nun erst solche Skepsis, wenn, wie oben angeführt, ganz ähnliche Erscheinungen

auch unter den mit einem Giftstachel bewehrten Hymenopteren auftreten, bei denen es sich dann überhaupt nicht mehr um „ungeschützte" Nachahmer handeln kann.

Chartergus Smithii Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 134
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 457.

Mit Sicherheit nur von Corumbá am rechten Ufer des oberen Rio Paraguay bekannt. Ich habe ein ♀ von Teffé unter den Händen, das sich vortrefflich mit der von Saussure für das ♂ gegebenen Beschreibung deckt, nur haben die Seiten des Pronotums kaum braune Flecken und die des Mittelsegments überhaupt keine, auch fehlen am 2. Dorsalringe des Hinterleibes die 3 braunen Vorderrandpunkte. Die Vorderflügelspitzen, besonders in der Radialzelle, sind graulich getrübt. Wie häufig bei den Arten der Gattung Chartergus, sind die Schläfen scharf gerandet und etwas unterhalb der Mitte ihres Verlaufes vom Hinterhaupt bis zu den Wangen, mehr nach diesen hin, seicht bogenförmig ausgeschnitten bezw. ausgerandet. Wangen deutlich.

Chartergus chartarius (Oliv.).

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 134
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 457.

1 ♀ von Teffé am oberen Amazon, das sich durch fehlendes Gelb am Hinterschildchen und sehr hohe, schmale 2. Kubitalzelle der Vorderflügel auszeichnet. Vielleicht repräsentiert es eine Lokalform dieser über gewaltige Gebiete des tropischen Amerikas verbreiteten Art. Die Schläfenkante ist bei ihr sehr scharf und geht bis zur äusseren Mandibelnecke; in der Mitte ist sie stumpfwinklig ausgeschnitten.

Chartergus globiventris Sauss.

Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part V, 1857 p. 135
Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 457.

Den typischen globiventris besitze ich aus Belem (30. XI. 1900, A. Ducke leg.). 2 ♀♀ von Santarem und Teffé in

Bates' Nachlasse weichen davon sehr erheblich ab, und ich stelle sie nur einstweilen, bis ich umfangreicheres Vergleichsmaterial zu Gebote habe, hierher. Diese Stücke sind beträchtlich grösser als typische: das Exemplar von Santarem ist 8,5, das von Teffé 7,5 mm lang, vom Kopf bis zum Hinterrande des 2. Abdominalsegments gemessen. Beide weichen auch wieder in der Zeichnung von einander ab, indem beim Santarem-Stücke ein gelber Randsaum nur am 1. Dorsalsegmente des Hinterleibes, bei demjenigen aus Teffé dagegen auch am Hinterleibsring 2 vorkommt. Ferner fehlt bei dem letzterwähnten die gelbe Binde am Vorderrande des Schildchens, und die Fühler sind bei ihm mit Ausnahme der äussersten rotgelben Basis und Geisselspitze, schwarzbraun.

Chartergus griseus Fox.

Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 458 ♀ an ♀

? C. fulgidipennis Saussure, Monogr. Guêp. Soc., 1853 p. 218 no. 2 (sine indicatione sexus).

Wurde von Mararú bei Santarem und vom letzten Orte selbst beschrieben. In Bates' Sammlung fand ich ein ♀, leider nur mit der Heimatsangabe „Amazon" vor, das aber möglicherweise ebenfalls von der Mündung des Tapajoz stammt. Es hat glitzernde, bei auffallendem Lichte purpurrot und grün irisierende Flügel und am Hinterleibe die Neigung, sich in Braun zu verfärben. Wegen dieser beiden Merkmale glaube ich kaum in der Annahme fehlzugehen, dass C. fulgidipennis Sauss. von Pará mit griseus Fox cospezifisch ist und würde auch keinen Anstand nehmen, beide zu vereinigen, wenn Saussure nicht die gelbgraue Behaarung des Abdomens unerwähnt gelassen hätte.

Die Schläfen sind bei vorliegender Art mit einem sehr scharfen Längskiel bezw. Rand versehen, der nach unten zu, gegen die Mandibeln, etwas geschweift verläuft, ohne aber ausgerandet zu werden. Die erste Diskoidalzelle des Vorderflügels ist bei meinem Exemplare leicht gelblich angehaucht.

Charterginus fuscatus Fox.

Fox, Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia, 1898 p. 459.

Ein ♀ vom „Amazon", ohne genauere Fundplatzbezeichnung, glaube ich zu dieser nach einem einzigen Exemplare von Mararú bei Santarem beschriebenen Spezies stellen zu sollen. Unklar bleibt mir einstweilen, welchen Unterschied Fox zwischen seiner Gattung Charterginus und Chartergus hinsichtlich der Bildung des ersten Hinterleibssegments gefunden haben will. Bei Chartergus nämlich ist die Form dieses Segments sehr veränderlich, bei vielen Arten flach und unter das Niveau des folgenden 2. Segments, ähnlich wie bei Nectarina, herabgedrückt, bei anderen aber ist deutlich ein vertikaler und ein horizontaler, mit dem 2. Abdominalsegment in einer Ebene liegender Teil abgesetzt, in sehr hervorragender Weise z. B. bei Chartergus Smithii Sm., wo der horizontale Abschnitt des ersten Segments fast Odynerus-artig breit, glockenförmig wird. Stets ist dieses Segment aber bei Chartergus hinten breit und sitzend. Im übrigen ist jedoch Charterginus eine, namentlich durch die flachen Augen und Kopf, die schlanken, langen Mandibeln und andere Merkmale wohl charakterisierte besondere Gattung.

Mein Stück von Ch. fuscatus weist abweichend von der Originalbeschreibung am Hinterrande des 1. Hinterleibsringes keinen gelblichen Saum, dagegen solche gelbe Säume an den Ventralsegmenten 2 und 3 auf. Diese Zeichnungsunterschiede sind aber nicht gewichtig und jedenfalls nur individuellen Charakters. Sie deuten eben lediglich an, dass diese Spezies veränderlich ist.

Nectarina Smithii Sauss.

Von Santarem beschrieben und seither nicht weiter behandelt. Ein ♀ von Teffé konnte ich untersuchen, das von der Originalbeschreibung durch völlig hyaline Flügel, mit rotbraunen Adern, und grösstenteils schwarzbraunes, nur am Vorderrande gelbes Schildchen abweicht. Die scharfen Seitenkanten des Mittelsegments sind infolge der dort zu Tage

tretenden groben Punktierung fein gezähnelt. Ich glaube es hier mit einer Ober-Amazonien eigentümlichen Lokalrasse oder Subspezies zu tun zu haben, unterlasse aber eine Benennung, bis mir mehr Material davon zu Gesicht kommt.

An anderer Stelle machte ich bereits darauf aufmerksam, dass diese Gattung, entgegen der Schreibweise der neueren Autoren, Nectarina heissen muss, in welcher Fassung sie auch von Shuckard aufgestellt wurde, zum Unterschiede von dem Vogelgenus Nectarinia Illig.

Meliponidae v. Iher.

v. Ihering, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 19. Bd., 1903 p. 183.

Melipona interrupta Latr.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 293 ♀♂ (Belem, Jambú-assú, Insel Marajó und benachbarte Inseln, Macapá und Calçoene).

9 ♂♂ vom „Amazon", ohne weitere Angabe. Die hellgelben Binden an den Endrändern der Dorsalsegmente des Abdomens sind nur mitten dünn unterbrochen. Anders verhält sich dies bei ♀♀, die ich aus Surinam (Michaelis leg.) besitze, bei denen diese Binden auf kurze Seitenflecke reduziert sind. Der Zukunft bleibt es vorbehalten, festzustellen, ob etwa die Guiana-Stücke durchgehends so gezeichnet und darum von denen aus Pará und Unter-Amazonien subspezifisch abzutrennen sind. Dagegen glaube ich das Recht subspezifischer Trennung schon jetzt für eine Form (♀) in Anspruch nehmen zu können, die Haensch 1899 in Ecuador bei Archidona und bei Coca fing. Diese unterscheidet sich von typischen Exemplaren durch erheblichere Grösse (Körperlänge 12—15, Thoraxbreite 4,5—5, Vorderflügellänge 10,5—11 mm — bei jenen lauten die Masse entsprechend: 11—12; 4,5; 9—10 mm), durch hellrostgelbe, nicht greise Behaarung auf Scheitel und Thoraxrücken, infolge wovon die rostroten Vorderecken des Mesonotums sich weniger stark abheben, als wir es sonst bei dieser Art gewohnt sind,

ferner durch schärfere Abgrenzung des basalen rostgelben und apikalen, dunkel rauchgrauen Teils der Flügel und endlich durch reichere gelbe Fleckung auf dem Clipeus und im Gesichte so zwar, dass Vorder- und Hinterrand sowie eine breite Mittellinie jenes und die inneren Gesichtswinkel nebst einem schmalen Streifen jederseits an den Orbitis sowie die Unterseite des Fühlerschafts gelb gezeichnet sind. Die Mandibeln tragen einen deutlichen Zahn an der Innenecke des Spitzenrandes, einen zweiten an dessen Mitte. Der Endrand von Rückensegment 1 des Hinterleibes ist fast ununterbrochen hellgelb gesäumt, auf Segment 2—5 finden sich nur Seitenflecke, die nach hinten zu an Länge abnehmen. Ich benenne diese Form M. nterrupta aequatorialis. Typen in meiner Sammlung.

Meinem verehrten Kollegen Herrn H. Friese in Jena verdanke ich noch folgende Fundorts- und -Zeitangaben für M. interrupta, nach Stücken in seiner reichen Sammlung (A. Ducke leg.): Belem IV.—V. und XII., Insel Marajó VI. und Santarem 11. VIII.

Melipona flavipennis Sm.

M. flavipennis Smith, Catal. Hymen. Ins. Brit. Mus., part II, 1854 p. 406 ♂ (Belem do Pará)

M. titania Gribodo, Bull. soc. entom. ital., XXV, 1893 p. 251 no. 2 ♀ (Argentinien?) (nicht selbst eingesehen, nach den Zitaten Dalla Torres und Duckes)

M. flavipennis Dalla Torre, Catal. hymen. hucusque cognit., vol. X, 1896 p. 578

M. titania Dalla Torre, ibidem p. 584

M. titania Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 294 ♀ (Belem, Jambú-assú und Anajás auf Marajó).

Ich erhielt vor mehreren Jahren durch Herrn Michaelis in Surinam erbeutete ♀♀, die ich seiner Zeit nach Smiths Catalogue, so ziemlich als die einzige Melipone, die nach den darin enthaltenen Beschreibungen zu eruieren war, als flavipennis bestimmte. Unlängst nun bei Durchsicht von Material

aus dieser Gattung im Münchener Museum war ich überrascht, dieselbe Art als titania Grib. anders benannt zu sehen. Es handelte sich hierbei um Exemplare authentischer Bestimmung, und da sie sich mit Smiths diesmal ausnahmsweise deutbarer Beschreibung vollkommen decken, was vielleicht auch darin seinen Grund hat, dass wir es hier mit der grössten, überhaupt bekannten Melipone zu tun haben, so kann an der Identität beider Formen kein Zweifel sein, und titania muss somit der älteren Bezeichnung Smiths weichen. Diese ist von den neueren Autoren auch wohl lediglich übersehen worden.

In der Bates'schen Sammlung steckt von der hier behandelten, immerhin selteneren Art ebenfalls ein ♀, bedauerlicherweise ohne genaue Fundortsangabe.

Flavipennis ist nun viel weiter verbreitet, als bisher angenommen werden konnte, denn die Spezies besitze ich auch in ♀♀ Exemplaren, die von solchen vom Amazon und Surinam nicht abweichen, durch Herrn Haensch aus Ecuador, wo sie in Palmar und Archidona erbeutet wurden. Interessant wird es nun sein, künftighin festgestellt zu sehen, wie sie in den zwischen dem letztgenannten Lande und dem unteren Amazonenstrom bezw. Guiana gelegenen ungeheueren Gebieten im einzelnen verbreitet ist, und dann auch, wie weit sie südwärts vorkommt. Soviel kann nämlich wohl heute schon als wahrscheinlich angenommen werden, dass sie in Süd- und Mittelbrasilien fehlt, wo ihre Stelle offenbar von M. anthidioides Lep. eingenommen wird. Wenn daher v. Ihering in seiner zitierten Arbeit, p. 279 in einer dem Westen des Staates S. Paulo angehörenden, in Tupí als „Tapii-ei" bezeichneten Biene M. titania (= recte flavipennis) vermutet, so fällt dies wohl hin.

Melipona fuscata Lep.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 295 ♀ (Belem).

Von „Perú" und Belem bekannt. Von letztem Orte fand ich auch einen ♀ im Bates'schen Nachlasse vor. Ducke sammelte die Art, wie mir Herr Friese in liebenswürdiger

Weise mitteilte, ausser bei Belem (3. X.) auch bei Itaituba am Tapajoz (30. VIII.).

Melipona scutellaris Latr.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 296 ♀♂ (Belem, Insel Marajó, Macapá).

3 ♀♀ in Bates' Sammlung, wovon einer ebenfalls den Fundort Belem trägt. Der Kollegialität Herrn Frieses verdanke ich einige weitere Lokalitäts- und Flugzeitangaben nach Stücken in seiner Sammlung, aus Duckes Ausbeute: Belem V., 5. VII., XII. und Itaituba (Tapajoz) 12. IX.

Nach Ducke soll das in hohlen Ästen angelegte Nest wenig zahlreich bewohnt sein. Das Gegenteil davon lehrt nun aber ein im Münchener Museum vorhandenes Nest dieser Art, von dem ich in nachfolgendem eine kurze Beschreibung geben will. Das Nest von M. scutellaris soll zwar schon von Drory beschrieben sein, aber seine bezügliche Schrift ist sehr selten und fast unauftreibbar, sodass eine Neubeschreibung immerhin gerechtfertigt erscheint.[1])

Das erwähnte Nest des Münchener Museums dürfte immerhin, nach der in den Waben vorhandenen, fast flugfertigen Brut zu urteilen, mindestens 1600—1800 Bienen enthalten haben. An Brutwaben sind darin 4 vorhanden, die über einander lagern und einer an der obersten Wabe angebrachten handschriftlichen Notiz zufolge horizontal geschichtet waren. Die Waben nehmen von oben nach unten an Grösse zu. Ihre Gestalt ist die eines breiten Ovals oder einer Ellipse; der Längsdurchmesser der untersten beträgt ca. 14,5, der Breitendurchmesser ca. 10,5 cm. Bei der obersten Wabe lauten diese Zahlen 10,5 bezw. 9 cm. Die einzelne Wabe ist nach der Mitte zu gleichmässig, schwach trichterförmig vertieft, sodass sie, im Profil gesehen, als stumpfwinkliges Dreieck erscheint. Sie ist von hellbrauner Farbe

---

[1]) Nachträglich finde ich noch, dass auch schon Maurice Girard in den Annales de la Soc. Ent. de France, 1874 p. 567—573 Mitteilungen über das Nest von M. scutellaris machte und u. a. auch die befruchtete Königin beschrieb.

und besteht aus den eng aneinander gereihten, senkrecht stehenden Brutzellen, die die bei Meliponen übliche Form oben stumpfer, unten ziemlich spitz abgerundeter Coccons haben. Der Querdurchmesser jeder Brutzelle (5,5—6 mm) ist ein unregelmässiger Kreis, durch die Verbindung aber mit den Nachbarzellen mittels einer besonderen dunkelbraun gefärbten Wachsschicht kommt doch, von oben betrachtet, eine fast regelmässig sechseckige Form, wie wir sie bei den Zellen unserer Honigbiene (Apis mellifica) gewohnt sind, heraus. Die Länge einer Brutzelle beträgt etwa 11 mm.

Die Verbindung der einzelnen Waben miteinander ist durch kurze wächserne Strebepfeiler oder Stützen in unregelmässiger Entfernung von einander, hergestellt. Diese Pfeiler sind am zahlreichsten an der Peripherie, mitten nur in geringerer Zahl vorhanden. Der Abstand der Brutwaben von einander ist gerade nur so gross, dass die Arbeitsbienen passieren können, und teils um deren Übergang von einer Wabe zur anderen zu ermöglichen, teils vielleicht auch zum Zwecke der Ventilation des Nestes sind in den Waben da und dort Lücken in Gestalt von fehlenden Zellen gelassen. Eine dieser Lücken geht durch 3 Stockwerke (Waben) hindurch. Die oberste Wabe ist oben mit einer ziemlich dicken Wachsschicht belegt.

Das Involucrum, die Hülle des Nestes, ist wie bei Meliponiden üblich, eine bröcklige papierdünne, sehr unregelmässig gefaltete Wachslage von dunkelbrauner Färbung, die durch Pfeiler aus Wachs mit den Brutwaben verbunden ist so zwar, dass von ihr Zwillingspfeiler mit etwa 7 mm Schenkellänge und 3 mm Breite nach je zwei Waben entsandt werden. Die durch das Blätterwerk der Umhüllung gebildeten Hohlräume enthielten, soweit sich noch feststellen liess, weder Wachs noch Honig. Auch Honigtöpfe und eine Flugröhre fanden sich in dem Nest nicht vor, ebensowenig war von den bei den Meliponen so hochinteressanten Königinnen, noch von Männchen und Nestschmarotzern, trotz sorgfältigster Untersuchung, etwas zu entdecken.

Das Wachsmaterial der Nestwaben sowie der Umhüllung ist ziemlich hart und spröde, was auf reichliche Beimischung von Harz und Erde schliessen lässt.

Melipona flavolineata Friese.

Friese, Természetr. Füzetek, 1900 p. 382 (Belem, Teffé und Pebas)

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 297 ♀ (Belem, Insel Marajó, Macapá).

In Bates' nachgelassener Sammlung sind 3 ♀♀ enthalten. von denen nur einer eine genauere Fundortsbezeichnung, nämlich ebenfalls Belem trägt.

Eine Form vom Rio Napo in Ecuador (♀) liegt mir in der Ausbeute Haenschs vor, die ich hierher glaube stellen zu sollen. Sie hat, wie Duckes Beschreibung verlangt, mattes, gelbgerandetes Dorsulum und schwarz behaarte Hinterschienen, die Seiten des Bruststücks aber, das Mittelsegment, der ganze Hinterleib und die Beine sind bei ihr rötlichgelb, goldgelb behaart, nur am Hinterleibsende und, wie gesagt, an der Hinterschiene finden sich schwarze Fransen.

Trigona capitata Sm.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 299 ♀♂ (Belem, Insel Marajó, Macapá).

Diese eben angeführten Fundorte sind die einzigen bekannten, von der wertlosen Allerweltsangabe „Brazil" bei Smith abgesehen. Neue kann ich leider nicht beibringen, denn in Bates' Ausbeute vom Amazonenstrom stecken nur 3 ♀♀, ohne weitere Heimatsbezeichnung. Bei einem davon ist der Hinterleib pechschwarz, bei zweien, von Friese als „var. rufa" bestimmt, rotgelb. Es muss einstweilen dahingestellt bleiben, ob letzte Form nicht vielleicht an eine bestimmte Verbreitung gebunden ist und so als Subspezies M. capitata rufa Friese gelten darf.

Trigona williana Friese.

Friese, Természetr. Füzetek, 1900 p. 388 (Surinam, Belem, Obidos, Coary, Piauhy)

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 303 ♀ (Rio da Villanova, westlich von Macapá).

2 ♀♀ vom „Amazon" in Bates' Nachlass. In Surinam von Michaelis aufgefunden; 2 ♀♀ daher haben abweichend von den obigen Amazon-Stücken die Schläfen ganz rostfarben, und das Schwarz in Gesicht, Stirn und am Scheitel hat bei ihnen die Neigung in Rotbraun überzugehen. Jedoch sind dies vielleicht nur noch nicht ganz ausgefärbte Exemplare.

Trigona Heideri Friese.

Friese, Természetr. Füzetek, 1900 p. 389 (Belem, Colombien, Vilcanota in Perú, Obidos, Fonteboa, S. Paulo d'Olivença)

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 304 ♀ (Belem und Anajás auf Marajó).

Bisher nur von diesen Örtlichkeiten bekannt. In Bates' Ausbeute kommt die Art nicht vor; ich führe sie auch nur an, weil sie in Nordwest-Ecuador, bei Cachaví, im niedrigen, bis höchstens 500 Fuss ansteigenden Gelände, im XI.–XII. 1896 durch W. F. H. Rosenberg wiedergefunden wurde. Hier allerdings stellt sie eine besondere Subspezies vor, die T. Heideri occidentalis heissen mag. 3 ♀♀ davon im Münchener Staatsmuseum unterscheiden sich von der durch den sehr tüchtigen Hymenopterolog am Paraenser Museum, Herrn Adolf Ducke a. o. z. O. gegebenen Beschreibung der typischen Form durch rostgelbes oder -rotes, nicht schwarzes, aber seitlich doch hellgelb gerandetes Dorsulum und rostgelbe Endränder der im übrigen dunkelbraunen Dorsalsegmente 2–5 des Abdomens. Segment 1 ist oben in der Regel, 6 stets rostgelb. An eine Jugendfärbung etwa, wie sie gerade auch bei ausgeflogenen Meliponiden noch so häufig vorkommt, wird man, glaube ich, nicht zu denken haben, denn von den vorstehender Beschreibung

zu Grunde liegenden Exemplaren hat doch gerade dasjenige, bei dem die braune Färbung der Rückenseite der Hinterleibsringe am dunkelsten geworden ist, nicht auch das dunkelstgefärbte, vielmehr ein rostgelbes Dorsulum.

Eine weitere in diesen Formenkreis gehörige, repräsentative Art oder Subspezies ist die T. Mocsáryi Friese, die von der typischen Heideri nur durch die ganz rötlichgelbbraun gefärbten und ebenso behaarten Hinterbeine sowie durch den Mangel von dunklen Flecken an den Brustseiten abweichen soll. Ducke war wegen dieser geringen Differenz schon im Zweifel, ob Mocsáryi nicht vielleicht nur als „var." zu Heideri zu ziehen sei. Die Schwierigkeit wird sofort behoben, wenn man zu dem modernen, leider selbst von unseren besten Hymenopterologen kaum noch gewürdigten Begriffe der geographischen Rasse oder Subspezies greift, denn, wie man erfährt, kommt Mocsáryi ausschliesslich auf der Nord- (Guiana-) Seite der Amazonmündung, Heideri typica hingegen nur südwärts davon, auf Marajó und bei Belem vor.

Es mag vielleicht angezeigt erscheinen, die Unterschiede der drei soeben erörterten Subspezies in tabellarischer Form festzuhalten:

1. Dorsulum, abgesehen von den gelben Seitenrändern, schwarz. Abdomen am Grunde rostgelb, nach dem Ende zu allmählich verdunkelt, die Segmente ohne hellere Endränder . 2

— Dorsulum rostgelb oder -rot, seine Seitenränder hellgelb. Abdomen am Grunde rostgelb oder bräunlich, Segment 2—5 dunkelbraun mit rostgelben Endrändern, Segment 6 rostgelb. (Hintertibien in den letzten $^2/_3$ und Metatarsus schwarzbraun. Brustseiten rostgelb, kaum braun gefleckt.) Nordwest-Ecuador Trigona Heideri occidentalis Schlz.

2. Beinpaar III durchaus rötlichgelbbraun. Brustseiten rostgelb, stets ohne dunkle Flecken. Mazagão in Brasilianisch-Guiana, am Nordufer des Amazonenstromdeltas

Trigona Heideri Mocsáryi Friese

— Beinpaar III rötlichgelbbraun, Tibia aber und Metatarsus schwarzbraun. Brustseiten rostgelb, Mesopleuren oft

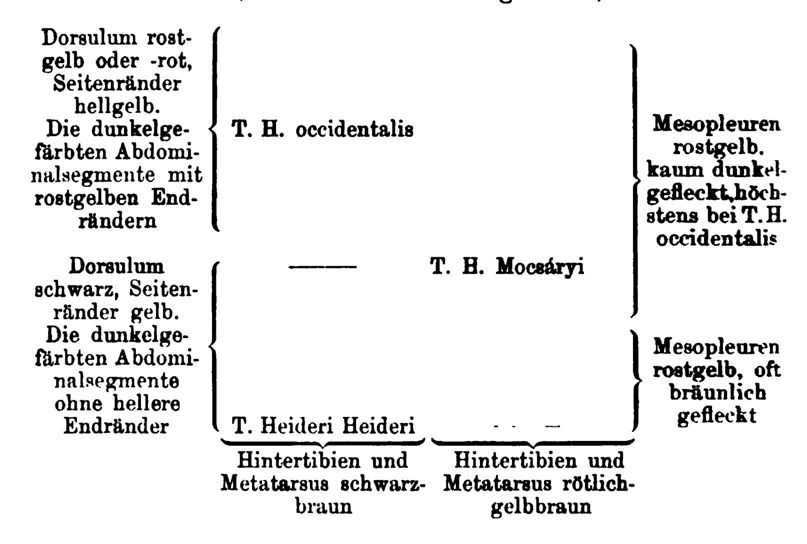
bräunlich gefleckt. Insel Marajó (Anajás) und Gegend bei Belem, am Südufer des Amazonenstromdeltas

Trigona Heideri Heideri Friese.

Jeder nun, der sich mit der Ausarbeitung von systematischen Bestimmungsschlüsseln befasst hat, weiss, dass diese stets, auch wenn sie noch so sorgfältig aufgebaut sind, Härten bezw. Unnatürlichkeiten in sich schliessen, die im Prinzip der distichen oder linearen Anordnung selbst begründet sind. Die einzelnen Trennungsgründe nämlich können nur immer gewisse morphologische Charaktere oder doch nur bestimmte Gruppen solcher berücksichtigen, andere Charaktere aber, die beispielsweise die Form a aufweist, b aber nicht, während sie c wieder hat, können, ohne die starre lineare Gruppierung zu stören, in dem Gegensatz a—b, um bei dem Beispiele zu bleiben, nicht gebracht werden. Man hat sich in solchen Fällen wohl damit geholfen, dass man die betreffenden Merkmale in die Tabelle bei a zwar aufnahm, sie aber, gleichsam nur als Anhängsel, in Klammern setzte. Der Formenkreis occidentalis-Mocsáryi-Heideri liefert nun ein aussergewöhnlich prägnantes Beispiel für das soeben Vorgebrachte. Subspezies a (occidentalis) unterscheidet sich von b und c (Mocsáryi bezw. Heideri) durch anders gefärbtes Dorsulum und Abdomen. Während nun aber b und c durch die Färbung der Hinterbeine und Mesopleuren von einander getrennt sind, hat a wieder je eins der letztgenannten Merkmale, mit c nämlich Hinterbeinfarbe und mit b Färbung der Mesopleuren gemein. Es entsteht somit ein völlig geschlossener Kreis oder Ring. Dies ist die Ordnung, in der alle Organismen, sei es nun in den höheren Gruppen (Ordnungen, Familien, Subfamilien), sei es in den niederen (Gattungen, Spezies, Subspezies) gruppiert sind. Das Leben bewegt sich eben nicht, wie man seiner Zeit bei Aufstellung der Descendenztheorie etwas voreilig annahm, in einer geraden Linie, auch nicht in Gestalt eines Baumes oder Fächers, wie viele Naturforscher jetzt noch wollen, sondern in Kreisen oder, allgemeiner gesprochen, in Kurven, die sich häufig zu Kreisen schliessen, und es gilt überall die Drei- (oder Mehr-) Zahl,

nicht aber die Zweizahl aufzusuchen. „Die Gerade ist die Linie des Todes, der Anorganismen (z. B. Kristalle).“ Diese Erkenntnis ist nicht neu: in der Ornithologie wird sie schon seit mehreren Jahren für die Artsystematik praktisch verwertet, die übrigen Zoologen aber, zum grossen Teil auch noch die Entomologen, haben sich ihr bisher noch fast völlig verschlossen. Nur von Konow ist, soweit ich zu überblicken vermag, die Theorie der systematischen Anordnung aller lebenden Wesen, speziell der Hymenopteren (Chalastrogastren) in Kreisform seit langem und wiederholt mit Schärfe verfochten worden. Ob freilich auch nun, wie dieser Forscher will, mit der soeben erörterten Erkenntnis die ganze Descendenztheorie in sich zusammenfällt, erscheint mir sehr fraglich, und neuere, umfangreichere Untersuchungen werden uns hierüber erst noch Klarheit schaffen müssen.

Wenn ich vorhin von der Natürlichkeit der zirkularen Tabellierung, wie ich sie nennen möchte, sprach, so soll damit die lineare durchaus nicht verworfen sein. Diese ist ein praktisches, überall in der Systematik leicht anwendbares Hilfsmittel, nur muss sie, wie erwähnt, stets unnatürlich bleiben, da dadurch nahe verwandte Formen oft weit von einander getrennt werden. Gereifte Systematiker kann sie darum auf die Dauer nicht befriedigen, und solche werden wohl früher oder später sich die zirkulare Gruppierungsform zu eigen machen. Diese nimmt sich, auf unseren Fall angewandt, so aus:



Trigona varia Lep.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 305 ♀ (Belem, Macapá).

Eine durch ihre in der Mitte plötzlich und sehr stark verbreiterten Hintertibien unverkennbare Art, von der in Bates' Nachlass ein ♀, leider, wie zumeist bei diesem, ohne nähere Fangortsangabe, vorliegt. An diesem Stück sind ausser den in Duckes Beschreibung erwähnten Stellen des Kopfes noch gelb gefärbt: das Nebengesicht und die inneren und äusseren Augenränder bis zum Scheitel hinauf. Ferner sind bei ihm die äussersten Vorderflügelspitzen milchig weiss. Ich muss es mangels Vergleichsmaterials einstweilen dahingestellt sein lassen, ob die im Vorstehenden angeführten Merkmale der T. varia durchgehends zukommen. Varia wurde nach brieflicher Mitteilung Herrn Frieses von Adolf Ducke ausser bei Belem (im XII. und V.) auch bei Santarem (11. VIII.) erbeutet.

Trigona jaty Sm.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 307 ♀ (Belem)

v. Ihering, ibidem, 19. Bd., 1903 p. 220, Taf. 17 Fig. 2 (Rio de Janeiro, S. Paulo).

Nester von Melipona- und Trigona-Arten mit lebendem Inhalte gelangen bisweilen mit importiertem Nutzholz nach europäischen Häfen. So erhielt ich T. jaty vom Hamburger Museum, das 1895 auf die erwähnte Weise in den Besitz eines Bruchstückes des Nestes von dieser Spezies gekommen war.

Eins der Hauptmerkmale, auf Grund deren Trigona generisch von Melipona abgetrennt ist, besteht in den Längenmassen der Vorderflügel, die bei Melipona kürzer als der Körper, bei Trigona ebenso lang oder länger als dieser sein sollen. Nun hat aber jaty entschieden kürzere Vorderflügel, als die Körperlänge beträgt, ein Beweis, dass der beregte Charakter nicht immer durchgreifend ist.

Ob übrigens Stücke von T. jaty aus Belem mit solchen aus Südbrasilien wirklich völlig übereinstimmen, wird noch zu untersuchen sein.

Trigona clavipes (Fabr.).

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 309 ♀ (Belem, Marajó, Mazagão „etc.")

v. Ihering, ibidem, 19. Bd., 1903 p. 207 (Rio Feio in der Nähe von Baurú in S. Paulo).

2 ♀♀ vom „Amazon", ohne präzisere Fundortsangabe.

Auch bei dieser Art wird nachzuprüfen sein, ob sie tatsächlich, wie die oben zitierte Literatur will, zugleich Nord- und Südbrasilien bewohnt, und wenn ja, ob und wie eventuell sie in diesen so weit von einander entfernten Strichen abändert.

Trigona fulviventris Guér.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 312 ♀♂ (Belem).

1 ♀ in Bates' Ausbeute aus Amazonien, leider ohne genauere Bezeichnung der Örtlichkeit.

Trigona amalthea (Oliv.).

T. Friesei v. Ihering, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 19. Bd., 1903 p. 204.

2 ♀○ vom „Amazon" und Santarem. Es scheint, dass diese Art dem grossen zentralbrasilianisch-guianischen und oberamazonisch-andinen Faunengebiete eigentümlich ist, denn Ducke führt sie aus der Gegend von Belem nicht auf, wohl aber ist sie in Ecuador gesammelt worden, von Rosenberg im XI. 1896 bei Cachabé im Flachlande, im V. 1897 bei Ibarra in 6600' Höhe und bei Cayambe im VI. 1897, von Haensch bei Balzapamba, Santa Inéz und Archidona.

Die Vorderflügel erreichen bei ihr bisweilen fast die doppelte Körperlänge. Unausgefärbte Exemplare mit rotbrauner Mundgegend, ebensolchem Mittelsegment und Beinen werden anscheinend viel unter ausgefärbten mitgefangen.

v. Ihering glaubt die Form des Nordens von der im Süden spezifisch abtrennen zu sollen und schlägt für erste den oben zitierten Namen T. Friesei vor. Ob zu einer derartigen nomenklatorischen Massregel eine Veranlassung vorliegt, kann ich mangels Materials aus dem Süden augenblicklich nicht entscheiden.

Trigona argentata Lep.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 313 ♀♂ (Belem, Calçoene).

2 ♀♀ unter Bates' Material vom Amazonenstrom, ohne nähere Bezeichnung einer Lokalität, durch Friese bestimmt. Andere Fundorte, als oben im Zitat angegeben, sind bis heute noch nicht bekannt. Eine Reihe von 12 Exemplaren (♀♀) besitze ich durch Fruhstorfer aus Surinam, von Michaelis gesammelt. Diese erscheinen etwas grösser und kräftiger (bis 6,5 mm lang) und mit relativ schmäleren Hinterschienen als die Amazon-Stücke.

Trigona hyalinata Lep.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 314 ♀ (Belem, Macapá).

Ursprünglich von São Paulo in Südost-Brasilien beschrieben merkwürdigerweise aber von v. Ihering nicht daher erwähnt. Aus dem genannten Staat erhielt ich sie durch Herrn E. Seeldrayers in Brüssel. Haensch sammelte sie 1897 bei Philadelphia im Staate Minas Geraes. 2 von Herrn Friese als dieser Art angehörig bestimmte ♀♀ vom „Amazon" stecken unter Bates' Material.

Trigona mexicana Guér.

3 ♀♀ vom „Amazon" im Münchener Museum, durch Bates gesammelt, wurden von unserem hervorragendsten Bienenkenner, Herrn H. Friese in Jena, als obige Art bestimmt.

Trigona lacteipennis Friese.

Friese, Természetr. Füzetek, 1900 p. 385 (Bolivien, Colombien, São Paulo [d'Olivença?])

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 315 ♀♂ (Belem, Macapá).

1 von Bates, an welchem genauen Orte, ist nicht angegeben, gesammelter ♀. Ebenso wie Ducke, fand auch ich s. Zt. die Art häufig im Gebiete des unteren Amazons, und es ist nur verwunderlich, dass sie bei ihrer Häufigkeit und hervorstechenden Färbung erst 1900 beschrieben wurde.

Trigona fulvohirta Friese.

Friese, Természetr. Füzetek, 1900 p. 385 (Colombien, Bolivien, Iquitos).

Ein ♀ in Bates' Sammlung vom „Amazon", leider wieder ohne nähere Heimatsangabe, wurde von meinem geschätzten Kollegen Herrn H. Friese als diese Art bestimmt. Das vorliegende Exemplar ist dadurch merkwürdig, dass bei ihm, abweichend von dem bei Meliponen Gewohnten, das Flügelgeäder fast völlig deutlich ausgebildet ist. Im Vorderflügel ist die Kubital- und Diskoidalader scharf ausgezogen und Kubitalquerader 1 und 2 sowie Diskoidalquerader 1 mit aller wünschenswerten Deutlichkeit vorhanden.

Stücke mit entwickeltem Flügelgeäder kommen in den Gattungen Melipona und Trigona ausnahmsweise vor — schon Lepeletier erwähnt solche bei Beschreibung seiner T. hyalinata.

Trigona bipunctata Lep.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 319 ♀♂ (Belem, Macapá)

v. Ihering, ibidem, 19. Bd., 1903 p. 205 (Petropolis bei Rio, Rio Feio in São Paulo).

Ursprünglich von Minas Geraes beschrieben. Ich konnte 4 ♀♀, leider ohne präzise Heimatsangabe (nur „Amazon") prüfen, die voneinander ziemlich differieren. Alle aber weichen von Duckes Beschreibung ab durch hellgelbliche, anliegende Be-

haarung in Gesicht und Stirn sowie auf der Unterseite des Kopfes, an den Schläfen, ferner durch filzige, lichte Grundbehaarung an der Unterseite des Bruststücks und an den Mesopleuren, endlich durch hellgraue, nicht schwärzliche, abstehende Behaarung der Bauchringe des Hinterleibes. Nur an zwei Stücken ist, wie es genannter Autor schildert, Dorsalsegment 1 und 2 schwarz und die übrigen Hinterleibssegmente licht befilzt, mit zerstreuter schwarzer Beborstung, und diese beiden Exemplare zeichnen sich überdies durch schwarzes Scutellum aus. Anders ist die Färbung der beiden übrigen. Sie zeigen übereinstimmend auf dem Rückenteile von Segment 1 hellgelbe Tomentierung, auf Segment 3—6 ausser dem hellen Grundfilze abstehende, ziemlich reiche goldgelbe Beborstung; während nun aber das Schildchen bei dem einen Exemplare ganz gelb ist, erscheint es beim andern braungelb. Ohne Zweifel haben wir es hier mit 2 oder, wenn auch die von Ducke beschriebene Form noch als verschieden angesehen wird, 3 besonderen geographischen Rassen oder Subspezies zu tun, die zu trennen es uns zur Zeit nur noch an genügend reichem und vor allen Dingen sorgfältig etikettiertem Vergleichsmaterial fehlt. Dass dem so sein wird, deutet schon die weite Verbreitung: São Paulo-Mündung des Amazons an, und auch Ducke fand bereits Verschiedenheiten zwischen der Form von Macapá an der Guiana-Seite der Mündung dieses Stroms und Belem.

Als Charakteristikum vorliegender Art möchte ich noch eine deutliche, eingedrückte Längslinie hervorheben, die sich über die Mitte des Dorsulums zieht; neben ihr steht an jeder Seite, am Vorderrande dieses Körperteils, eine kürzere solche Linie, und ein weiteres Paar schwächerer und kurzer Linien in der Höhe der Tegulae.

Trigona testaceicornis Lep.

Ducke, Zool. Jahrbücher, Abt. f. System., Geogr. u. Biol. d. Tiere, 17. Bd., 1902 p. 322 ♀♂ (Belem, Macapá).

Ursprünglich von Goyaz beschrieben. Unter dem Bates'schen Material befanden sich 2 ♀♀ ohne nähere Fundortsangabe

als „Amazon". Sonstige Stücke im Münchener Museum, deren Vaterland ich nicht habe ermitteln können, tragen die Eingeborenenbezeichnung „Jubatí mosquita", und als Gewährsmann dafür ist auf einem angesteckten Zettel Drory genannt. 2 weitere ♀♀ in dem nämlichen Museum stammen aus Bogotá in Colombien.

Kurz vor Ablieferung vorliegender Arbeit geht mir als separatum eine gewichtige Schrift H. v. Iherings, Direktors des Museu Paulista in São Paulo, Brasilien, zu, die unter dem Titel: „Biologie der stachellosen Honigbienen Brasiliens" in Heft 2 und 3 des 19. Bandes der „Zoologischen Jahrbücher, Abteilung für Systematik, Geographie und Biologie der Tiere" demnächst erscheinen wird. Darin sind unter Beigabe vieler Textillustrationen und anschaulicher Ganztafeln die biologischen Verhältnisse, insbesondere die Nestbauten einer ganzen Anzahl brasilianischer Melipona- und Trigona-Arten eingehend behandelt, und man darf getrost erklären, dass diese Abhandlung, die aufs neue von der Vielseitigkeit, dem rastlosen Eifer und eisernen Fleisse ihres Verfassers Zeugnis ablegt, noch auf lange Zeit hinaus für die Biologie der neotropischen Meliponiden — dieser Familienbegriff ist darin auch neu eingeführt — von grundlegender Bedeutung sein wird. Indessen dem sachkundigen Auge wird eine gewisse Schwäche nicht entgehen, die darin liegt, dass der Titel mehr verspricht, als der Inhalt der Schrift hält. Jener müsste nämlich eigentlich „Biologie der etc. Südbrasiliens" lauten, denn alle die wertvollen Beobachtungen, die uns v. Ihering mitteilt, beziehen sich doch ausnahmslos nur auf den subtropischen oder hart an der Grenze der Tropen liegenden Teil Brasiliens, eigentlich nur auf die Staaten São Paulo, Rio de Janeiro und z. T. Rio Grande do Sul. In diesen südlichen Gebieten macht sich aber schon ein merklicher Unterschied zwischen „Sommer" und „Winter" bemerkbar, und es liegt auf der Hand, dass Schlussfolgerungen, die aus der Biologie der dort heimischen Meliponiden gezogen werden, nicht ohne weiteres auch auf Nordbrasilien Anwendung finden können, worauf doch der Titel der v. Ihering'schen Arbeit hindeutet,

denn dort im Norden, wenigstens in Amazonien, der „Hylaea" der Pflanzengeographen, sind die klimatischen Verhältnisse wesentlich andere, insbesondere ist dort der Unterschied zwischen den Jahreszeiten ein sehr geringer. Hierzu kommt, dass, wie sich schon jetzt mit Sicherheit annehmen lässt, die Meliponiden-Formen Süd- und Nordbrasiliens auch morphologisch von einander verschieden sind. Ihre Systematik ist heute nur noch nicht genügend erforscht. Wenn daher unser Autor am Schlusse seiner Arbeit erklärt: „es lässt sich kaum erwarten, dass die Ausdehnung der Untersuchung auf die vielen in biologischer Beziehung noch unbekannten Arten der neotropischen Fauna das hier entworfene Bild wesentlich ergänzen oder verändern sollte, wohl aber wird man gespannt sein dürfen auf die noch unerforschte Biologie der in den Tropen der alten Welt lebenden Meliponiden", so lässt sich dem nach dem im Vorhergehenden Ausgeführten rückhaltlos nicht zustimmen, soweit die neotropischen Bienen in Frage kommen. Was die palaeotropischen Meliponiden betrifft, so ist deren Biologie so jungfräulich, wie sie sich v. Ihering vorstellt, denn doch auch nicht mehr. Im Berliner Museum befindet sich eine ganze Anzahl Nester von afrikanischen Arten dieser Bienenfamilie, wovon eines, das der Melipona togoënsis, von Stadelmann ziemlich ausführlich, unter Hinzufügung von Illustrationen, 1895 in den Sitzungsberichten der k. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin, auf S. 615—620 beschrieben wurde. Aus dieser Publikation geht immerhin soviel hervor, dass die afrikanischen Arten mit ihren amerikanischen Verwandten in den wesentlichen biologischen Zügen — Anbringung des Nestes in hohlen Bäumen oder Zweigen, Vorhandensein von Involucrum, Honigtöpfen und einer Flugröhre, horizontaler Schichtung der Brutwaben, gedeckelten Brutzellen, Beimischung von Sand und Harz zum Wachs — vollkommen übereinstimmen.

Wie grosse Vorsicht übrigens beim Erkunden von Naturgesetzen, zumal biologischen, geboten ist, erhellt wieder einmal aus einem Missgriff, der v. Ihering in seiner hier besprochenen Abhandlung passiert ist. Wir haben schon bei Besprechung von Tri-

gona jaty kurz gestreift, dass die morphologischen Charaktere, welche die Gattungen Melipona und Trigona trennen, schwanken. Es lag nahe, biologische Unterschiede ausfindig zu machen. v. Ihering hebt mehrere solche hervor; einer soll darin bestehen, dass die Brutwaben nur bei Trigona mit Durchlässen versehen sind, nicht aber auch bei Melipona. Es war mir ein Leichtes, die Hinfälligkeit dieser These an Hand des weiter oben beschriebenen Nestes von Melipona scutellaris im Münchener Museum zu erweisen.

Namen-Register.

Sach-Register.

Protokolle

der

Kartellversammlung

des

Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften

in München

am 5. und 6. Juni 1903.

Protokolle

der Kartellversammlung des Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften in München.

I.

Gesamtsitzung

am 5. Juni um 9 Uhr im Sitzungszimmer der mathematisch-physikalischen Klasse.

Anwesend als Delegierte:

aus Göttingen die Herren Kielhorn,
Riecke,
Wiechert,
aus Leipzig Herr Windisch,
aus Wien die Herren v. Schröder,
Exner,
Tschermak.

Geladen zur Teilnahme an den Beratungen:

a) über die luftelektrischen Forschungen
die Herren v. Bezold aus Berlin,
Ad. Schmidt aus Potsdam;

b) über die kritische Ausgabe des Mahābhārata
die Herren Jacobi aus Bonn,
Lüders aus Rostock,
Winternitz aus Prag.

Ausserdem nimmt im Auftrage der K. Preuss. Akademie in Berlin noch Teil Herr Pischel.

Aus München die Herren v. Voit,
Kuhn,
Ebert,
v. Groth.

Herr v. Voit eröffnet in Vertretung des verhinderten Präsidenten v. Zittel die Sitzung und begrüsst die Erschienenen. Von den zur Teilnahme an den Beratungen Eingeladenen konnten die Herren Elster und Geitel aus Wolfenbüttel nicht erscheinen.

Zum Zweck der Beratungen werden folgende Kommissionen gebildet:

1. **Kommission für luftelektrische Forschungen:** die Herren Riecke, Wiechert, Exner, v. Bezold, Schmidt, Ebert.

2. **Kommission für chemische Krystallographie:** die Herren Tschermak, v. Groth.

3. **Kommission zur Erörterung der Vorarbeiten für eine kritische Ausgabe des Mahābhārata:** die Herren Kielhorn, Windisch, v. Schröder, Kuhn, Jacobi, Lüders, Winternitz.

Die Frage, ob allgemeine Angelegenheiten erörtert werden sollen, wird einstimmig verneint.

II.

Kommission für Herausgabe einer chemischen Krystallographie.

Freitag, den 5. Juni, Beginn $9^3/_4$ Uhr.

Anwesend:

Herr v. Groth (München),
Riecke (Göttingen),
Tschermak (Wien),
Windisch (Göttingen).

Das Protokoll führt Herr v. Groth.

Den Gegenstand der Beratung bildet der Antrag der K. Akademie in Wien, vertreten durch Herrn Tschermak.

Antrag der K. Akademie in Wien.

Die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien hat auf der vorjährigen Kartellversammlung zu Göttingen in der Generalversammlung am 15. Mai durch ihren Delegierten Prof.

F. Becke den Antrag gestellt, dass die kartellierten Akademien und gelehrten Gesellschaften sowie die K. Akademie der Wissenschaften in Berlin eingeladen werden, durch Gewährung der Mittel zur Honorierung einer Hilfskraft die wünschenswerte rasche Vollendung des von Herrn Prof. P. Groth in München herauszugebenden Werkes: „Chemische Krystallographie" zu fördern, welcher Antrag die Zustimmung der anwesenden Delegierten fand. Die Wiener Akademie hatte schon im Jahre 1902 eine Unterstützung des genannten Unternehmens durch Entsendung eines jüngeren Mineralogen Dr. Glawatsch zu Prof. Groth bewirkt, auch die Geneigtheit zur weiteren Förderung des Werkes zu erkennen gegeben; auch hat die Akademie zu München zur Bestellung einer ferneren Hilfskraft für das Jahr 1902 den entsprechenden Beitrag bewilligt, ferner die Akademie zu Berlin den Betrag von 1800 M. für das Jahr 1903 dem Unternehmen gewidmet. So war für die Jahre 1902 und 1903 vorgesorgt. Bei der Kartellversammlung in Göttingen wurde auch speziell der Antrag gestellt, die Akademie in München, ferner die Gesellschaften der Wissenschaften in Göttingen und Leipzig einzuladen, die Subventionierung des gedachten Unternehmens im Jahre 1904 durch Bewilligung der Remuneration einer Hilfskraft in der Person des Herrn Dr. Gossner mit dem Betrage von 1800 M. zu betätigen. Der Delegierte für München (Ebert) erklärte sich mit diesem Antrage einverstanden, der Delegierte für Leipzig (His) fand sich bereit, den Antrag bei der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig zu befürworten, und die Delegierten für Göttingen gaben die gleiche Erklärung bezüglich der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ab.

Die Wiener Akademie beehrt sich nun, den letzteren Antrag bei der gegenwärtig tagenden Kartellversammlung zur nochmaligen Behandlung zu bringen. Bezüglich der Motivierung bedarf es wohl nur des Hinweises auf den im Vorjahre zu Göttingen gestellten Antrag, in dem das Unternehmen als ein für die Physik, Mineralogie und Chemie gleich wichtiges dargestellt wurde, dessen rascher Abschluss als im hohen Grade wünschenswert erscheint. Das Ziel der diesjährigen Besprechung

wäre demnach die endgültige Erklärung seitens der genannten wissenschaftlichen Korporationen zu Göttingen, Leipzig und München, die Subvention per 1800 M. für das Jahr 1904 zur Bestreitung zu übernehmen.

Bericht der Kommission.

Im Auftrage der K. Akademie in Wien hat Dr. Glawatsch sich an den Vorarbeiten für das genannte Werk in der Weise beteiligt, dass er die ausserordentlich zerstreuten, krystallographischen Angaben in der älteren metallurgischen Literatur, sowie diejenigen in den Werken über mikroskopisch-chemische Analyse auszog, sammelte und nach dem für die chemische Krystallographie adoptierten Programm zusammenstellte. Diese umfangreiche, für die Ausarbeitung der letzteren sehr förderliche Arbeit hat Dr. Glawatsch teils im Sommer 1902 in München, teils seitdem in Wien ausgeführt und soeben in München zum Abschlusse gebracht.

Der durch die Subvention der Akademie in München für 1902 und der K. Preuss. Akademie zu Berlin für 1903 zur Hilfsarbeit an dem Werke berufene Dr. Gossner hat eine Reihe von Experimental-Untersuchungen solcher Gruppen krystallisierter Körper ausgeführt, für welche noch wesentliche Lücken und Widersprüche in den bisherigen Angaben vorlagen, und eine Reihe anderer derartiger Untersuchungen begonnen. Ausserdem hat derselbe eine Anzahl älterer, krystallographischer Untersuchungen in die jetzt übliche Art der Darstellung umgearbeitet. Wenn Dr. Gossner auch im Jahre 1904 in gleicher Weise für das Werk beschäftigt werden könnte, so würde voraussichtlich der allgemeine Teil und die spezielle Bearbeitung der unorganischen Verbindungen Anfang des Jahres 1905 soweit vollendet sein, dass beides im Laufe der Jahre 1904 und 1905 erscheinen könnte.

Die Kommission erlaubt sich nun den Vorschlag zu machen, die Delegierten-Versammlung möge bei den Akademien zu Wien, Leipzig und Göttingen den Antrag stellen, dass die Remuneration des Dr. Gossner für 1904 im Betrage von 1800 M. von den drei genannten Akademien zu gleichen Teilen bewilligt werden.

III.

Kommission für luftelektrische Forschungen.

I. Sitzung.

Freitag, den 5. Juni $9^3/_4$ Uhr in dem Akademiegebäude.

Anwesend:

Herr v. Bezold (Berlin),
Ebert (München),
Exner (Wien),
Riecke (Göttingen),
Schmidt (Potsdam),
Wiechert (Göttingen).

Herr Ebert begrüsst die anwesenden Herren der Kommission und teilt mit, dass die Herren Elster und Geitel an der Teilnahme der diesjährigen Besprechungen leider behindert sind, was lebhaft bedauert wird. Herr Günther hat sich für die Vormittagssitzung entschuldigt.

Herr Ebert legt die den Beratungen zu Grunde zu legende Denkschrift vor und dankt den an ihrer Abfassung beteiligten Herren.

Die Kommission wählt Herrn Riecke zu ihrem Vorsitzenden und Herrn Ebert zum Protokollführer.

Es wird unmittelbar in die Besprechung des vorläufigen Entwurfs des an die internationale Association zu richtenden Antrages eingetreten, welcher Punkt für Punkt durchberaten wird. Dabei werden die an den verschiedenen Observatorien und Institute bezüglich der Apparate und Messmethoden weiterhin gemachten Erfahrungen mitgeteilt; ferner wird über die Tätigkeit der einzelnen luftelektrischen Stationen berichtet; diese Berichte sollen in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie veröffentlicht werden.

Schluss der Sitzung 12 Uhr.

II. Sitzung.

Freitag, den 5. Juni nachmittags $^{3}/_{4}4$ Uhr im physikalischen Institute der Technischen Hochschule.

Anwesend die Herren:

v. Bezold,	Ebert,
Exner,	Günther,
Riecke,	Schmidt,
Wiechert,	Windisch,

letzterer als Vertreter der Sächsischen Akademie.

Zunächst werden die im Institute aufgestellten luftelektrischen Messinstrumente eingehend besichtigt und besprochen. Hierauf werden die Beratungen über das Programm fortgesetzt und abgeschlossen. Sodann wird zur Besprechung der Organisation der luftelektrischen Beobachtungsstationen übergegangen. Die Herren Riecke und Ebert werden beauftragt, die einzelnen zur Sprache gebrachten Punkte zusammen zu stellen und zu einem II. Teile der Antragsbegründung, deren I. Teil das Programm der vorgeschlagenen Einzelprobleme darstellt, zu verarbeiten, sowie den Wortlaut des Antrages selbst zu formulieren. Die Genannten stellen die Abfassung des betreffenden Schriftstückes für anderen Tages 11 Uhr in Aussicht, auf welchen Zeitpunkt der Beginn der 3. Sitzung festgesetzt wird.

Schluss der Sitzung 6 Uhr.

III. Sitzung.

Samstag, den 6. Juni vormittags $11^{1}/_{2}$ Uhr in der Akademie.

Anwesend die Herren:

v. Bezold,	Ebert,
Exner,	Günther,
Riecke,	Schmidt,
Wiechert.	

Die Herren Riecke und Ebert legen den Entwurf der ihnen zur Ausarbeitung übertragenen Denkschrift sowie des Antrages an die Association vor. Beide Entwürfe werden ein-

gehend durchberaten und im Wortlaute, bis auf redaktionelle Änderungen, die den genannten beiden Herren überlassen werden, festgestellt.

Die Protokolle über die drei von der Kommission abgehaltenen Sitzungen werden verlesen und genehmigt.

Schluss der Sitzung 12³/₄ Uhr.

IV.

Kommission zur Erörterung der Vorarbeiten für eine kritische Ausgabe des Mahābhārata.

Anwesend:

Herr v. Christ (München),
Jacobi (Bonn),
Kielhorn (Göttingen),
Kuhn (München),
Lüders (Rostock),
Pischel (Berlin),
v. Schröder (Wien),
Windisch (Leipzig),
Winternitz (Prag).

Die Kommission einigte sich über folgende Beschlüsse:

1. In der Sitzung der Association Pfingsten 1904 soll mitgeteilt werden, dass mit den Mitteln des Kartells die Katalogisierung und Klassifizierung der in Europa befindlichen Handschriften des Mahābhārata und einige andere unerlässliche Vorarbeiten, wie die Kollationierung südindischer Handschriften und eine Inhaltsübersicht des Mahābhārata in Angriff genommen oder teilweise ausgeführt sind.

2. Die im Kartell vereinigten Akademien mögen beantragen, dass die kritische Ausgabe des Mahābhārata zur Sache der Association gemacht werde, und werden derselben ein Promemoria vorlegen, wie eventuell die Arbeiten einzuleiten und zu organisieren sind.

3. Mit der Abfassung dieses Promemoria, dessen Grundzüge eingehend erörtert wurden, sollen die Herren Jacobi,

Lüders und Winternitz beauftragt, und soll dasselbe bis zum 1. Oktober 1903 den kartellierten Akademien zur Genehmigung vorgelegt werden. Als Hauptgrundsätze wurden festgestellt:

a) Die indische Regierung möge von der Association ersucht werden, die in ihrem Besitz befindlichen Manuskripte nach Europa zu senden und beim Search of Sanskrit MSS. ihre besondere Aufmerksamkeit auf den Ankauf alter Handschriften des Mahābhārata zu richten.

b) Eventuell soll einem Beschlusse des Orientalisten-Kongresses zu Hamburg entsprechend Prof. Lüders zu bezüglichen Untersuchungen nach Indien entsendet werden.

c) Die Gesamtkosten werden auf 120000 M. veranschlagt, die sich auf 12 Jahre verteilen würden. Dabei würden sich nach ungefährer Berechnung die Druckkosten auf 60000 M., die Honorare auf 40000 M. und die einmaligen Kosten der event. Reise nach Indien auf 20000 Mk. belaufen.

4. Als Mitglieder des von der Association event. einzusetzenden internationalen Komitees sollen seitens der kartellierten Akademien die Herren Jacobi, Lüders und Winternitz in Vorschlag gebracht werden.

V.

Gesamtsitzung.

Anwesend die Herren:

v. Bezold,	Ebert,
Exner,	v. Groth,
Günther,	Jacobi,
Kielhorn,	Kuhn,
Lüders,	Pischel,
Riecke,	Schmidt,
v. Schröder,	Tschermak,
v. Voit,	Wiechert,
Windisch,	Winternitz.

Herr v. Voit eröffnet die Sitzung und bittet die Berichte und Protokolle der Kommissionen zu verlesen.

Herr v. Groth verliest das Protokoll der Kommission für Herausgabe einer chemischen Krystallographie.

Herr Ebert gibt von dem vereinbarten Protokoll Kenntnis. Der Antrag der kartellierten deutschen Akademien bezüglich der luftelektrischen Forschungen soll lauten:

„Die internationale Association der Akademien möge die Erforschung der luftelektrischen Erscheinungen in die Zahl der von ihr verfolgten Aufgaben aufnehmen und für einen Zeitraum von zwei Jahren luftelektrische Beobachtungen an einer grösseren Zahl von Stationen, die in angemessener Weise über die Erdoberfläche verteilt sind, ausführen lassen".

Die Begründung dieses Antrages und ein vorläufiges Programm für die Ausführung der Beobachtungen und die Einrichtung von luftelektrischen Stationen ist in der angefügten Denkschrift[1]) enthalten, aus der die wichtigsten Punkte verlesen werden.

Herr Kuhn verliest das Protokoll der Mahābhārata-Kommission.

Der Antrag der luftelektrischen Kommission, ebenso der Vorschlag der Mahābhārata-Kommission und der Antrag der Kommission für chemische Krystallographie werden angenommen.

Hierauf berichtete Herr v. Dyck über den Fortgang der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Der augenblickliche Stand der erfolgten Publikationen stellt sich folgendermassen:

Es sind im Ganzen 18 Hefte (darunter 6 im verflossenen Jahre) erschienen in der folgenden Reihe, in welcher die zuletzt erschienenen Hefte gesperrt gedruckt sind:

Band I:	Heft 1	erschienen	am	7. November 1898.
	„ 2	„	„	26. Januar 1899.
	„ 3	„	„	15. September 1899.
	„ 4	„	„	17. Oktober 1899.
	„ 5	„	„	29. Mai 1900.
	„ 6	„	„	30. Mai 1901.
	„ 7	„	„	11. September 1902.
Band II, 1:	„ 1	„	„	10. August 1899.
	„ 2/3	„	„	10. April 1900.
	„ 4	„	„	31. Juli 1900.
Band II, 2:	„ 1	„	„	27. Dezember 1901.
Band III, 2:	„ 1	„	„	9. März 1903.
III, 3:	„ 1	„	„	30. Oktober 1902.
Band IV, 1:	„ 1	„	„	13. September 1901.
	„ 2	„	„	8. Juli 1902.
Band IV, 2:	„ 1	„	„	6. Juni 1901.
	„ 2	„	„	23. April 1903.
Band V, 1:	„ 1	„	„	23. April 1903.

Bezüglich der in Vorbereitung befindlichen Hefte ist das nachfolgende zu bemerken:

Das Register zu Band I (Arithmetik und Algebra), für dessen sämtliche Artikel zunächst Einzelregister herzustellen sind, ist in Vorbereitung.

In Band II (Analysis) wird der Fortgang des Druckes augenblicklich durch eine grössere vorbereitende Arbeit verzögert.

Von Band III (Geometrie) ist das Heft 2 der 3. Abteilung nahezu vollendet, zwei weitere Hefte der 1. und 2. Abteilung werden im kommenden Winter zur Ausgabe gelangen.

In Band IV (Mechanik) ist das dritte Heft der 1. Abteilung zur demnächstigen Veröffentlichung bereit. Im übrigen ist der Fortgang der Arbeit ein stetiger, nimmt aber allerdings eine sehr viel grössere Zeit in Anspruch, als man zu Anfang in Aussicht genommen hatte. Erschwerend wirkt besonders, dass Band IV vielfach in Nachbargebiete der Technik eingreift, deren mathematische Behandlungsweise noch keine endgültige Form

angenommen hat, so dass eine für unsere Encyklopädie passende Berichterstattung die kritischen Grundlagen vielfach erst selbst schaffen muss.

Von Band V (Physik) wird ein weiteres Heft im Herbste zur Ausgabe bereit sein.

Für die 1. Abteilung (Geodäsie und Geophysik) des Bandes VI sind noch mannigfache Vorarbeiten bis zum Erscheinen eines Heftes zu erledigen. Auch von der 2. Abteilung (Astronomie) liegen erst einzelne Artikel in erster Fassung vor und werden noch Änderungen in der Disposition der einzelnen Abschnitte zu treffen sein.

Die Ausarbeitung der französischen Ausgabe ist in stetigem Fortschreiten begriffen, auch die nicht ganz leichte Titelfrage dieser Ausgabe, sowie die Feststellung der Rechte der deutschen Herausgeber und Autoren gegenüber den französischen Bearbeitern hat eine befriedigende Lösung gefunden.

Für den Herbst ist eine Konferenz der Mitglieder der akademischen Kommission mit den Redakteuren und dem Vertreter der Verlagsbuchhandlung in Göttingen in Aussicht genommen, in welcher ganz besonders die Frage der Gestaltung der Register, die erforderliche Neudisposition des Bandes VI, sowie die Frage der Herausgabe des Bandes VII (historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd) in Beratung gezogen werden soll.

Herr v. Voit schliesst hierauf die Gesamtsitzung und damit die Pfingstversammlung des Verbandes der deutschen wissenschaftlichen Körperschaften. Herr Windisch spricht den Dank der auswärtigen Delegierten und der übrigen Fachgelehrten aus, welche an den Beratungen teilgenommen haben. Herr v. Voit erwidert den Dank im Namen der Bayer. Akademie.

Anhang.

Denkschrift

zur

Begründung des Antrages der kartellierten Deutschen Akademien

an die

internationale Association der Akademien

betreffs

Organisation luftelektrischer Forschungen.

Wie die Probleme des Erdmagnetismus zu ihrer Förderung das Zusammenwirken einer grösseren Reihe über die ganze Erde verbreiteter Beobachtungsstationen erfordern, so bedarf auch die Erforschung der allezeit und allerorten gegenwärtigen elektrischen Kräfte der Erde des Zusammenschlusses von Gelehrten, die weit über den Wirkungskreis des einzelnen Forschers hinaus über den Erdball zerstreut sind. Die Begründung einer internationalen Organisation für luftelektrische Forschungen bildet eine der würdigsten Aufgaben für die internationale Association der Akademien, gerade im gegenwärtigen Entwickelungsstadium der Elektrizitätslehre, wo die Übertragung der durch die Untersuchungen zahlreicher Forscher aller Nationen so schnell geförderten Lehre von den Gasionen auf die Fragen der Luftelektrizität sowohl in qualitativer wie in quantitativer Hinsicht die überraschendsten Resultate zeitigt und zu immer neuen Fragestellungen auf das lebhafteste anregt.

Von diesen Erwägungen ausgehend, haben die kartellierten Akademien in den letzten drei Jahren (1901 in Leipzig, 1902 in Göttingen, 1903 in München) durch eine dazu niedergesetzte Kommission eingehende Beratungen anstellen lassen über die Aufgaben und Ziele, welche einer internationalen Organisation vorzuschlagen sein würden. Dabei war das Augenmerk vor allem auch auf die Ausarbeitung der Methoden und die Prüfung der Bedingungen gerichtet, deren Erfüllung für die Vergleichbarkeit der Beobachtungen als notwendig erschien. Als das Ergebnis dieser Beratungen beehren sich die Akademien von Göttingen, Leipzig, München und Wien das folgende Programm der auf die Zeit von 2 Jahren berechneten Arbeiten und Einrichtungen luftelektrischer Stationen der internationalen Association der Akademien vorzulegen, in der Hoffnung, dass die Fragen der luftelektrischen Forschungen Gegenstand der Beratungen der allgemeinen Versammlung der associierten Akademien im Jahre 1904 in London bilden werden. Die kartellierten Akademien haben selbst in den letzten Jahren eine Reihe von luftelektrischen Stationen begründet und ausgerüstet. Die wertvollen Resultate, die sich schon jetzt aus ihren Arbeiten ergeben haben, sind in den Berichten der beteiligten Akademien veröffentlicht.

Wir beginnen unsere Ausführungen mit einer Aufzählung derjenigen Messungen, welche im allgemeinen den Gegenstand der Arbeiten eines luftelektrischen Observatoriums bilden können; dabei bemerken wir im voraus, dass die unter 1, 2, 3 benannten Arbeiten solche sind, die an allen Stationen regelmässig und übereinstimmend ausgeführt werden sollten; anderenfalls würde das Beobachtungsmaterial einen fragmentarischen Charakter besitzen und würde zur Beantwortung fundamentaler Fragen von vornherein unzureichend sein.[1])

---

[1]) Die eingehendere Begründung aller einzelnen Punkte sowie die näheren Angaben über die Beobachtungsmethoden finden sich in den Kommissionsberichten und den Protokollen der Delegiertenversammlungen sowie in den dazu gehörenden Abhandlungen der betreffenden kartellierten Akademien.

I.

Aufgaben luftelektrischer Forschungen.

1. **Potentialmessungen.** Messungen des elektrischen Potentialgefälles am Erdboden an klimatisch typischen über die ganze Erde von der arktischen bis zur tropischen Zone verteilten Stationen sollen den Zusammenhang dieser Grösse mit den örtlichen Bedinguugen und den meteorologischen Verhältnissen sowie die Gesetze ihrer täglichen und jährlichen Periodicität feststellen. Sehr wichtig wäre es, die Messungen auch auf die grossen ozeanischen Gebiete auszudehnen; erst dann kann der Frage näher getreten werden, ob in einem gegebenen Momente etwaigen negativen Ladungen einzelner Gebiete andere mit positiver Ladung gegenüberstehen. Messungen auf ausgedehnten Hochebenen würden Aufschluss über den Einfluss der absoluten Höhe auf die Grösse des Potentialgefälles geben, solche an Orten mit ausgesprochenem maritimen oder kontinentalen Klima, mit Steppen- und Wüstenklima Aufschluss über die Bedeutung der einzelnen meteorologischen Elemente für den elektrischen Zustand der Erdoberfläche und der angrenzenden Luftschichten. Insbesondere würden auch die elektrischen Verhältnisse vor und nach einem Gewitter hier sowie bei den folgenden Messungen von Interesse sein.

Die Beobachtungsmethode ist vollkommen ausgearbeitet und erprobt worden, namentlich durch die Untersuchungen Franz Exners. Empfohlen wird die Anwendung von Elektroskopen mit innengelegener Bernsteinisolierung und Natriumtrocknung, wie sie von Elster und Geitel am Exnerschen Elektroskope angebracht wurden. Die Beobachtungsresultate sollen immer auf Volt pro Meter umgerechnet und auf die Ebene reduziert werden, wenn nicht schon an sich auf völlig freiem und ebenem Terrain, sondern in der Nähe von Gebäuden, Bäumen oder auf sonst irgendwie kupiertem Terrain gemessen wurde.

Eine Reihe von Hauptstationen sind mit selbstregistrierenden Potentialmessaparaten auszurüsten. An diese sind die Beobachtungen mit den transportablen Elektrometern anzuschliessen. Wo das photographische Registrierverfahren zu kostspielig ist und zu umständlich erscheint, kann das Benndorfsche mechanisch registrierende Elektrometer empfohlen werden, welches sich an den von der Wiener Akademie ausgerüsteten Stationen bewährt hat.

Als Elektroden können ausser Flammen- und Wassertropfkollektoren eventuell auch Zinkelektroden oder die sehr bequem zu handhabenden Radiumelektroden dienen, nur muss bei Anwendung der letzteren stets im Auge behalten werden, dass Räume sowie Apparate durch Radium und Polonium ausserordentlich leicht infiziert werden können. Man muss daher bei der Verwendung radioaktiver Substanzen mit äusserster Vorsicht zu Werke gehen.

Wenn aus der Messung des Potentialgradienten die Dichte der elektrischen Oberflächenbelegung der Erde berechnet wird, so sollte das Resultat in Coulomb pro Quadratkilometer angegeben werden.

2. Zerstreuungsmessungen. Wird ein gut isolierter, vor direkten elektrischen Einflüssen genügend geschützter elektrisch geladener Metallkörper der freien Atmosphäre ausgesetzt, so ergibt sich, abgesehen von den besonders zu bestimmenden Isolationsverlusten über die Isolierstützen hinweg jederzeit ein bestimmter Ladungsverlust. Elster und Geitel, welche einen leicht transportablen und sehr handlichen Apparat zur Bestimmung dieser „Elektrizitätszerstreuung“ konstruierten, haben gezeigt, dass dieser Ladungsverlust durch die Wanderung und Ladungsabgabe frei in der Luft beweglicher Jonen bedingt ist, deren relative Zahl durch diese Zerstreuungsbeobachtungen geschätzt wird. Solche Beobachtungen geben also ein Mass für die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre. Diese ist von der Tages- und Jahreszeit und von der Lage des Beobachtungsortes abhängig und wird ausserdem in charakteristischer Weise von den meteorologischen Bedingungen beeinflusst.

Von besonderem Interesse sind Messungen der Leitfähigkeit in verschiedenen Meereshöhen, an Seeküsten und auf den freien Ozeanen sowie andererseits auch in abgeschlossenen Räumen wie Höhlen, Bergwerken, engen Couloirs oder Kaminen im Hochgebirge und endlich in hohen geographischen Breiten im Zusammenhange mit Polarlichtbeobachtungen.

Als Mass der Leitfähigkeit wird der prozentuale Ladungsverlust $\overset{+}{a}$ bezw. $\overset{-}{a}$, der pro Minute eintritt, betrachtet; charakteristisch ist insbesondere auch das Verhältnis $q = \overset{-}{a} / \overset{+}{a}$, welches ein Mass für die Unipolarität der augenblicklichen Leitfähigkeit darstellt.

Bei den Beobachtungen mit dem Elster-Geitelschen Apparate wird der Einfluss des elektrischen Feldes der Erde ausser durch Wahl eines geschützten Aufstellungsortes nach Möglichkeit von dem „Zerstreuungskörper" durch ein Schutznetz von bestimmter Maschenweite, Drahtstärke und Grösse ferngehalten, welches jederzeit zu erden ist. Die Resultate der Messungen mit und ohne Schutznetz sind nicht ohne weiteres untereinander vergleichbar. Auch hat sich gezeigt, dass verschiedene Apparate gleicher Konstruktion und Dimension selbst am gleichen Beobachtungsorte zur nämlichen Zeit nicht völlig übereinstimmende Werte ergeben, was in erster Linie auf Wechsel der Luftströmungen und auf Diffusionsvorgänge zurückzuführen sein dürfte. Es soll daher die Art und der Ort der Aufstellung des Zerstreuungsapparates bei der Mitteilung der Beobachtungsresultate genau angegeben werden. Wenn durch die erwähnten Umstände auch die Vergleichbarkeit der an verschiedenen Beobachtungsstationen erhaltenen Werte etwas beschränkt wird, so sind die mit diesem Apparate bereits erhaltenen Resultate doch von so grossem Interesse, dass wir auf die Ausdehnung der Zerstreuungsmessungen mit dem Elster-Geitelschen Apparate auf weite Gebiete das grösste Gewicht legen.

3. Jonenzählungen. Wird Luft, welche freie Jonen enthält, durch ein starkes elektrisches Feld gesaugt, so werden die Jonen gegen die Wände desselben getrieben und geben

hier ihre Ladungen ab. So wird die Luft bei dem von Ebert konstruierten Aspirationsapparate durch den Zwischenraum zwischen zwei konaxial ineinander steckenden Zylindern, von denen der innere, isolierte, mit dem Elektroskope in Verbindung steht, durch eine kleine Luftturbine hindurchgesaugt. Aus dem Ladungsverluste ergibt sich (nach Abzug der bei ruhender Luft eintretenden Ladungsverminderung) mittels der bekannten Kapazität und Fördermenge des Apparates die Elektrizitätsmenge, welche pro Kubikmeter in Form von Jonenladungen in der Atmosphäre vorhanden ist. Mit Hilfe des für die Jonenladungen sich ergebenden Wertes kann hieraus die Jonenzahl gefunden werden.

Messungen mit dem „Jonenzähler" sind neben Potentialmessungen und Zerstreuungsmessungen in erster Linie zu empfehlen, da sie eine bestimmt definierte Grösse in absolutem Masse ergeben.

4. Messungen der Niederschlagselektrizität. Da erfahrungsgemäss während des Niederganges von Regen, Schnee und Hagel das elektrische Potentialgefälle sehr grossen Schwankungen unterworfen ist und diesen Niederschlagsprodukten selbst sehr wechselnde Ladungen anhaften, so ist eine besondere Bestimmung dieser „Niederschlagselektrizität" zur Entwirrung der unter diesen Umständen auftretenden, sehr komplizierten elektrischen Verhältnisse von grosser Bedeutung. Es muss indessen bemerkt werden, dass die Beobachtungen der Niederschlagselektrizität ihren vollen Wert erst gewinnen, wenn sie mit Registrierungen des Potentialgefälles und der Niederschlagsmenge selbst verbunden werden. Mit Rücksicht auf die dazu nötigen grösseren instrumentellen Hilfsmittel werden diese Arbeiten nur auf wenige Beobachtungsorte beschränkt bleiben. Immerhin würde es schon von Wichtigkeit sein, die gesamte durch den Niederschlag herabgeführte Elektrizitätsmenge zu bestimmen, namentlich in klimatisch sehr verschiedenen Zonen.

5. Messungen der Radioaktivität in der freien Atmosphäre. Abgesehen von der Wirkung positiver und negativer Gasionen

besteht in der natürlichen Luft immer in grösserem oder geringerem Betrage eine Ursache, durch welche die mit der Luft in Berührung stehenden Körper die Eigenschaft einer schwachen induzierten Radioaktivität erlangen. Dieselbe kann dadurch in ihrer Wirkung verstärkt werden, dass der Versuchskörper, am besten ein 1 mm dicker Draht aus beliebigem Materiale auf einem negativen Potentiale (von etwa — 2000 Volt) längere Zeit (zwei Stunden) erhalten wird. Wird der Draht dann in einen den Elster-Geitelschen Zerstreuungskörper allseitig umschliessenden Metallzylinder von der Grösse des in 2. erwähnten Schutznetzes gebracht, so äussert sich seine Radioaktivität in einer erhöhten Leitfähigkeit der in diesem Zylinder eingeschlossenen Luft. Elster und Geitel haben gezeigt, dass man die radioaktivierende Wirkung durch eine Zahl A, die Aktivierungszahl, charakterisieren kann, welche sich der Drahtlänge proportional erweist und welche direkt durch den Ladungsverlust des Zerstreuungskörpers in dem genannten Apparate bestimmt werden kann. Es soll $A = 1$ gesetzt werden, wenn die durch 1 Meter des exponierten Drahtes in 1 Stunde bewirkte Potentialerniedrigung 1 Volt beträgt. Die durch diese Zahl gemessene aktivierende Wirkung der Atmosphäre muss auf die Neubildung von Jonen von grösstem Einflusse sein und verdient daher ein besonders eingehendes Studium.

Bei sehr schwachen Aktivierungen sowie zur Untersuchung der durch die atmosphärischen Niederschläge herabgebrachten radioaktiven Bestandteile empfiehlt sich ein Zerstreuungsapparat von noch kleinerer Kapazität und kleinerem Luftvolumen, dessen Angaben auf die des Elster-Geitelschen Apparates durch Verwendung eines sehr schwach, aber konstant radioaktiven Präparates zu reduzieren sind.

6. Messungen der Bodenemanation und Vergleiche der Aktivität des Bodenmaterials. Ein Teil der in der Atmosphäre angetroffenen aktivierenden Wirkung entstammt nach den Untersuchungen von Elster und Geitel sicher dem Erdboden, aus dem namentlich bei sinkendem Luftdrucke eine Art Emanation hervordringt, wie sie die Luftströme enthalten, welche über

Thor- und Radiumsalze hinweg gestrichen sind. Um ihre ionenbildende Wirkung zu studieren, stellt man den Elster-Geitelschen Zerstreuungsapparat, von dem man das Schutznetz abgenommen hat, unter eine grosse, mit einem elektrostatisch schirmenden Drahtnetze ausgekleidete Glasglocke oder eine Metallglocke mit eingekitteten Glasfenstern, und führt der in dieser abgeschlossenen Luft eine bestimmte Literzahl der aus den Erdkapillaren ausgesaugten Bodenluft zu; die Leitfähigkeit erhöht sich bis zu einem bestimmten Maximum, welches bei verschiedenen Wetterlagen verschieden hoch ausfällt, selbst wenn man die Luft immer an derselben Stelle und aus derselben Tiefe emporgesaugt hat.

Da für die Bodenluftemanation der Untergrund von Bedeutung ist, so empfiehlt es sich ferner gelegentlich auch die einzelnen denselben zusammensetzenden Bodenproben auf Radioaktivität hin zu untersuchen. Zu diesem Zwecke füllt man eine bestimmte Menge Erde in eine flache Schale ein, setzt den Zerstreuungsapparat darauf und stülpt die Glocke darüber. Die Radioaktivität wird durch den Endwert der Zerstreuung gemessen, den die unter der Glocke eingeschlossene Luft nach längerer Zeit erreicht. Typisch verschiedene Bodenmaterialien (Wüstensand, vulkanische Aschen, Moorboden, Eis u. s. w.) auf diese Weise zu prüfen, würde wichtige Anhaltspunkte ergeben. Es wird ferner empfohlen, Proben auffallend stark radioaktiven Bodenmateriales Observatorien oder Instituten zu übermitteln, welche im stande sind, dieselben spektralanalytisch oder nach anderen Richtungen hin weiter zu untersuchen.

7. Elektrische Messungen im Luftballon. Als sehr wichtig zur Erforschung der luftelektrischen Vorgänge in der Atmosphäre haben sich ergänzende Messungen der einzelnen bestimmenden Grössen (Potentialgefälle, Zerstreuungswerte, Jonengehalt, Aktivität) im Freiballon erwiesen. Freilich arbeitet man hier nicht im freien Erdfelde, sondern in einem durch die Anwesenheit des Ballons mehr oder weniger gestörten Felde; der Ballon selbst scheint nicht ganz elektrisch indifferent zu sein (so wird er z. B. beim Ballastauswerfen positiv elek-

trisiert). Eine genaue Erforschung der dadurch herbeigeführten Felddeformationen ist daher vor allem wichtig.

Zu Potentialmessungen sind Wassertropfkollektoren oder Elektroden aus frisch amalgamierten Zinkflächen zu empfehlen, welch letztere in den reinen höheren Luftschichten so stark lichtelektrisch sind, dass sie auch schon im zerstreuten Tageslichte sehr rasch ladungsausgleichend wirken. Man benützt zwei in verschiedener Höhe befindliche Zinkelektroden, von welchen die eine mit dem Innern, die andere mit dem Gehäuse des Elektrometers verbunden ist. Da die durch die Zinkelektroden herbeigeführte Leitung der umgebenden Luft unipolar ist, müssen vor jeder Messung Gehäuse und Inneres des Elektroskopes für einen Augenblick miteinander verbunden und negativ in Bezug auf die Umgebung geladen werden; nach der Aufhebung der genannten Verbindung verliert jede der beiden Elektroden so lange negative Elektrizität, bis der Potentialausgleich mit der Umgebung sich nahezu vollkommen vollzogen hat; der am Elektroskope abgelesene Ausschlag gibt die Potentialdifferenz derjenigen beiden Stellen der Atmosphäre, an welchen sich die Zinkplatten befinden. Nur solche Differenzen sind aber im Freiballon überhaupt messbar, nicht Absolutwerte, da das Bezugsniveau der Spannungen, der Erdboden, während der Fahrt unzugänglich ist.

Die Verwendung von Radiumelektroden ist unzulässig, wenn gleichzeitig bei der Fahrt Zerstreuungsmessungen oder Jonenzählungen vorgenommen werden sollen.

Da nach den bisherigen Ergebnissen der luftelektrische Zustand der höheren Schichten sehr von den meteorologischen Bedingungen abhängig ist, wird empfohlen, die luftelektrischen Fahrten möglichst auf die Termintage der internationalen aëronautischen Kommission zu legen, weil an diesen mit Hilfe der zahlreichen, von vielen Orten aus zugleich unternommenen Auffahrten die allgemeine Wetterlage am sichersten beurteilt werden kann.

8. **Parallel gehende erdmagnetische Messungen.** Ausser den vorgenannten rein elektrischen Untersuchungen wäre die Ver-

bindung gewisser erdmagnetischer Messungen mit denselben sehr erwünscht. Da es den Anschein hat, dass gewissen Regionen in denen vorwiegend eine Wanderung von Elektrizität von der Atmosphäre zum Erdboden hin stattfindet, solche gegenüberstehen, in denen das Umgekehrte statthat, so wäre die Bestimmung des Linienintegrals der Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft längs einer, grössere Gebiete der Erdoberfläche umfassenden Linie von grösster Wichtigkeit. Die kartellierten Akademien begrüssen es daher mit besonderer Freude, dass die Berliner Akademie der internationalen Association bereits einen dahin zielenden Antrag vorgelegt hat. Diesem schliessen sie sich in voller Überzeugung von der grossen Bedeutung dieses Unternehmens mit allem Nachdrucke an, in der Hoffnung, dass bei planmässigem Zusammenarbeiten die Beobachtungen der luftelektrischen Stationen und der magnetischen Messungen sich in manchen Punkten wechselseitig zu stützen und zu ergänzen vermögen.

II.

Allgemeine Gesichtspunkte für die Einrichtung luftelektrischer Stationen.

1. **Hauptstationen.** In dem Bereiche der der internationalen Association angehörenden Akademien besteht bereits eine grössere Anzahl von wohl ausgerüsteten Observatorien und Instituten, deren Aufgabe die Erforschung der meteorologischen, erdmagnetischen und sonstigen geophysikalischen Erscheinungen bildet. Werden diese Stationen und Observatorien mit den oben genannten luftelektrischen Mess- und Registrierapparaten ausgerüstet, so würden sie natürliche Zentralpunkte für eine weitere Ausdehnung der luftelektrischen Untersuchungen bilden; mit einem weiteren Hilfsbeobachter ausgerüstet, können sie als Hauptstationen für grössere Gebiete dienen. Die Kosten einer solchen Hauptstation würden, abgesehen von der Remuneration des Beobachters, je nach der Zahl der bereits vorhandenen luftelektrischen Messapparate verschieden ausfallen; indessen dürfte

selbst in dem Falle, dass alle Instrumente neu anzuschaffen wären, der Betrag etwa 2000 M. nicht wesentlich überschreiten.

2. Stationen zweiter Ordnung. In Verbindung mit diesen Hauptstationen ist eine grössere Zahl von Stationen zweiter Ordnung einzurichten. An ihnen sind regelmässige Messungen bezw. Registrierungen des Potentialgefälles, Messungen des Leitvermögens und des Jonengehaltes zugleich mit den wichtigsten meteorologischen Beobachtungen anzustellen.

3. Lage und Zahl der Stationen zweiter Ordnung. Die Stationen zweiter Ordnung sind so zu wählen, dass die verschiedenen klimatischen und regionalen Einflüsse in dem Beobachtungsmateriale möglichst gleichmässig zur Geltung kommen; insbesondere werden bei der Begründung dieser Stationen auch die Kolonien der in der Association vertretenen Staaten zu berücksichtigen sein, so dass mit ihrer Hilfe ein Netz von Stationen entsteht, das über die ganze Oberfläche der Erde in angemessener Weise verteilt ist. Es wird angenommen, dass zirka 40 aussereuropäische Beobachtungsstationen für den in Aussicht genommenen Plan hinreichen.

4. Kosten einer Station zweiter Ordnung. Die Ausrüstungskosten einer Station zweiter Ordnung würden unter Berücksichtigung der im obigen Programm aufgestellten Hauptaufgaben 1 bis 3 auf zirka 1200 M. anzuschlagen sein; zur Ausführung der Messungen selbst genügt ein einziger Beobachter.

5. Anschluss der luftelektrischen Stationen an bereits vorhandene Institute. Bei der Wahl der Beobachtungsstationen müssen grössere Verkehrszentren unbedingt vermieden werden, da die luftelektrischen Erscheinungen durch Rauch und Staub in unkontrollierbarer Weise gestört werden. Im Übrigen empfiehlt sich die Angliederung an bereits bestehende Observatorien oder an meteorologische, forstwirtschaftliche oder landwirtschaftliche Institute und Versuchsstationen.

6. Schiffsbeobachtungen. Neben den Stationen auf festem Lande sind Beobachtungen der luftelektrischen Elemente bei den regelmässigen Fahrten grösserer Dampferlinien sehr zu

*

wünschen. Wenn hier auch die Bestimmungen mit besonderen Schwierigkeiten verknüpft sind, so würde doch z. B. schon die Feststellung des Vorzeichens der erdelektrischen Ladung von grösster Wichtigkeit sein.

7. **Publikation der Beobachtungen.** Es ist geplant, dass die einzelnen Akademien selbst für die Veröffentlichung der von ihren Stationen gewonnenen Beobachtungsergebnisse in dazu geeigneten, allgemein zugänglichen Organen (z. B. ihren Sitzungsberichten) Sorge tragen.

8. **Dauer der Beobachtungen.** Die kartellierten Akademien sind der Überzeugung, dass in einem Zeitraume von zwei Jahren, abgesehen von der, je nach den besonderen Verhältnissen der Stationen zu bemessenden Zeit der Vorbereitung, eine allgemeine Orientierung über die elektrischen Verhältnisse der Erde und ihrer Atmosphäre zu erreichen ist. Eine Beschränkung der Beobachtungsdauer auf die Zeit von einem Jahre ist mit Rücksicht auf den wechselnden meteorologischen Charakter verschiedener Jahre nicht angezeigt. Die kartellierten Akademien schlagen daher vor, die über die Erde verbreiteten luftelektrischen Beobachtungen auf eine Periode von zwei Jahren auszudehnen, deren Beginn von der Association selbst näher festzusetzen wäre.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1903.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Bd. XXIV. 1902. 8°.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Taschenbuch für das Jahr 1902. 8°.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Memoirs. Vol. II, part 1. 1902. 4°.
Transactions. Vol. 26, part. 1. 2. 1902. 8°.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations made 1899. 1902. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Vol. 150. 151. 1902. 8°.
Zbornik. Bd. VII, 2. 1902. 8°.
Starine. Bd. 30. 1902. 8°.
Rječnik. Heft 22, 1902 4°.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Jahrg. 5, No. 1—3. 1903. 4°.

Meteorologisches Observatorium in Agram:

Jahrbuch für das Jahr 1901. 1902. fol.

Allegheny Observatory in Allegheny:

Miscellaneous scientific Papers No. 10. 1903. 8°.

Stadt Antwerpen:

Paedologisch Jaarboek. Jaargang 3 en 4de. 1902—03. 1903. 8°.

Redaktion der Zeitschrift „Athena“:

Athena. Tom. 14, fasc. 4; Tom. 15, fasc. 1. 1902/03. 8°.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Studies in historical and political science. Series XX, No. 2—12 and Extra Number 1902. 8⁰.
Celebration of the 25th Universary. 1902. 8⁰.
Circulars. Vol. 22, No. 161. 162. 1903. 4⁰.
American Chemical Journal of Mathematics. Vol. 24, No. 2—4; Vol. 25, No. 1. 1902. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 24, No. 4; Vol. 25, No. 1—4. 1901—02. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 27, No. 4—6; Vol. 28, No. 1—6; Vol. 29, No. 1. 2. 1902—03. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. 14, No. 142. 144—146. 1903. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. 10, No. 3—9. 1902. 4⁰.

Peapody Institute in Baltimore:

Second Catalogue of the Library. Part 5. 6. 1901—02. 4⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland Geological Survey. a) Cecil County, b) Garret County (mit je 1 Atlas). 1902. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. 15, 1; Bd. 16. 1903. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Bd. II, Heft 2. 1903. 8⁰.

Société des sciences in Bastia:

Bulletin. 21. année 1901, 22. année 1902, Janvier—Juillet. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 45, afl. 5. 6; Deel 46, afl. 1. 1902—03. 8⁰.
Notulen. Deel 40, afl. 2. 3 1902. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 52, stuk 3; Deel 54, stuk 2. 1903. gr. 8⁰.
Anno 1643—1644 and Anno 1675. 1902. 4⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv. Bd. 21, 3; Bd. 22, 1. 1901—02. 8⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Atlas der Seen Macedoniens. 1902. fol.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account on the Crustacea of Norway. Vol. 4, part 11—14. 1902—03. 4⁰.
Aarbog für 1902. Heft 3. 1903. 8⁰.
Aarsberetning for 1902. 1903. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Publikations of the year 1902.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Abhandlungen aus dem Jahre 1902. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1902, No. 41—53; 1903, No. 1—24. gr. 8⁰.
Corpus inscriptionum latinorum. Vol. VI, pars 4, fasc. 2. 1902. 4⁰.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Grossen. Bd. 28. 1903. 8⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge, Heft 24 und 37 mit Atlas. 1902. 8⁰ (resp. fol.).

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Resultate des internationalen Breitendienstes. Bd. 1. 1903. 4⁰.
Veröffentlichungen. N. F., No. 7. 1903. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 39. Jahrg., No. 1—9 und Mitgliederverzeichnis vom 1. Januar 1903. 1903. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 54, Heft 3 und 4. 1902. 8⁰.

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. 33. 1903. 8⁰.

Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Namenregister zu den Fortschritten der Physik. Bd. 44—53. Braunschweig 1903. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 5, No. 2—11. Braunschweig 1903. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. Bd. 16, No. 21—26; Bd. 17, No. 1—6. 1902. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1902—03, No. 3—9. 1903. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 17, 4; 18, 1. 1903. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. N. F., No. 11, 12. 1903. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinz Westfalen. 1903. 8⁰.
Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1900. 1902. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1903, Heft 1—12 und Register zu Band 41—50. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. 16, 1. Leipzig 1903. 8⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 23. Jahrg., 1903, Heft 1—6. 4⁰.

Schweizerische naturforschende Gesellschaft in Bern:

Verhandlungen in der Versammlung zu Zofingen 1901 und Genf 1902. 1902. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Bd. 16, 3. 1902. 8⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VIIᵉ Série. Vol. 6, 1901. 1902. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:

Memorie. Serie 5, Vol. 8. 1899—1900. 4⁰.
Renticonto. N. Ser., Vol. 4, 1899—1900. 1900. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III, Vol. 20, fasc. 4—6; Vol. 21, fasc. 1—3. 1902—03. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1902. 2. Hälfte. 1903. 8⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 59. Jahrg. 1902, 2. Hälfte. 1903. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 29ᵉ année 1903, No. 1—11. 15. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 38, No. 1—19. 1902—03. 8⁰.

American Philological Association in Boston:

Transactions and Proceedings. Vol. 33. 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. 17, 2. 1903. 8⁰.

Sternwarte in Breslau:

Mitteilungen. Bd. 2. 1903. 4⁰.

Institute of Arts and Sciences in Brooklyn:

Science Bulletin. Vol. 1, No. 3. New-York 1902. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. Jahrg. 7, 1. 2. 1903. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 40, 1901. 1902. 8⁰.
20. Bericht der meteorolog. Kommission. 1902. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série, Tome 16, No. 10. 11; Tome 17, No. 1—4; Tome 18, No. 1. 2. 1902—03. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires couronnés in 4⁰. Tome 59, fasc. 4; Tome 60, 62, fasc. 1. 2. 1902—03.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tome 62, fasc. 4; Tome 63, fasc. 1—3. 1903. 8⁰.
Biographie nationale. Tome 17, fasc. 1. 1902. 8⁰.
Annuaire 1903. 69ᵉ année. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1902, No. 9—12; 1903, No. 1—4. 8⁰.
b) Classe des sciences 1902, No. 9—12; 1903, No. 1—4. 8⁰.
Chartes de l'Abbaye de Saint-Hubert en Ardenne publ. par G. Kurth. Tome I. 1903. 4⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. 22, fasc. 1. 2. 1903. 8°.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Anales. Tom. 46. 1902. 8°.
Mémoires. Tom. IX. 1902. 8°.

Société belge de géologie in Brüssel:

Nouveaux Mémoires. Série in 4°, fasc. I. 1903.
Bulletin. Tom. XIII, 4; XVI, 4. 5; XVII, 1. 2. 1903. 8°.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 36; année 1901. 1902. 8°.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny Bd. 32, Heft 10—12; Bd. 33, Heft 1—4. 1902—03. 8°.
Jahresbericht für 1900. 1902. 8°.
5. Nachtrag z. Katalog der Bibliothek der ungar. geolog. Landesanstalt. 1903. 4°.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Tom. VII. VIII. 1902. 4°.

Botanischer Garten in Buitenzoorg (Java):

Mededeelingen. No. 59, 60, 62, 63. 1902—03. 4°.

Botanisches Institut in Bukarest:

Bulletin de l'Herbier. No. 2 (Janvier-Avril). 1902. 8°.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 5° Série. Vol. 5. Anné 1901. 1902. 8°.

Institut Égyptien in Cairo.

Bulletin. IV° Série. Tom. 2, fasc. 1—8; Tom. 3, fasc. 1—4. 1901 bis 1902. 8°.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. July—December 1902. 1902—03. fol.
Instructions to observers of the Indian Meteorological Department. By. I. Eliot. 1902, 8°.
Rainfall Da ta of India. XI. year 1901. 1902. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

General-Report 1900—01. 8°.
Memoirs. Vol. XXXII, 3; XXXIV, 2; XXXV, 1. 1902. 8°.
Paläontologia Indica. N. S. Vol. II, 1. 1902. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 983, 1015—1035. 1901—03. 8°.
Journal. No. 400. 401. 403—405. 1902. 8°.
Proceedings. 1902. No. VI—X; 8°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 38, No. 8; Vol. 40, No. 4—6; Vol. 42, No. 1. 1903. 8°.
Memoirs. Vol. 26, No. 4; Vol. 28 Text und 3 Bände Atlas. 1903. 4°.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

57th annual Report. Sept. 30. 1902. 1902. 8⁰.
Annals. Vol. 44, part 2; Vol. 48, part 2.
A Plan for the Endocoment of Astronomical Researeli by Edw. C. Pickering. 1903. 8⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XI, 7; XII, 1. 2. 1902. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 15. 1902. 4⁰.
Bollettino mensile. Nuova Ser., fasc. 74—76. 1902—03. 8⁰.

K. technische Hochschule in Charlottenburg.

Kammerer. Ist die Unfreiheit unserer Kultur eine Folge der Ingenieurkunst? Berlin 1903. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 33, fasc. 1. Paris 1902. gr. 8⁰.

John Crerar Library in Chicago:

8th annual Report for the year 1902. 1903. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 66—68 1902. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Bulletin. No. 18. 19. 1903. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal“ in Chicago:

Vol. XVII, No. 1—5. 1903. gr. 8⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

VIII. Aarsberetning 1902. 1903. 8⁰.

University of Missouri in Columbus:

Studies. Vol. I, No. 1—5; Vol. II, No. 1. 1902—03. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republic Argentinien):

Boletin. Tom. XVII, 2. Buenos Aires 1902. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. Neue Folgen. Bd. X, Heft 4. 1902. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 45. 1903. gr. 8⁰.
Mitteilungen. Jahrg. 2. No. 1. 2. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrica in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. 1, Heft 3—5. Heidelberg 1903. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. Neue Folge. Bd. 3, Heft 2 und Ergänzungsband 1, Heft 3. 1902. 8⁰.
Quartblätter 1902. 4 Hefte. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. 7. p. 56—84. 1902—03. 8°.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. IX, 5. 1902. 8°.

Historischer Verein in Dillingen:

Jahrbuch. 15. Jahrg. 1902. 8°.

Académie des Sciences in Dijon:

IV Série. Tom. 8. 1901—02. 8°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Vol. 24, trimestre 3. 1902. 8°.

Royal Irish Academy in Dublin:

Transactions. Vol. 32, Section B, part 2. 1903. 4°.

Royal Society in Dublin:

The economic Proceedings. Vol. I, part 3. 1902. 8°.
The scientific Proceedings. N. S., Vol. IX, part 5. 1903. 8°.
Transactions. Vol. VII, No. 14—16; Vol. VIII, No. 1. 1902. 4°.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. 8. 1903. 8°.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 24, No. 4. 1903. 8°.
Transactions. Vol. 40, part 1. 2; Vol. 41. 1901—02. 4°.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 3, No. 3. 1902. 8°.

Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht für das Jahr 1902/03. 1903. 4°.

Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer in Emden:

Jahrbuch. Bd. 14, Heft 1. 2. 1902. 8°.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F., Heft 29. 1903. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie, Vol. 25, disp. 3. 4 u. Suppl. Vol. 26, disp. 1. 2. 1902—03. 8°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Die Periodischen Schriften der Senckenberg'schen Bibliothek. 1903. 4°.
Abhandlungen. Bd. 20, Heft 4; Bd. 25, Heft 4. 1903. 4°.

Physikalische Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1901—1902. 1903. 8°.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

Schau-ins-Land.. 29. Jahrg. 1902. I. Halbband. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diözesan-Archiv. N. F., Bd. 3. 1902. 8°.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1901. 1902. 8⁰.
Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint Maurice pendant l'année 1901. 1902. 8⁰.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Mémoires et Documents. N. Sér., Tom. VIII, livr. 1. 1902. 8⁰.
Bulletin. Tome II, livr. 6. 7. 1902. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Vol. 34, fasc. 3. 1903. 4⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 78. 1902. 8⁰.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2, Heft 3. 1902. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 165. Jahrg. 1903, No. 1—6. Berlin 1903. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F.
Math.-physikal. Klasse. N. F., Bd. 2, No. 1. Berlin 1903. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse. 1902, Heft 5; 1903, Heft 1—3. gr. 8⁰.
b) Math.-phys. Klasse. 1902, Heft 6; 1903, Heft 1—3. gr. 8⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1902, Heft 2. 1902. gr. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. 12, 1—4. 1902. 8⁰.

Universität in Graz:

Verzeichnis der akademischen Behörden etc. 1902/03. 1903. 4⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommerische Jahrbücher. Bd. 4. 1903. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 34. Jahrg. 1902. Berlin 1903. 8⁰.

Kgl. sächs. Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht von 1902—03. 1903. 4⁰.

Universität Groningen:

Middendorp, Étiologie de la Tuberculose. Paris 1902. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VII. Reeks, Deel I, aflev. 1—3. 1903. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II, Vol. 8, partie 2. 1902. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II, Tom. 8, livr. 1. 2. 1903. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. X, 3. 4. 1901—03. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 38, No. 12; Heft 31, No. 1—5. 1902—03. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 56, Heft 4; Bd. 57, Heft 1 u. 2. Leipzig 1902—03. 8⁰.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Band 12, 1. Leipzig 1903. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 75, Heft 1—3. Stuttgart 1903. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. 4, Heft 3. Leipzig 1903. 8⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. 25. Jahrg. 1902. 4⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 22. Jahrg. 1902. 1903. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. Dritte Folge. X. 1903. 8⁰.

Wetterauische Gesellschaft für die gesamte Naturkunde in Hanau:

I. Nachtrag zum Katalog der Bibliothek. 1902. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:

Festschrift zum 600 jährigen Jubiläum der Erhebung Alt-Hanaus zur Stadt. 1903. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1902, Heft 3 u. 4; 1903, Heft 1. 8⁰.

Badische historische Kommission in Heidelberg:

Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. 18, 1. 1903. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Königstuhl bei Heidelberg:

Publikationen. Bd. I. Karlsruhe 1902. 4⁰.

Universität Heidelberg:

H. Buhl, Zur Geschichte der Universität Heidelberg unter Grossherzog Friedrich. Festrede. 1902. 4⁰.
H. Buhl, Römisches Recht und Bürgerliches Gesetzbuch. Akad. Rede. 1902. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. 12, Heft 1. 1903. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Limesblatt No. 35. Trier 1903. 8⁰.
Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XVIII. 1903. 4⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Bd. 30, 3; Bd. 31, 1. 1902—03. 8⁰.

Landeskonsistorium der evang. Landeskirche etc. in Hermannstadt:

Quellen zur Geschichte der Stadt Kronstadt. Bd. 1 und 2. Kronstadt 1886—89. 8⁰.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. 43. u. 44. Heft. 1903. 8⁰.

Voigtländischer Altertumsforschender Verein in Hohenlauben:

72. und 73. Jahresbericht. 1903. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 7, No. 1—4. 1903. gr. 8⁰.

American Chemical Society in Ithaca:

The Journal. Vol. 25, No. 1—5. 1903. 8⁰.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. II, fasc. 2. 1903. 8⁰.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Zoologische Forschungsreisen in Australien von Rich. Semon. Bd. 5, Liefg. 6. Text und Atlas. 1903. fol.

Neurobiologische Arbeiten von Oskar Vogt. II. Serie, Bd. I, Liefg. 1. 1903. fol.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 37 (= N. F., Bd. 30), Heft 2—4. 1902—03. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F., Bd. 13, Heft 1. 2. 1902—03. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Archiv für Naturkunde. II. Serie, Bd. XII, 2. 1902. 8⁰.

Sitzungsberichte. Bd. XIII, 1. 1902. 8⁰.

Schriften aus dem Jahre 1901/02 in 4⁰ u. 8⁰.

Badische Historische Kommission in Karlsruhe:

Siegel der Badischen Städte. Heft 2. Heidelberg 1903. 8⁰.

Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. 18, 2. Heidelberg 1903. 8⁰.

Topographisches Wörterbuch des Grossherz. Baden. 1. Bd., 1. Halbband. Heidelberg 1903. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. IIᵉ Série, Tome XII, 3. 1902. 8⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 69, No. 12; Bd. 70, No. 1—4. 1902—03. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F., Bd. 26. 1903. 8⁰.

Mitteilungen. Jahrg. 1901. 1903. 8⁰.

Société des sciences physico-chimique à l'Université de Kharkow:

Travaux. Tom. 25, Supplements, fasc. 8—11. 1901. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1903. Heft 1. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 42 (1902), No. 11. 12; Bd. 43 (1903), No. 1—4. 8°.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 1903. No. 1. 2. 8°.

Mathemat.-naturwissenschaftl. Fakultät der Universität Klausenburg:

Joannis Bolyai in Memoriam. 1902. 4°.

Mediz.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:

Sitzungsberichte. 3 Hefte. 1903. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1902, No. 6; 1903, No. 1. 1903. 8°.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. Philolog. Klasse 1902, No. 8—10; 1903, No. 1—4.
Mathem.-naturwiss. Klasse 1902, No. 8—10; 1903, No. 1—4. 8°.
Rozprawy filolog. Ser. II, Tom. XX, 1. 1902. 8°.
Rocznik. Rok 1901/02. 1902. 8°.
Sprawozdanie komisyi fizyograficzny. Tom. 36. 1902. 8°.
Katalog literatury. Bd. II, Heft 3. 1903. 8°.

Archiv der Stadt Kronstadt:

Quellen zur Geschichte der Stadt Brasso. Band IV. Brasso 1903. gr. 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 4e Série, Vol. 38, No. 145 (1902); Vol. 39, No. 146 (1903). 8°.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

Bulletin. Vol. 8, No. 6. 1901. 8°.

Sternwarte in Leiden:

Verslag. Sept. 1900 — Sept. 1902. 1902. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte der philol.-hist. Klasse. Bd. 20, No. 6; Bd. 21, No. 4; Bd. 20, No. 1. 1902—03. 4°.
Abhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. 28, No. 1—3. 1902—03. 4°.
Berichte der philol.-histor. Klasse. Bd. 55, Heft 1—3. 1903. 8°.
Berichte der math.-physik. Klasse. Bd. 54, Heft 6. 7; Bd. 55, Heft 1. 2. 1900—03. 8°.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. März 1903. 8°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F., Bd. 66, Heft 11. 12; Bd. 67, Heft 1—10. 1902—03. 8°.

K. Sächsische Kommission für Geschichte in Leipzig:

Die Dresdener Bilderhandschrift des Sachsenspiegels von Karl v. Amira. (Facsimile-Band), II. Hälfte. gr. fol.

Cuerpo de Ingenieros de Mixas del Peru in Lima:

Boletin No. 1. 1902. 8°.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 21. Serie, 1903, No. 1—3. 8°.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. 91. Session, 1901—02, No. 56. London 1902. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1902—03.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XIX, 2; XX, 1. 1902. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVIII, No. 69. 70. 1903. 8⁰.

Royal Society in London:

Year-Book 1903. 8⁰.
Proceedings. Vol. 71, No. 470—476. 1903. 8⁰.
The Sub-Mechanics of the Universe by Osborne Reynolds. Cambridge 1903. gr. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 63, No. 1—7. 1902—03. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 483—487 und Supplementary Number 1903. 8⁰.
Proceedings. Vol. 18, No. 258—268. 1903. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 58, part 1—4. 1902. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal. a) Botany. Vol. 36, No. 249. 250. b) Zoology. Vol. 28, No. 186. 1903. 8⁰.
The Transactions. a) Zoology. Vol. 8, part 9. 10. b) Botany. Vol. 6, part 4. 5. 1902. 4⁰.
List of the Linnean Society 1902—03. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 85. 1902. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1903, part 1—3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1902, Vol. II, part 2. 1903. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, part 5. 1902. 4⁰.
Catalogue of the Library. 5th edit. 1902. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1731—1757. 1903. 4⁰.

Université in Lyon:

Annales. I. fasc. 10; II. fasc. 9. 10. 1902. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. XI. 1902. 4⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. IV, No. 3. 1903. 8⁰.

Kodaikánal and Madras Observatories in Madras:

Annual Report for 1902. 1903. fol.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 42, cuad. 1—6. 1903. gr. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II, Vol. 35 und Vol. 36, fasc. 1—8. 1903. 8⁰.
Memorie. Classe di scienze storiche. Vol. 21, fasc. 4. 1903. 4⁰.
Indice generale dei lavori dal 1889 al 1900. 1902. 8⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Ati. Vol. 41, fasc. 4; Vol. 42, fasc. 1. 1903. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III, Anno XXIX, fasc. 36, 1902; XXX, fasc. 37. 1903. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 47, part 2—4. 1903. 8⁰.

Altertumsverein in Mannheim:

Forschungen zur Geschichte Mannheims. Bd. I—III. Leipzig 1898—1900. 8⁰.
Mannheimer Geschichtsblätter. Jahrg. I. II. III. 1900—02 u. IV No. 1. 2. 4⁰.
Kloster Limburg an der Haardt von W. Manchot. 1892. 4⁰.
Die Siegelsammlung des Mannheimer Altertumsvereins von Friedrich Walter. 1897. fol.
Römische Denksteine und Inschriften von Karl Baumann. 1890. 4⁰.
Studien zur Geschichte der bildenden Künste in Mannheim von L. Malhy. 1894. 4⁰.
Frankenthaler Gruppen und Figuren von Emil Heuser. Speier 1899. 8⁰.
Frankenthaler Porzellan von Emil Heuser. 1899. 8⁰.
Katalog der Bibliothek von Wilh. Caspari. 1894. 8⁰.
Verzeichnis der Pfälzischen und Badischen Münzen und Medaillen von Seubert. 1900. 8⁰.
Bericht über das Vereinsarchiv von Paul Dieffenbacher. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mitteilungen. Bd. VI, 2. 1902. 8⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XV, part 2. 1903. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. Année 29. 1899—1900. 1902. 8⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Boletín. No. 16. 1902. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. Noviembre, Diciembre 1901, Enere 1902. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y revista. Tomo 17, No. 1—6; Tomo 18, No. 1. 2; Tomo 19, No. 1. 1902. 8⁰.

Sociedad de geografia y estadistica in Mexico:

Boletin. 5a epoca, Tom. I, No. 1. 2. 1902. 8°.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie II, Vol. XII; Serie III, Vol. III, parte 2. 1901—02. 4°.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des sciences. 2e Série, Tom. III, No. 2. 1902. 8°.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1902, No. 3; 1903, No. 1. 1903. 8°.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 27—36, 38—40. 1902. 4°.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 33. Jahrg. 1902, No. 4—12. 4°.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. IV. Jahrg., Heft IV, Teil 1; V. Jahrg., Heft 1. 1902—03. 4°.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Neun Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1902/03. 1902. 8°.
Bericht für das Jahr 1901—02.
Programm Wintersemester 1902—03.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1903. 8°.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1903, No. 1—15. 8°.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1902 in 4° u. 8°.

Kaufmännischer Verein in München:

29. Jahresberisht. 1903. 8°.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1903, No. 148—150. 152. 153. 8°.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Bd. 60 und Register zu Bd. 1—50, Liefg. 1. 1902—03. 8°.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. V. Série, Tome 19 und Table alphabétique 1750—1900. 1902. 8°.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série III, tom. 3, fasc. 2. 3. Paris 1902. 8°.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Sér. III, Vol. 9, fasc. 1—4. 1903. 8°.
Atti. Sér. II, Vol. 11. 1902. 4°.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. XV, 4. Berlin 1902. 8°.

Gesellschaft Philomathie in Neisse:

31. Bericht. 1900—02. 8°.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 50, part 7; Vol. 51, part 5; Vol. 52, part 2—4; Vol. 53, part 1. 1902—03. 8°.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:

Transactions. Vol. XI, 1. 2. 1901—03. 8°.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser. Vol. 15, No. 88—90. 1903. 4°.

Observatory of the Yale University in New-Haven:

Transactions. Vol. I, 6. 1903. 4°.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. 32, 2d half. 1902. 8°.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. No. 10. 1902. 8°.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. XVI; Vol. XVIII, 1. 1902. 8°.
List of Papers published in the Bulletin and Memoirs. Vol. I—XVI. 1902. 8°.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 34, No. 5; Vol. 35, No. 1. 2. 1902—03. 8°.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. II. Series, Vol. VII, 1. 1903. 8°.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. III. 1902. 4°.

Bodleian Library in Oxford:

Tercentenary of the Bodleian Library, October 1902. 4°.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. 18. 1902. 8°.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

N. S. Anno VII, 1—3. 1903. 8°.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Serie II, Vol. IV, 2. 1902. 8°.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo XVII, 1—3. 1903. 8°.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin 1903, No. 1—25. 8°.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 136, No. 1—25. 1903. 4°.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances 1879. 1880. 8°.

Direction de la Chronique de France in Paris:

La Chronique de France. 3e année 1902. 8°.
Carnet bibliographique. 1902. 8°.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 733—738 (Janvier-Juin 1903). 1903. 4°.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études. Tome 14. 1902. 8°.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 46, No. 1. 2. 1902. 8°.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1902, No. 5—8. 1902. 8°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. Ve Série, Tome 3, fasc. 3. 4. 1902. 8°.
Mémoires. Tome 2, fasc. 3. 1902. 8°.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Tome VI, 2—6; VII, 1. 1902—03. 4°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 30, fasc. 4; Tom. 31, fasc. 1. 1902—03. 8°.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 27. 1902. 8°.
Mémoires. Tome XV. 1902. 8°.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Annuaire du Musée zoologique. 1902. Tome VII, No. 3. 4. 1902. 8°.

Comité géologique in St. Petersburg:

Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie
a) Région aurifère d'Jénissei, livr. 3.
b) „ „ de l'Amour, livr. 3. 1902. 8°.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta. Vol. XXI, 1. 1903. 8°.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XXI, 1. 1903. 8°.
Verhandlungen. II. Serie, Bd. 40, Liefg. 1. 1902. 8°.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 34, Liefg. 9; Tom. 35, Liefg. 1—5. 1902. 8°.

Section géologiqne du cabinet de La Majesté in St. Petersburg:

Travaux. Tome 5. 1902. 8°.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. II. Serie, Vol. XII, 1. 2. 1902. gr. 4°.
Proceedings. Vol. 54, part 2. 3. 1902—03. 4°.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 26, No. 104 (1902); Vol. 27, No. 105. 106. (1903). 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 39, No. 1—5. 1903. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 41, No. 170. 171. 1902. 8⁰.
Transactions. New Series. Vol. XX, 3. 1902. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. XVI. 1902. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XIII, p. 41—138. 1903. 4⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, Tomo 4, Dicembre 1902; Tomo 5, Gennajo-Marzo 1903. 8⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1902/03. 1903. 4⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 17. Jahrg., 2. Halbband. 1902. 8⁰.
Historische Monatsblätter. 3. Jahrg., No. 7—12. 1902. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Bd. 14 und Photographische Himmelskarte. Katalog. Bd. III. 1903. 4⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Potsdam:

Die Tätigkeit d. physik.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1902. Berlin 1903. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Almanach. Roč. XIII. 1903. 8⁰.
Rozprawy. Třída I, Roč. X; Třída II, Roč. XI; Třída III, Roč. XI, 1. 1902—03. 8⁰.
Věstník. Ročník XI. 1902. 8⁰.
Zíbrt, Bibliografie. Bd. II. 1902. 8⁰.
Kolář, Heraldika I. 1902. 8⁰.
Spisy Komenského. Číslo 5. 6. 1902. 8⁰.
Bibliotéka klassiků. Číslo 5. 7. 1902. 8⁰.
Spírka pramenův Skupina I, rada I, 3. 4, rada II, 4. 5; Skupina II, číslo 5. 1902. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Beiträge zur deutsch-böhm. Volkskunde. Bd. I, 2; Bd. IV, 2. 1902—03. 8⁰.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1902. 1903. 8⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Christian Doppler, Über das farbige Licht der Doppelsterne. 1903. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1902. 1903. 8⁰.
Sitzungsberichte 1902. a) Klasse für Philosophie.
b) Mathem.-naturw. Klasse. 1903. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Bd. 32, No. 1. 2. 1902. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

54. Bericht über das Jahr 1902. 1903. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Bd. 76, Heft 6; Bd. 77, Heft 1. 2. 1902—03. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Definitive Resultate aus den Prager Polhöhen-Messungen von L. Weinek. 1903. 4⁰.

Deutsche Karl Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rektors für 1902/03. 1903. 8⁰.
Personalstand für 1902/03. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen im Sommer-Semester 1903. 8⁰.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Sbornik. Bd. VI. VII. 1902. 8⁰.
Časopis. Bd. XXXII, 3. 4. 1903. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd. XXIII. 1903. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Bd. 54. 1902. 8⁰.

Bibliotheca nacional in Rio de Janeiro:

Annaes da Bibliotheca Nacional. Vols XV—XXII. 1892—1900. 8⁰.
Catalogo da exposição permanente dos Cimelios. 1885. 8⁰.
Montoya, Arte de la lengua tupi ó guarani. Paris 1876. 8⁰.
Recenseamento do districto federal em 1890. 1895. 4⁰.
A Exposição de Obras Publicas em 1875. 1876. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletim mensal. Julho—Setembro 1902. 1902. 4⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 13. 1902. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1903. 8⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. X, parte 2. Notizie degli scavi, fasc. 10—12 und Indice, Vol. XI, parte 1, fasc. 1. 2. 1902. 4⁰.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 11, semestre 2, fasc. 12; Vol. 12, semestre 1, fasc. 1—11. 1902. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1902, No. 4. 8⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XVII, fasc. 3. 4. 1903. 8⁰.

Società Italiana delle scienze in Rom:

Memorie. Serie III, Tome 12. 1902. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 25, fasc. 3. 4; e Indice pei tom. 11—25. 1902—03. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 8. 9, fasc. 1. 1902—03. 8⁰.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Inventaire descriptif des Monuments du Cambodge par E. Lunet de Lajonquière. Paris 1902. 4⁰.

Bulletin. Tom. II, No. 4; Tom. III, No. 1. Hanoi 1902—03. 4⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1900—01. 1902. 8⁰.

Academy of Sciences of St. Louis:

Transactions. Vol. XI, No. 6—11; Vol. XII, No. 1—8. 1901—02. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Observationes meteorológ. para 1900. 1901. fol.

Museu Paulista in S. Paulo:

Revista. Vol. 5. 1902. 8⁰.

Universita di Sassari:

Studi Sassareri. Anno II, Sez II, fasc. 2. 1902. 8⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Bd. XXI. 1903. 4⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, Vol. 14, No. 1—10 e un Supplemento 1902. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXV, No. 12; XXVI, No. 1. 2 e Indice generale 1878—1900. 1902—03. 8⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Antiquarisk Tidskrift. Deel XVII, 1. 1902. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Astronomiska Jakttagelser. Bd. VI, 2. 4; Bd. VII. 1898—1903. 4⁰.
Meteorologiska Jakttagelser. Bd. 40. 41 (1878—1899). 1902. 4⁰.
Handlingar. N. F. Vol. 59 (1902). 1902—03. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 24, Heft 7; Bd. 25, Heft 1—4. 1903. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 36, Heft 10; Bd. 37, Heft 1—4. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Universität Strassburg:

Das Stiftungsfest am 1. Mai 1903. 8⁰.

K. württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Heilbronn. 1903. 8⁰.
Württembergische Jahrbücher für Statistik. Jahrg. 1902. 1903. 4⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:
Annual Report for the year 1902. 1903. fol.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:
Proceedings. Vol. XXVI, part 3 and Supplement zu part 3; Vol. XXVII, part 1. 1902. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:
Año XXIII. Mexico 1902. 8⁰.

Kaukasisches Museum in Tiflis:
Die Sammlungen des Kaukasischen Museums in Tiflis. Bd. V. 1902. 4⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:
Publications. No. 7. 10—13. 1902—03. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:
Mitteilungen. Bd. IX, Teil 2. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Universität in Tokyo (Japan):
The Journal of the College of Science. Vol. XVI, 15; Vol. XVIII, 1. 1903. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:
Proceedings. Vol. II, 5. 1902. 8⁰.
Transactions. Vol. VII, 2. 1902. 8⁰.

University in Toronto:
a) Biolog. Series No. 3; b) Psycholog. Series Vol. 2, No. 1; c) Geolog. Series No. 2. 1901. 4⁰.

Université in Toulouse:
Annales du Midi. No. 55—57. 1902—03. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série. Tom. 4, fasc. 3. 4. 1902. 4⁰.
Bibliothèque méridionale. Série II, Tom. 8. 1903. 8⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:
Archivio Trentino. Anno XVII, fasc. 2. 1903. 8⁰.

Associazione medica Triestina in Triest:
Bollettino. 1901—02. Annala 5. 1902. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:
Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1902. 1903. 8⁰.
Atti. Vol. 38, disp. 1—7. 1903. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 52. 1903. 4⁰.

R. Accademia d'agricultura in Turin:
Annali. Vol. 44. 45. 1902—03. 8⁰.

Verein für Kunst und Altertum in Ulm:
Mitteilungen. Heft 10. 1902. 4⁰.
Führer durch die Sammlungen des Gewerbemuseums. 1903. 8⁰.

Humanistika Vetenkapssamfund in Upsala:
Skrifter. Bd. VII. 1901—02. 8⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Rapport sur les observations internationales des nuages par Hildebrand Hildebrandsson 1903. 8°.

K. Universität in Upsala:

Ångermanälfens flodområde. Af Karl Ahlenius. 1903. 8°.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XXIII. Amsterdam. 1902. 8°.
Werken. III. Serie, Nr. 15. Amsterdam. 1901. 8°.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Annuaire Météorologique pour 1900 et 1901. 1902. 4°.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Anno 23, Vol. 1, 2; Anno 24, Vol. 1. 2; Anno 25, Vol. 1 und Judice zu 1812—1890. 1900—1902. 8°.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tom. 59, No. 8—10; Tom. 60, No. 1—10; Tom. 61, No. 1—9; 1900 bis 1902. 8°.
Memorie. Vol. 26, No. 6—8. 1901—02. 4°.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Indice dei volumi I—LXXV. 1903. 8°.

Bureau of American Ethnology in Washington:

Bulletin. No. 27: Tsimshian Texts. 1902. 4°.

Bureau of Education in Washington:

Annual Report 1900—01. Vol. 2. 1902. 8°.

Departement of the Interior in Washington:

Report of the Commissioner of Education for the year 1900—01. Vol. I. 1902. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report 1900—01. 1902. 8°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report of the Superintondent. June 30, 1902. 8°.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. 14, p. 205—232. 1903. 8°.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

List and Catalogue of the Publications. 1816—1902. 1902. 4°.

United States Geological Survey in Washington:

Monographs. Vol. 41. 1902. 4°.
XXI. Annual Report 1899/1900. Part. III.
XXII. „ „ 1900/01. Part. I. II. IV.
XXIII. „ „ 1901/02. 1901—02. 4°.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 35, Heft 2. 1902. 8°.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse. Bd. 144. 1902. 8°.
Abt. I, Bd. 110, No. 8—10; Bd. 111, No. 1—3.
„ IIa, „ 111, „ 1—4.
„ IIb, „ 110, „ 10; Bd. 111, No. 1—3. 1901—02. 8°.
Denkschriften. Philos.-hist. Klasse. Bd. 48. 1902. 4°.
Almanach. 51. Jahrg. 1901. 8°.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1901. Bd. 51, Heft 3.
Verhandlungen 1902: No. 11—18; 1903: No. 1—8. 4°.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F. No. IX. 1902. 8°.
Südarabische Expedition. Bd. 5. Teil 1. 1903. 4°.

K. K. Gradmessungs-Kommission in Wien:

Astronomische Arbeiten. Bd. XII. 1900. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1903, No. 1—26. 4°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 52, Heft 10; Bd. 53, Heft 1—4. 1902—03. 8°.
Abhandlungen. Bd. II, Heft 2. 1903. 4°.

K. K. militär-geographisches Institut in Wien:

Die astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd. XIX. 1902. 4°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XVII, No. 3. 4; Bd. XVIII, No. 1. 1902—03. 4°.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 33. Bd., Heft 1 1902. 1903. gr. 8°.
Mitteilungen 1902/03, No. 1—4. gr. 8°.
5. Jahresbericht der historischen Kommission für Nassau. 1902. 8°.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 44. 1902. 8°.
Jahresbericht für 1901. 1902. 8°.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen. Bd. XXVI, Heft 1. 1903. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1903. 4°.
Vierteljahrsschrift. 47. Jahrg., Heft 3. 4. 1903. 8°.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz.
Karte: Rollier Environs de Moutier,
„ „ „ Belle lay
Mühlberg, Layern mit Erläuterungen. Bern 1902.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. IV, No. 4. 1903. 4°.

Von folgenden Privatpersonen:

Le Prince Albert de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. XXII. Monaco 1902. gr. 4°.

Graf S. S. Abamelek-Lasarew in Moskau:

80 Jahre der Spezialklassen des Lazarewski Institut für Orientalische Sprachen. Moskau 1903. 8° (in russ. Sprache).

Buchhandlung Joh. Ambrosius Barth in Leipzig:

Oskar Bail in Prag: Versuche über die Verwendung pflanzlicher Stoffe. Jena 1902. 8°.

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 27, Heft 1—6. Leipzig 1903. 8°.

Carl de Boor in Berlin:

Excerpta de Legationibus. 2 Bde. Berolini 1903. 8°.

Walther Nic. Clemm in Darmstadt:

Die Gallensteinkrankheit. Berlin 1903. 8°.

F. Czapek in Prag:

Unternehmungen über die Stickstoffgewinnung und Eiweissbildung der Schimmelpilze. No. II. III. Braunschweig 1902. 8°.

Arthur J. Evans in Oxford:

The Palace of Knossos. Athen 1902. 4°.

Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. 18, No. 14—40. Jena 1903. 4°.

Richard Forster in Wien:

Die dritte Bewegung unserer Erde. Wien 1903. 8°.

O. Franke in Berlin:

Die Rechtsverhältnisse am Grundeigentum in China. Leipzig 1903. 8°.

Albert Gaudry in Paris:

Contribution à l'histoire des hommes fossiles. Paris 1903. 8°.

P. J. Georgievskij in Petersburg:

Bibliographie der russischen ökonomischen Literatur (in russ. Sprache). Heft 1. Petersburg 1903. 8°.

Mme Vve Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 27 Janvier—Juin. 1903. Guise. 8°.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Liefg. 8. Leipzig 1903. fol.

Carl Justi in Bonn:

Diego Velazquez und sein Jahrhundert. 2 Bde. Bonn 1903. 8°.

H. Kern in Utrecht:

Rāmayāna oudjavansch Heldendicht uitgegeven door H. Kern. s'Gravenhage 1900. 4°.

R. Kraus in Wien:

Über die Bildung von Immunsubstanzen gegen das Lyssavirus. Leipzig 1902. 8°.

Über den Nachweis von Schutzstoffen gegen Hundswut beim Menschen. Jena 1902. 8°.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XII, 1. 2. Leipzig 1903. 8°.

Eduard Loewenthal in Berlin:

Organische Neubildung und Regeneration oder die Biologie im Lichte der Fulguro-Genesis. Berlin 1903. 8°.

E. von Meyer in Dresden:

Aus Justus Liebigs Lehr- und Wanderjahren. Leipzig 1903. 8°.

Middendorp in Groningen:

Étiologie de la Tuberkulose. Paris 1902. 8°.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Année XXVIII, No. 1.

Frederick Morgan Padelford in Washington:

Essays on the Study and Use of Poetry by Plutarch and Basil the Grea. New-York 1902. 8°.

Verlagsbuchhandlung Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische, ozeanische und ostasiatische Sprachen. 6. Jahrgang, 4. Heft. Berlin 1902. 8°.

K. Schumann in Berlin:

Monatsschrift für Kakteenkunde. Bd. XI. XII. Neudamm 1901—02. 8°.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1903, No. 2—12. München. 8°.

B. G. Teubner in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, 4. Bd., 3. und 4 Heft; 5. Bd., 1. bis 4. Heft. Leipzig und Berlin 1903. 8°.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. III, 2, Heft 1; Bd. IV, 2, Heft 2; Bd. V, 1, Heft 1. Leipzig 1903. 8°.

Thesaurus linguae latinae. Vol. 2, fasc. 5. Lipsiae 1903. 4°.

Otto Walkhoff in München:

Menschenaffen. Liefrg. IV. Wiesbaden 1903. 4°.

E. v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XIII, 2. Leipzig 1903. 8°.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1903.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

University of Aberdeen:

Studies. No. 6. 7. 1902. 4⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 27, part 1. 1903. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis. 1902. 1903. 8⁰.
Rad. Vol. 152. 1903. 8⁰.
Zbornik. Bd. VIII, 1. 1903. 8⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. V, Heft 4. 1903. 4⁰.

Académie des Sciences in Aix:

Mémoires. Tom. 18. 1902. 8⁰.

Allegheny Observatory in Allegheny:

Miscellaneous scientific Papers. N. S. No. 11—14. 1903. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1901, No. 4; 1902, No. 1—4; 1903, No. 1. 1902—03. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde. Deel VIII, No. 3—5, Deel IX, No. 4—9. 1903. 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. N. Reeks, Deel IV, 1; V, 1—3. 1903. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Teil XI, 1. 2. 1902—03. 8⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. 4e Reeks, Deel V.
Jaarboek voor 1902. 1903. 8⁰.
Feriae aestivae. Carmen. 1903. 8⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 29. Jahrgang. 1903. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. 22, No. 163. 164. 1903. 4⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. 14, No. 147—152. 1903. 4⁰.

Peapody Institute in Baltimore:

36th annual Report, June 1. 1903. 8⁰.

Kgl. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften. Bd. 1, Abt. 1, Lief. 8. 1903. 8⁰.

Historischer Verein in Bamberg:

61. Bericht f. d. Jahr 1902. 1903. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Zeitschrift für Geschichte. Bd. III, Heft 1. 1903. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1902—3 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 46, afl. 2—5. 1903. 8⁰.
Notulen. Deel 40, afl. 4; Deel 41, afl. 1. 1903. 8⁰.
Dagh-Register gehouden int Cast eel Batavia. Anno 1644—45, 1676. 1903. 4⁰.
Proeve eener Ned.-Indische Bibliographie 1659—1870. Suppl. II. 1903. 4⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXIV, 1901. 1903. fol.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 62. Weltevreden 1903. 8⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 65. 66. 1903. 8⁰.
Spomenik. No. XXXIX. XL. 1903. 4⁰.
Godischniak. XV, 1901; XVI, 1902. 8⁰.
Sbornik. Bd. 2. 1903. 8⁰.
Srpske etnografski Sbornik. Bd. V mit einem Atlas. 1903 in 8⁰ (resp. 4⁰).

Museum in Bergen (Norwegen):

Aarbog für 1902, Heft 1 u. 2. 1903. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften aus d. Jahre 1902—03.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1903, No. XXV—XL. gr. 8⁰.
Inscriptiones graecae. Vol. XII, fasc. V, pars 1. 1903. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. N. F., Heft 18, No. 38 nebst Atlas zu No. 38. 1903. 4⁰.
Abbildungen und Beschreibungen fossiler Pflanzen. Liefg. 1. 1903. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 36. Jahrg., No. 10—17. 1903. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 55, Heft 1. 2. 1903. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1902. 3 Teile. Braunschweig 1903. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. V, No. 12—23. 1903. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. Vol. XVII, No. 7—10. 12—19. 1903. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1902/03, No. 10—14. 1903. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XVIII, Heft 2 u. 3. 1903. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. N. F., No. 13. Potsdam 1903. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1902. Heft 1. Preussen und benachbarte Staaten. 1903. 4⁰.
Regenkarte der Provinzen Hessen-Nassau und Rheinland. 1903. 8⁰.
Bericht über das Jahr 1902. 1903. 8⁰.
Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen im Jahre 1898—1900 von R. Süring. 1903. 4⁰.
Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen in den Jahren 1899 u. 1900. 1903. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen. II. u. III. Ordnung im Jahre 1898. 1903. 4⁰.
Bericht des Internationalen meteorologischen Komitees. Versammlung zu St. Petersburg 1899. 1900.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 32, Heft 1 u. 2. 1903. 8⁰.

Physikal.-techn. Reichsanstalt in Berlin:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. IV, Heft 1. 1904. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1903, Heft 13—24. 1903. gr. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XVI, 2. Hälfte. Leipzig 1903. 8⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 23. Jahrg., 1903, Heft 7—11. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 28. Bd. Zürich 1903. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Bd. XVII, Heft 1. 1903. 8⁰.

Natural History and Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. XI, part 2. 1902. 8⁰.

Foreign Parcel Department in Bombay:

Tibetan English Dictionary by Sarat Chandra Das. Calcutta 1902. 4⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 110. 1903. 4⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des Séances. Année 1901—02. Paris 1902. 8⁰.
Mémoires. 6e Série, Tom II, cahier 1. Paris 1903. 8⁰.
Observations pluviométriques 1902. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. No. 57. 1902. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1903, No. 13—24. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 38, No. 25—30; Vol. 39, No. 1—3. 1903. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 30, No. 3—7; Vol. 31, No. 1. 1902—03. 8⁰.
Memoirs. Vol. 5, No. 8. 9.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1902. Freie Hansestadt Bremen. Jahrg. XIII. 1903. 4⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:

80. Jahresbericht für 1902. 1903. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. VII. Jahrg., Heft 3. 4. 1903. gr. 8⁰.

Mährisches Landesmuseum in Brünn:

Zeitschrift. Bd. III, 1. 2. 1903. 8⁰.
Časopis. Vol. III, 1. 2. 1903. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tom. 18, fasc. 3—6. 1903. 8⁰.
Bulletin. IV. Série, Tom. 17, No. 5—10. 1903. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires couronnés in 4⁰. Tom. 61, Tom. 62, fasc. 3. 4.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tom. 63, fasc. 4—7. 1903. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1903, No. 5—10. 8⁰.
b) Classe des sciences 1903, No. 5—10. 8⁰.
Chartes du Chapitre de Sainte-Waudru de Mons. Tom. 2. 1903. 4⁰.

Jardin botanique de l'état in Brüssel:

Bulletin. Vol. I, fasc. 4. 1903. 8⁰.

Société belge d'astronomie in Brüssel:

Bulletin. VIIIe année, No. 9—11. 1903. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XXII, fasc. 3. 4. 1903. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. XVIIe année, Tom. 17, fasc. 3. 4. 1903. 8^{0}.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 37, année 1902. 1903. 8^{0}.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1903. 8^{0}.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mitteilungen.) Tom. XXII, 2—4; XXIII, 1. 1902—03. 8^{0}.
Čorpus statutorum Hungariae Municipalium. Vol. V, 1. 1902. 8^{0}.
Archaeologiai Értekezések. (Archäolog. Anzeiger.) Neue Folge. Bd. XXII, 4. 5; Bd. XXIII, 1. 2. 1902—03. 4^{0}.
Tarsadalmi Ertekezések. (Staatswissenschaftl. Abhandlungen.) Bd. XII, 8. 9. 1903. 8^{0}.
Nyelvtudományi Értekezések. (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen.) Tom. XVIII, No. 1—5. 1902—03. 8^{0}.
Magyarországi tanulók külföldön. (Ungarische Studierende im Ausland.) 1902. 8^{0}.
Monumenta Hungariae historica. Sectio I, Vol. 31. 1903. 8^{0}.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) XX, 3—5; XXI, 1. 2. 1902—03. 8^{0}.
Mathematische und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn. Bd. 18. Leipzig 1903. 8^{0}.
Rapport. 1902. 8^{0}.
Munkácsi B., Vogul népköltesi giijtemény. 1902. 8^{0}.
Goldziher J., buddhismus hatása. 1903. 8^{0}.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny. Bd. XXIII, Heft 5—9. 1903. gr. 8^{0}.
Alexander v. Kalecsinszky, Die Mineralkohlen. 1903. gr. 8^{0}.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXXII; XXXIII, I, 1; XXXVI. 1902—03. 4^{0}.

Ministerio de agricultura in Buenos Aires:

Clima de la Republica Argentina. 1902. fol.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. III. Serie, Tom. I, 2. 1902. 4^{0}.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. Bd. I, Heft 7. 1903. 8^{0}.

Botanischer Garten in Buitenzoorg (Java):

Mededeelingen. No. LXI, LXIV, LXV. Batavia 1903. 4^{0}.
Bulletin. No. 17. 1903. 4^{0}.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Ser. II, Tom. 24. 1901—02 sectiunii istorice.
" " " 25. 1902—03 sectiunii Literare.
" " " 24. 25. 1901—03 sectiunii scintifice. 1902—03. 4^{0}.
Istoriile luč Erodot, traducere română de Dimitrie Jon Ghica. Vol. 4, 1902. 8^{0}.
Discursuri de receptiune. XXV. 1903. 4^{0}.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. XVI, anul 1900. 1903. 4°.
Index des publications de l'Institut météorologique de Romanie. 1903. 8°.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 5e Série, Vol. 5, année 1902. 1903. 8°.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1903. Januray—June und Summary Report zu 1902. 1903. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. XIV; XV, 1. 2; XVI, 1. 1902—03. fol.
Report on the Administration in 1902/03. 1903. fol.
Memorandum on the meteorological Conditions prevailing in the Indian Monsoon Region. 1903. Simla 1903. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New. Ser., No. 1036—1048. 1903. 8°.
Journal. No. 402. 407—09. Hertford 1902—03. 8°.
Proceedings. 1902, No. XI; 1903, No. I—V. 1903. 8°.

Harvard College in Cambridge, Mass.:

Harvard Oriental Series. Vol. IV. 1901. 8°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 39, No. 6. 7; Vol. 40, No. 7 und Vol. 42, No. 2—4. 1903. 8°.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 48, No. 3. 4. 1903. 4°.
Circulars. No. 51—71. 1900—03. 4°.

Philosophical Society in Cambridge:

List of Fellows. August 1903. 8°.
Proceedings. Vol. 12, part 1. 1903. 8°.

Geological Commission, Colony of the Cape of Good Hope in Cape Town:

Annual Report for 1901. 1902. 1902—03. 4°.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino mensile. Nuova Ser., fasc. 77. 78. 1903. 8°.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Dekaden-Monatsberichte. Jahrg. V, 1902. 1903. 4°.
Das Klima des Königreiches Sachsen. Heft VII. 1903. 4°.
Jahrbuch. Jahrg. XVII, 1899, II. Abteilung. 1902. 4°.
Abhandlungen. Kritische Bearbeitung der Luftdruckmessungen im Königreich Sachsen 1866—1900. 1903. 4°.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 69—74. 76. 1903. 8°.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. 18, No. 1—5. 1903. gr. 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlingar for 1902. 8°.
Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Klasse 1902.
II. Histor.-filos. Klasse 1902. 1903. 4°.

K. Norwegische Universität in Christiania:

J. Fr. Schroeter, Untersuchung über die Eigenbewegung von Sternen. 1903. gr. 4⁰.

University of Cincinnati in Cincinnati:

Bulletin. No. 1. 3. 7. 14. 1900—02. 8⁰.

Archaeological Institute of America in Cleveland, Ohio:

American Journal of Archaeology. II. Ser., Vol. VII, No. 2. Norwood 1903. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republic Argentinien):

Boletin. Tom. XVII, 3. Buenos Aires 1903. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Mitteilungen. Jahrg. II, No. 3. 4. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. 1, Heft 6. Heidelberg 1903. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. 7, p. 85—138. 1903. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mitteilungen. Bd. IX, 6. 1903. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XXIV, 1; Tom. XXV, 2. 4. 1903. 8⁰.

K. sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XXIV. 1903. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III, Vol. 24, Sect. A, part 2; Vol. 24, Sect. B, part 3; Vol. 24, Sect. C, part 3. 1903. 8⁰.

Transactions. Vol. XXXII, part 6, Sect. A; part 1, Sect. C. 1903. 4⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. XXV, No. 6—11 u. Suppl. zu No. 9. 1903. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXIV, No. 5. 1903. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VIII, part II u. Spezial-Part. 1903. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1901—02. 1903. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. Jahrg. VII. 1903. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

87. Jahresbericht für 1901/02. 1903. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus d. J. 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Ser. IV, Vol. XXVI, disp. 3. 1903. 8°.

R. Istituto di studi superiori in Florenz:

Theodori Ducae Lascaris Epistulae CCXVII ed. Nic Festa. 1898. 4°.
Ferd. Livini, Intorno alla struttura della trachaea. 1897. 4°.
Oreste Mattirolo, Cenni cronologici sugli orti botanici di Firenze. 1899. 4°.
G. Galeotti e G. Polverini, Sui primi 175 casi de peste bubonica in Bombay 1898. 4°.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. XVI, 1. Roma-Firenze 1903. 8°.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a/M.:

Festschrift zur Feier des 25jährigen historischen Museums. 1903. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. 20. Bd. Berlin 1903. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Bd. 13. 1903. 8°.

Univsrsität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus d. J. 1902—03 in 4° u. 8°.

Universität Freiburg in der Schweiz:

G. Michaut, Sainte-Beuve avant les „Lundis". 1903. 8°.

Comité der Graebe-Feier in Genf:

Graebe-Feier, Kassel 20. Sept. 1903. 8°.

Universität in Genf:

Schriften aus d. J. 1902—03 in 4° u. 8°.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Bulletin. Tom. II, 8. 1903. 8°.

Universität in Giessen:

Schriften aus d. J. 1902—03 in 4° u. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1903, No. 7—12 (Juli-Dez.). Berlin gr. 8°.
Abhandlungen. N. F.
a) Philol.-hist. Klasse. Bd. VII, No. 1—3. Berlin 1903. 4°.
b) Mathem.-phys. Klasse. Bd. II, No. 4. Berlin 1903. 4°.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse 1903, Heft 4. 5. 4°.
b) Math.-physikal. Klasse. Heft 3—5. 4°.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1903, Heft 1. 4°.
Karl Friedrich Gauss' Werke. Bd. IX. Leipzig 1903. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1902, Heft 39. 1903. 8°.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. X. Reeks, Deel I, afl. 4. 1903. 8°.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II, Vol. VIII, No. 3. 1903. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II, Tom. 8, livr. 3. 4 et 5. La Haye 1903. 8⁰.

Naturkundige Verhandelingen. III^{de} Verzameling. Deel V, stuk 3. 1903. 4⁰.

Historischer Verein f. Württemb. Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch Franken. Neue Folge, VIII. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 39, No. 6—11. 1903. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 57, Heft 3. Leipzig 1903. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus d. J. 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. 75. Bd., Heft 4—6; 76. Bd., Heft 1. 2. Stuttgart 1903. 8⁰.

Thüringisch-sächsischer Verein zur Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. XXI, 3. 1903. 8⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

25. Jahresbericht f. d. J. 1902. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Bd. XI, 3. 1903. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Bd. XVIII. 1903. 4⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahr 1903, Heft 1—3. 1903. 8⁰.

Grossherzogl. Sternwarte in Heidelberg:

Mitteilungen. II. Karlsruhe 1903. 8⁰.
Veröffentlichungen. Bd. II. 1903. 4⁰.

Universität Heidelberg:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1902—03 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Die deutschen Pfälzer Handschriften des XVI. u. XVII. Jahrhunderts von Jakob Wille. 1903. 4⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Lief. 19. 1903. 4⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Jahresbericht für das Jahr 1902. 1903. 8°.

Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:

Schriften. 45 Heft. 1903. 8°.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 30. Jahrg. 1903. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge, Heft 47. 1903. 8°.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 7, No. 5—8. 1903. 8°.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. II, fasc. 3. 4. 1903. 8°.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 38, Heft 1. 2. 1903. 8°.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1902. Jurjew 1903. 8°.

Badische historische Kommission in Karlsruhe:

Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. 18, Heft 3. 4. Heidelberg 1903. 8°.
Neujahrsblätter 1904. Heidelberg 1904. 8°.

Zentralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1902. 1903. 4°.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1901—02.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. 16. Bd., 1902—03. 1903. 8°.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série, Tom. XII, No. 2. 4; Tom. XIII, No. 1. 2. 1902. 8°.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 70, No. 5—11. 1903. 8°.
Drei Dissertationen. 1902. 8°.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1903, fasc. 2. 3. 8°.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. VII, Abteilg. Kiel; Bd. VIII, Ergänz.-Heft, Abteilg. Kiel. 1903. 4°.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 43, No. 5—9. 1903. 8°.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Carinthia II. 93. Jahrg., No. 3—5. 8°.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 43. Jahrgang. 1902. 4⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1901—02 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Universitäts-Sternwarte in Königsberg:

Astronomische Beobachtungen. 41. Abteilung. 1903. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1903, No. 2—5. 1903. 8⁰.
Mémoires. Section des sciences. Serie VI, Tom. XI, No. 5 u. 6, Tom. XII, No. 3. 1903. 4⁰.
Dansk Staatsforvaltning of William Christensen. 1903. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Nordiske Fortidsminder. Heft 5 u. 6. 1903. 4⁰.
Aarbőger. II. Raekke, Bd. XVII. 1902. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1902. 8⁰.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:

Bulletin. Année 1902—03, No. 1—4. 1903. 4⁰.
Publications de circonstance. No. 1—7. 1903. 8⁰.
Rapports et Procès-verbaux des reunions. Vol. I. 1903. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Katalog literatury naukowey polskiej. Tom. 2, Heft 4, 1902; Tom. 3, Heft 1, 1903. 1903. 8⁰.
Anzeiger. Mai-Juli.
Rozprawy historyczne. Tom. 44 (= II. Serie, Tom. 19). 1903. 8⁰.
„ filologizne. Tom. 34, No. 37. 1902—03.
„ matemat-przyrod. Tom. 42 A u. B. 1902. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. No. 42—46. 1903. 8⁰.
Materyaly antropolog.-archeolog. Tom. VI. 1903. 8⁰.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszut XIV mit Karten. 1903. 8⁰ bezw. fol.
Sprawozdanie komisyi hist. sztuki. Tom. VII, 3. 1903. 4⁰.
Federowski, Lud bialoruski. Vol. 3. 1903. 8⁰.
Prace komisyi jezyk. Tom. I, 2; II, 1. 1903. 8⁰.
Archiwum komisyi histor. Tom. IX. 1902. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. 39. Bd. 1903. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 39, No. 147. 1903. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

Bulletin (Science). Vol. I, No. 5—12. 1902. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. Bd. XXI, 3; XXII, 2. 3. 1903. 4⁰.
„ „ math.-physik. Klasse. Bd. XXVIII, 4. 5. 1903. 4⁰.
Berichte der math.-physik. Klasse. Bd. 55, No. 3—5. 1903. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1902. 1903. 8⁰.

Université de Lille:

Tableaux des cours de l'année 1903—04. 1903. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

61. Jahresbericht. 1903. 8⁰.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletim. 20. Série 1902, No. 1—6; 21. Série 1903, No. 4—7. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XX, 2. 1903. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XVII, 1. 1903. 8⁰.

National Physical Laboratory in London:

Report for the years 1901 and 1902. 1902—03. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVIII, No. 71 July, No. 72 October. 1903. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 72, No. 477—485. 1903. 8⁰.
Reports of the sleeping sickness Commission. No. I—IV. 1903. 8⁰.
Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fischeries of the Gulf of Manaar. By W. A. Herdman. 1903. 4⁰.
Philosophical Transactions. Series A, Vol. 201. 1903. 4⁰.
Report to the Malaria Committee. VIIIth Series.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 63, No. 8, No. 9 (Supplementary No.); Vol. 64, No. 1. 1903. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 488—494. 1903. 8⁰.
Proceedings. Vol. 19, No. 269—273. 1903. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. 115th Session, Nov. 1902 to June 1903. 8⁰.
The Journal. a) Botany. Vol. 35, No. 246. 247; Vol. 36, No. 251. 252. b) Zoology. Vol. 29, No. 187. 188. 1903. 8⁰.
The Transactions. II. Ser. Botany, Vol. VI, part 6; Zoology, Vol. VIII, part 11. 12, Vol. IX, part 1. 2. 1903. 8⁰.
List of Fellows. 1903—04. 1903. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 86. 1903. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1903, part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1903, Vol. I, part 1. 2. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, part 8; Vol. XVII, part 1. 2. 1903. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1758—1784. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. XXV bis livr. 2; Tom. XXIX, livr. 4; Tom. XXX, livr. 1. 1901—03. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 58. Stans 1903. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. Nouv. Sér., I. Sciences, fasc. 11. 1903. 8⁰.
Catalogue sommaire du Musée de Moulages. 1903. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. VIII. 1902. 8⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Tom. XVIII, parte 1; Tom. XX, XXI. 1897—1903. 4⁰.
Anuario. 1903. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 43, cuad. 1—6. 1903. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II, Vol. 36, fasc. 9—16. 1903. 8⁰.
Memorie. Classe di scienze matematiche. Vol. 19, fasc. 9; Vol. 20, fasc. 1. 1903. 4⁰.
Atti della fondazione Cagrola. Vol. 18. 1903. 8⁰.

R. Osservatorio di Brera in Mailand:

Publicazioni. No. XLII. 1902. fol.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 42, fasc. 2. 3. 1903. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III, Anno 30, fasc. 38. 39. 190 8⁰.

Röm.-german. Zentralmuseum in Mainz:

Festschrift zur Feier des 50jährigen Bestehens. 1902. 4⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 47, part 5. 6. 1903. 8⁰.

Altertumsverein in Mannheim:

Mannheimer Geschichtsblätter. 4. Jahrg. 1903, No. 2—12; 5. Jahrg. 1904, No. 1. 4⁰.
Forschungen zur Geschichte Mannheims und der Pfalz. IV. Leipzig 1903. 8⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1901—02 in 4⁰ u. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. XIII. Paris 1903. 4⁰.

Hennebergischer altertumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Altertums. Heft 18. 1903. 4⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1902/03. 1903. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. N. Ser., Vol. XVI, part 1. 1903. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. XIV. Jahrg. 1902. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. Mes de Febraro 1902. fol.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie III, Vol. 4. 1902. 4⁰.

Museum océanographique de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques, fasc. XIII. XIV et Carte bathymétrique. 1903. gr. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Tom. IV. 1903. 4⁰.
Flora Uruguaya. Tomo 2 (pag. I—XLVIII 1—160). 1903. 4⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section de médecine. 2e Série, Tom. 2, No. 1. 1903. 8⁰.

Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Imp. in Moskau:

Observations faites Mars—Déc. 1901. 1903. 4⁰.

Lazarevsches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. Heft 13. 1902. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1902, No. 4. 1903. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXIV, 1. 1903. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. 1903, No. 37. 41—45, 47—49. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1902. 1903. 4⁰.
Verzeichnis der Flächeninhalte der Bach- u. Flussgebiete. Heft 2. 1903. 4⁰.
Atlas der bayerischen Flussgebiete. 2 Karten. 1902—03.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. IV. Jahrg., Heft IV, Teil 2 (1902); V. Jahrg., Heft II u. III (1903). 4⁰.

Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. Abteil. I u. II. Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. No. 16—29. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte. XV. Jahrgang 1902. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Wintersemester 1903/04.
Verzeichnis der Vorlesungen im Wintersemester 1903/04.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. IV, Heft 1—3. 1903. 4⁰.

Ornithologischer Verein in München:

III. Jahresbericht. 1903. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. No. 154. 157—159. 4⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. Année 153, 5e Série, Tom. 20. 1903. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. III, Tom. 3, fasc. 4; Tom. 4, fasc. 1. 2. Paris 1902. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 34. 1903. 8⁰.
Rendiconto. Anno 40 (1901) e 41 (1902). 1901—03. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie 3, Vol. 9, fasc. 5—7. 1903. gr. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. 16. Bd., Heft 1. 2. Berlin 1903. 8⁰.

Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 51, part 6; Vol. 52, part 5. 6 und Report of the Committee upon mechanical Coal Meutting part 1; Vol. 54, part 1. 1903. 8⁰.
Annual Report for the year 1902—03. 1903. 8⁰.
Almanaque nautico para el año 1905. San Fernando 1903. gr. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser., Vol. 16, No. 91—96. 1903. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXIV first half. 1903. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for the year 1902. 1903. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 35, No. 3. 4. 1903. 8⁰.

Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:

Nederlandsch kruidkundig Archief. III. Serie, 2e Deel, 4e stuk. 1903. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. IId Series, Vol. VII, No. 3. 1903. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Bd. XV, Heft 1. 1903. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger 1902, Heft 1—4. 4⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 27. Bd. 1902. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Catalogue of Canadian Birds. Part. II. By John Macoun. 1903. 8⁰.
Annual Report. New Series. Vol. XII with Maps. 1902. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Series, Vol. 8. 1902. 8⁰.

Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica" in Padua:

N. S. Anno VII, fasc. 4. 1903. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. 17, fasc. 4—6. 1903. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1902, Agosto-Dicembre. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1903, No. 26—42. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 136, No. 26; Tom. 137, No. 1—25. 1903. 4⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. IIe Série, cahier VIII. 1903. 4⁰.
Procès-verbaux des séances. Série II, Tom. 2. 1903. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 738—744. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales in 4⁰. Tom. XXX, 3e partie. 1903. 8⁰.
Annales. Bibliothèque d'études. Tom. XI et XV. 1903. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 46, No. 3; Tom. 47, No. 1—3. 1902—03. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1903, No. 3. 4. 8⁰.
Nouvelles Archives. IVe Série, Tom. IV, fasc. 2. 1902. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 1902, fasc. 5. 6. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année VII, No. 2—6; année VIII, No. 1. 1902—03. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 31, fasc. 2. 3. 1903. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Comptes rendus des séances de la commission sismique. Tom. I, Livr. 2. 1903. 4⁰.

Byzantina Chronika. Bd. VIII, 1—4; Bd. IX, 1. 2. 1901—02. 8⁰.
Mémoires. a) Classe historico-philologique. Vol. IV, 9; V, 1—5; VI, 1—4. 1900—02. 4⁰. b) Classe physico-mathémat. Vol. XI, 1—11; XII, 1—11; XIII, 1—5 u. 7. 1900—02. 4⁰.
Bulletin. 5e Série, Tom. XVI, 4. 5; Tom. XVII, 1—4. 1902. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. XXI, No. 5—10. 1902. 4⁰.
Mémoires. Vol. XVI, No. 2, Texte et Atlas; Vol. XVII, 3; XX, 1. Nouv. Sér., Livre 1. 2. 4. 1902. 4⁰.
Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie
a) Région aurifère d'Jénissei, livr. 4.
b) „ „ de Léna, livr. 2. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. 21, fasc. 2. 1903. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie, Bd. 40, Liefg. 2. 1903. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kaiserl. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 35, No. 6—8. 1903. 8⁰.

Physikalisches Zentral-Observatorium Nicolas in St. Petersburg:

Publications. Vol. IX, 1. 2; X; XII; XIII; XVII, 1; XVIII, 1. 1903. fol.
Annales. Année 1901, partie I. II. 1903. 4⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schriften aus dem Jahre 1902—03 in 4⁰ u. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 55, part 1. 1903. 4⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 27, No. 107. 108. 1903. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 39, No. 6—11. 1903. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 42, No. 172. 173. 1903. 8⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. XVII. 1903. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XIII, p. 153—192. 1903. 4⁰.
Atti. Memorie. Vol. XIX. 1903. gr. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Serie V, Tom. 5. 1903, Aprile-Agosto. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky archaeologické. Tom. XX, No. 2—6. 1902—03. 4⁰.
Starožitnosti země české. Díl II, svazek 2. 1903. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Vorläufiger Bericht über eine archäol. Expedition nach Kleinasien. 1903. 4⁰.
Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. V, Heft 1. 1903. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Bericht für das Jahr 1902. 1903. 8⁰.
Časopis. Bd. 77, Heft 3. 4. 1903. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnet. u. meteorolog. Beobachtungen im Jahre 1902. 63. Jahrg. 1903. 4⁰.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Časopis. Bd. 32, Heft 3—5. 1903. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mitteilungen. 41. Jahrg., No. 1—4. 1902. 8⁰.

Deutscher naturwissenschaftl.-medizin. Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1902, Bd. 50. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. IX. Heft 1901 u. 1902. 1903. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt No. XLVI. 1903. 8⁰.

Bibliothèque Nationale de Rio de Janeiro:

Relatorio apresentado ao Presidente da Republica por Sabino Barroso Jundor. 1902. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario. Anno XIX 1903. 8⁰.
Boletim mensal. Outubro-Dezembro 1902; Janeiro-Março 1903. 1903. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. XI, parte 2. Notizie degli scavi, fasc. 4—8. 1903. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. XII, semestre 1, fasc. 12; semestre 2, fasc. 1—11. 1903. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali e filologiche. Serie V, Vol. XII, fasc. 3—10. 1903. 8⁰.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 7 Giugno 1903. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 56 (1902—03), Sessione I—VII. 1903. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1903, No. 1 u. 2. 1903. 8⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XVIII, Heft 1. 2. 1903. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione publica in Rom:

Le opere di Galileo Galilei. Vol. XIII. Firenze 1903. 4⁰.

Historischer Verein in Rosenheim:

Das bayerische Oberland am Inn. 3. Jahrg. 1903. 8⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1901—02. 1903. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 9, fasc. 2. 1903. 8⁰.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tom. III, No. 2. 3. Hanoi 1903. 4⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mitteilungen. 43. Vereinsjahr 1903. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. XXIX. 1903. 8⁰.
Jahresbericht über die Sammlungen des histor. Vereins 1901/02. 1902. 4⁰.
Neujahrsblatt 1903. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Sección II. Año 1901. 1902. fol.
Almanaque nautico para el año 1905. 1903. gr. 8⁰.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1899. Wien 1902. 4⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 68. Jahrg. 1903. 8⁰.

Comité international des poids et mesures in Sèvres près Paris:

Procès-verbaux. Série II, Tom. 2. Paris 1903. 8⁰.

China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:

Journal. N. Sér., Vol. 33. 1899—1900. 8⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, Vol. XV, No. 1—6. 1903. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXVI, No. 3—11. 1903. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mitteilungen. XXVI. 1903. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Lefnadsteckningar. Bd. 4, Heft 3. 1903. 8⁰.
Astronomiska Jakttagelsen. Vol. 6, No. 5. 1903. 4⁰.
Bihang. Vol. 28, Section 1—4. 1903. 8⁰.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. Bd. 42, 1900. 1903. 4⁰.
Handlingar. N. F., Bd. 36. 37, No. 1. 2. 1902—03. 4⁰.
Arkiv för matematik. Bd. I, 1. 2. 1903. 8⁰.
" " kemi. Bd. I, 1. 1903. 8⁰.
" " botanik. Bd. I, 1—3. 1903. 8⁰.
" " zoologi. Bd. I, 1. 2. 1903. 8⁰.
Årsbok 1903. 8⁰.
Berzelius, Reseanteckninger. 1903. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 25, Heft 5. 6. 1903. 8⁰.

Institut Royal géologique in Stockholm:

Sveriges geologiska undersökning. Series A a, No. 116. 118. 122; A c, No. 7; C, No. 193. 194; Ca, No. 3. 1903 in 4⁰ u. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:

Meddelanden 1902. 1903. 8⁰.
Samfundet 1900 och 1901. 1902. 8⁰.
Vinterbilder u. Sommarbilder Från Skansen. 1901. 4⁰.
Minnen Från Nordiska Museet. Bd. II, Heft 8—12. 1902. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 37, No. 5—7. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Landesbibliothek in Stuttgart:

Wirtembergisches Urkundenbuch. Bd. 8. 1903. 4⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F., XII. Jahrg., Heft 1—4. 1903. 8⁰.
Mitteilungen. 12. Sitzung, 1. Mai 1903. 8⁰.

K. württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Die erdmagnet. Elemente von Württemberg u. Hohenzollern. 1903. 4⁰.

Physikalisches Institut der K. Technischen Hochschule in Stuttgart:

Relative Schweremessungen III., v. K. R. Koch. 1903. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:

Records of the geological Survey. Vol. VII, 3. 1903. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 36. 1902. 8⁰.

Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:

Proceedings. Vol. 23, part 1—4; Vol. 24, part 1—4; Vol. 27, part 2; Vol. 28, part 1. 2. 1898—1903. 8⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications No. 14. 1903. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. IX, Teil 3. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Universität in Tokio (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. 17, article 11. 12; Vol. 18, article 2—4; Vol. 19, article 1. 5—10. 1903. 4⁰.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. VI, No. 1. 1903. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. 5, No. 3. 4. 1903. 4⁰.

Kansas Academy of Sciences in Topeka, Kansas:

Transactions. Vol. XVIII. 1903. 8⁰.

Altertumsverein zu Torgau:

Veröffentlichungen. Heft 15 u. 16. 1903. 8⁰.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. 15ᵉ année, No. 58. 59. 1903. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIᵉ Sér., Tom. 5. Année 1903. Paris. 4⁰.
Bibliothèque méridionale. I. Série, Tom. 8. 1903. 8⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno 18, fasc. 1. 1903. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Triest:

Atti. Vol. 10. 1903. 8⁰.

Universität Tübingen:

Georg v. Below. Zur Geschichte der konstitutionellen Partei. 1903. 4⁰.
Ludolf Krehl, Über die Entstehung der Diagnose. 1903. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 38, disp. 8—15. 1903. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 53. 1903. 4⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. 34, Année 1902. 1902—03. 4⁰.

K. Universität in Upsala:

Hermann Lundborg, Die progressive Myoklonus-Epilepsie. 1903. 8⁰.
Eranos. Acta philologica. Vol. 5, fasc. 1. 2. 1903. 8⁰.
Schriften aus dem Jahre 1902—03 in 4⁰ u. 8⁰.
Svariges Karta af Sven Lönborg. 1903. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks; IV, 2. 1903. 8⁰.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Ser. IV, Vol. 3. 1902—03. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace matematyczno-fizyczne. Tom. 14. 1903. 8⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VIII, 7. 1902. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

Bulletin. No. 25: Trunzbull Natick Dictionary. 1903. 4⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Contributions to Knowledge. No. 1373. 1903. 4⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1372. 1376. 1902—03. 8⁰.

U. S. National-Museum in Washington:

Bulletin. No. 50, part I. II; No. 51. 52. 1902. 8⁰.
Proceedings. Vol. XXIV—XXVI. 1902—03. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. IId Series, Vol. 3. 1903. 4⁰.

The Astronomical and Astrophysical Society of America in Washington:

Second, third and fourth Meeting 1900—02. 1901—03. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report of the Superintendent for the year 1901—02. 1903. 4⁰.
List and Catalogue of the Publications 1816—1902. 1902. 4⁰.
A Bibliography of Geodesy by James Howard Gore. 1903. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 191. 195—207. 1902. 8⁰.
Monographs. No. XLII. XLIII. 1903. 4⁰.
Mineral Resources, year 1901. 1902. 8⁰.
Professional Paper No. 1—8. 1902. 4⁰.
Water-Supply Papers No. 65—79. 1902—03. 8⁰.

Library of Congress in Washington:

A List of Books on mercantile marine subsidies. 1903. 4⁰.
Select List of Books, 3 Vols; Select List of References, 6 Vols. 1903. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 36. Jahrg., Heft 1. 1903. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse. Bd. 145.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. Abt. I, Bd. 111, No. 4—9; Abt. IIa, Bd. 111, No. 5—10; Abt. IIb, Bd. 111, No. 4—10; Abt. III, Bd. 111, No. 1—10 und Register zu den Bänden 106—110. 1902. 8⁰.
Denkschriften. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. Bd. 72.
Schriften der Balkankommission. Linguistische Abteilung II. III. 1903. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 91, 2; Bd. 92, 1. 1902. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abtlg., Bd. 55. 1902. 8⁰.
Almanach. 1902. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1902, 52. Bd., Heft 2—4; Jahrg. 1903, 53. Bd., Heft 1. 1903. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XX, Heft 1. 1903. fol.
Mitteilungen der Erdbebenkommission. N. F., No. X, XI, XIII. 1902. 8⁰.
Verhandlungen 1903, No. 9—15. 4⁰.
Geologische Karte der österr.-ungar. Monarchie. Lief. IV. V. 1903.
Mitteilungen der prähistor. Kommission. Bd. I, No. 6. 1903. 4⁰.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1901 in 2 Bänden. 1902. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 16. Jahrg. 1903, No. 27—53. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 53, Heft 5—9. 1903. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. 18, Heft 2. 3. 1903. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Schriften aus dem Jahre 1902/03. 1903. 8⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Bd. XVI. 1902. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 42. 43. 1902—03. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 56. 1903. 8⁰.

Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig in Wolfenbüttel:

Jahrbuch. Bd. I. 1902. 8⁰.
Braunschweigisches Magazin. 8. Jahrg. 1902. 4⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F., Bd. 35, No. 6. 7. 1903. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1902, No. 5. 6. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 1903, Heft 1. 2. 1903. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

Mitteilungen 1903, No. 5. 8⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge zur Geologie der Schweiz. Geotechnische Serie, Lieferung II. Bern 1903. 4⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizer. Altertumskunde. N. F., Bd. V, No. 1. 1903. 4⁰.
XI. Jahresbericht 1902. 1903. 8⁰.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen. No. XCIV. 1903. 8⁰.

Universität in Zürich:

Schriften 1902/03 in 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 27, Heft 7—12. Leipzig 1903. 8⁰.
Journal für prakt. Chemie. N. F., Bd. 67, Heft 11. 12; B. 68, Heft 3—10. Leipzig 1903. 8⁰.

Francis Bashforth in Cambridge:

A historical Sketch of the experimental Determination of the Resistance of the Air to the Motion of Projectiles. Cambridge 1903. 8⁰.

Hermann Böhlau's Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte, Bd. XXIV (romanistische und germanistische Abteilung). Weimar 1903. 8⁰.

Émile Boulanger in Paris:

Germination de l'ascospore de la truffe. Paris 1903. 4⁰.

Charles Combes in Paris:

Sur les tentatives de reproduction du diamant. Paris 1903. 4⁰.

R. Fick in Leipzig:

Gesammelte Schriften von Adolf Fick. Bd. I. Würzburg 1903. 8⁰.

Verlag von Gustav Fischer in Leipzig:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1903, Bd. 18, No. 40—52; Bd. 19, No. 1—13. Jena. 4⁰.
Ernst Abbe, Gesammelte Abhandlungen. Bd. I. Jena 1904. 8⁰.

H. Fritsche in Riga:

Atlas des Erdmagnetismus. Riga 1903. fol.

Albert Gaudry in Paris:

Discours prononcé le 21 décembre 1903. Paris 1903. 4⁰.

Mme Vve Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 27, Juillet—Décembre 1903. Guise. 8⁰.

Emil A. Goeldi in Pará, Brasilien:

Album de Aves Amazonicas. Pará 1903. 4⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Anthropogenie. 5. Auflage. Leipzig 1903. 2 Bde. 8⁰.
Kunstformen der Natur. Liefg. 9. Leipzig 1903. fol.

H. van Herwerden in Utrecht:

Collectanea critica, epicritica, exegetica. Lugd.-Bat. 1903. 8⁰.

Eduardo Higginson in Southampton:

Karte von Perú. Lima 1903.

Johannes Jaeger in Amberg:

Die Klosterkirche zu Ebrach. Würzburg 1903. 4°.

A. Kölliker in Würzburg:

Die Entwicklung und Bedeutung des Glaskörpers. Leipzig 1904. 8°.

J. J. Kossonogoff in Kiew:

Optische Resonanz als Ursache der selektiven Reflexion und Absorption des Lichtes. Kiew 1903. 8°. (In russ. Spr.)

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XII, 3. 4. Leipzig 1903. 8°.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. II. Fortsetzung. München 1903. 8°.

F. Liebermann in Berlin:

Die Gesetze der Angelsachsen. Bd. I. Halle 1903. 4°.

C. Mehlis in Neustadt a. H.:

Neolithische u. spätzeitliche Silex- u. Kieselware. 1903. 4°. (Ausschnitt.)
Das Grabhügelfeld an der Heidenmauer bei Dürkheim a, H.
Die Grabhügel im Ordenswalde und Hasslocher Walde. Braunschweig 1903. 4°.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 82, No. II; Tom. 83, No. I. II. Paris 1903. 8°.

Friedrich Ohlenschlager in München:

Römische Überreste in Bayern. Heft 2. München 1903. 8°.

Gerasimus B. Pignatorre in Athen:

De festi corporis domini apud Catinos institutione. Athenis 1903. 8°.

Gustav Radde in Tiflis:

Die Sammlungen des Kaukasischen Museums. Bd. III. Tiflis 1901. 4.

Verlag von Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische, ozeanische und ostasiatische Sprachen. Jahrgang VII. Heft 1. Berlin 1903. 8°.

K. Rudel in Nürnberg:

Grundlagen der Klimatologie Nürnbergs. Teil I. Nürnberg 1903. 4°.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis 1903, No. 13—23. München. 8°.

Lucian Scherman in München:

Orientalische Bibliographie. 16. Bd. (3 Hefte). Berlin 1903. 8°.

*

Henry Simonsfeld in München:

Itinerario di Germania dell' anno 1492 edito da Enrico Simonsfeld. Venezia 1903. 8°.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig:

Thesaurus linguae latinae. Vol. I, fasc. 6 Lipsiae 1903. 4°.
Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. 6, Heft 1—4. Leipzig 1903. 8°.
Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. III a, Heft 2/3; Bd. IV 1, Heft 3. Leipzig 1903. 8°.

A. Thieullen in Paris:

Le Mammouth et le Renne à Paris. Paris 1903. fol.

L. Wittmack in Berlin:

Die in Pompeji gefundenen pflanzlichen Stoffe. Sep.-Abdr. 1903.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

